UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA

FACULTAD DE INGENIERÍA

CURSO NIVELATORIO

ÍNDICE GENERAL POR TEMA

ÁLGEBRA	1
CÁLCULO	51
ARITMÉTICA	117
TRIGONOMETRÍA	150
FÍSICA	199

ALGEBRA

$$4a^3b^3$$

INDICE

OPERACIONES CON POLINOMIOS

- Suma y Resta de Polinomios
- Multiplicación de Monomios y Polinomios
- División de Polinomios
- División Sintética

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION

- Producto de Dos Binomios Conjugados
- Cubo de un Binomio
- Producto de Dos Binomios con un Término Común
- Binomio de Newton y Triángulo de Pascal

FACTORIZACION

- Factor Común en un Polinomio
- Factorización por Agrupación
- Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto
- Factores de una Diferencia de Cuadrados
- Factores de Sumas y Diferencias de Cubos
- Factores de un Cubo Perfecto

EXPRESIONES FRACCIONARIAS

- Simplificación de Fracciones
- Multiplicación de Fracciones
- División de Expresiones Fraccionarias
- Suma y Resta de Expresiones Fraccionarias
- Simplificación de una Fracción Compuesta

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

- Ecuaciones
- Ecuaciones Equivalentes
- Ecuaciones Lineales
- Ecuaciones con Soluciones Literales

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Cualquier **polinomio** es una suma de términos de la forma ax^k, llamados **monomios**, donde a es una constante y k es un entero no negativo.

Polinomio

Es una expresión algebraica que está formada por uno o más monomios.

La forma general de un polinomio de grado n (donde n es un entero no negativo) en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes con $a_n \neq 0$.

Un **binomio** es la suma de dos monomios, un **trinomio** es la suma de tres monomios y así sucesivamente.

Por ejemplo $2x^2 - 3x + 4$, $2x + 5$, y $x^4 + 4x^3$, son polinomios todos, de grado 2, 1 y 4 respectivamente; el primero es un trinomio, y los otros dos son binomios.

Términos semejantes

Cuando dos o más términos tienen la misma parte literal, es decir, que tienen las mismas variables afectadas por los mismos exponentes, se les llama **términos semejantes**.

Ejemplos

$4a^3b^3$ y $-2a^3b^3$ son términos semejantes

$3xy$ y $-\frac{2}{3}xy$ son términos semejantes

$\sqrt{2}p^2q$ y $-8p^2q$ son términos semejantes

Signos de agrupación

Estos signos ya los mencionamos en una sección anterior y lo que es importante recordar ahora es que su uso es principalmente el de indicar que las operaciones localizadas en su interior son las que se deben efectuar primero y si un *signo negativo* antecede a una expresión entre paréntesis, entonces cuando eliminamos dichos paréntesis *todos los términos de adentro cambian de signo.*

( ) Paréntesis
[ ] Corchetes
{ } Llaves.

Ejemplo Simplifiquemos la siguiente expresión y reduzcamos los términos semejantes

$$\underbrace{\left\{2x^2-3xy+2y^3-\underbrace{\left[-2xy+3x^2+\underbrace{\left(-2x^2+7xy-4y^3\right)}_{primero}\right]}_{segundo}+3xy-2y^3\right\}}_{tercero}$$

$$=\left\{2x^2-3xy+2y^3-\left[-2xy+3x^2\underbrace{-2x^2+7xy-4y^3}_{\substack{conservan\ el\ mismo\ signo\\ porque\ les\ precede\ un\ +}}\right]+3xy-2y^3\right\}$$

$$=\left\{2x^2-3xy+2y^3\underbrace{+2xy-3x^2+2x^2-7xy+4y^3}_{cambian\ de\ signo\ porque\ les\ precede\ un\ -}+3xy-2y^3\right\}$$

$$=2x^2-3xy+2y^3+2xy-3x^2+2x^2-7xy+4y^3+3xy-2y^3$$

$$=(2-3+2)x^2+(-3+2-7+3)xy+(2+4-2)y^3 \qquad \text{Agrupando y factorizando}$$

$$=x^2-5xy+4y^3.$$

❑ Suma y resta de polinomios

En realidad cuando **sumamos** y **restamos** polinomios lo que estamos haciendo es **combinar términos semejantes** utilizando para ello las propiedades de los números reales que vimos en la primera sección de este curso.

Ejemplos

1. Calcula la suma de $\left(a^3-6a^2+2a+4\right)+\left(3a^3+5a^2-4a\right)$

Solución

$$\left(a^3-6a^2+2a+4\right)+\left(3a^3+5a^2-4a\right)$$

$$=\left(a^3+3a^3\right)+\left(-6a^2+5a^2\right)+(2a-4a)+4 \qquad \text{Agrupando términos semejantes}$$

$$=4a^3-a^2-2a+4 \qquad \text{Combinando términos semejantes}$$

2. Calcula la suma de $\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{3}{5}ab-2a^2\right)+\left(7ab+\frac{5}{7}b^2\right)+\left(-\frac{4}{9}a^2-\frac{8}{7}ab\right)$

Solución

$$\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{3}{5}ab-2a^2\right)+\left(7ab+\frac{5}{7}b^2\right)+\left(-\frac{4}{7}a^2-\frac{8}{7}ab\right)$$

$$=\left(-2a^2-\frac{4}{7}a^2\right)+\left(\frac{3}{5}ab+7ab-\frac{8}{7}ab\right)+\left(\frac{2}{3}b^2+\frac{5}{7}b^2\right)$$ Agrupando términos semejantes

$$=\left(-2-\frac{4}{7}\right)a^2+\left(\frac{3}{5}+7-\frac{8}{7}\right)ab+\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)b^2$$ Se aíslan los coeficientes fraccionarios

$$=\left(\frac{-14-4}{7}\right)a^2+\left(\frac{21+245-40}{35}\right)ab+\left(\frac{14+15}{21}\right)b^2$$ Se realizan las operaciones

$$=-\frac{18}{7}a^2+\frac{226}{35}ab+\frac{29}{21}b^2$$

Ejercicios Resuelve las siguientes adiciones de polinomios

1. $\left(3x^3-6+x-2x^2\right)+\left(x^4-x^3+3x^2+2\right)=$ *R.* $x^4+2x^3+x^2+x-4$

$x^4+2x^3+x^2+x-4$

2. $\left(2ab^2-3a^2b+3ab\right)+\left(4a^3+3a^2b+2ab^2\right)=$

$4a^3+3a^2b+4ab^2$

3. $(ax - ay + az) + (-5ax - 6az - 7ay) + (8az + 9ay + 4ax) =$ *R.* $ay + 3az$

$ay + 3az$

4. $(2ab - 3a^2 - 5b^2) + (4a^2 + 3ab + 2b^2) + (-2a^2 - b^2 + 3ab) =$

$-a^2 + 8ab - 4b^2$

5. $\left(x^2 - \frac{1}{2}xy\right) + \left(\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{4}xy\right) + \left(-\frac{1}{4}xy - 2y^2\right) =$ *R.* $x^2 - xy - \frac{5}{3}y^2$

$x^2 - xy - \frac{5}{3}y^2$

6. $\left(\frac{1}{2}q^2 - \frac{3}{4}p^2 - \frac{2}{5}pq\right) + \left(\frac{1}{6}q^2 - \frac{1}{4}pq\right) + \left(\frac{1}{3}q^2 + \frac{1}{4}p^2\right) =$

$-\frac{1}{2}p^2 - \frac{13}{20}pq + q^2$

3. Calcula la resta de $\left(11a^3 - 12ab^2 + 10b^3\right) - \left(6a^3 + 2a^2b - 5ab^2 + 13b^3\right)$

Solución

$$\left(11a^3 - 12ab^2 + 10b^3\right) - \left(6a^3 + 2a^2b - 5ab^2 + 13b^3\right)$$

$$= \underbrace{\left(11a^3 - 12ab^2 + 10b^3\right)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{\left(6a^3 + 2a^2b - 5ab^2 + 13b^3\right)}_{\text{sustraendo}}$$

$$= \left(11a^3 - 12ab^2 + 10b^3\right) + \underbrace{\left(-6a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - 13b^3\right)}_{\text{Los signos en el sustraendo cambian}}$$

$$= \left(11a^3 - 6a^3\right) + \left(-2a^2b\right) + \left(-12ab^2 + 5ab^2\right) + \left(10b^3 - 13b^3\right)$$

$$= 5a^3 - 2a^2b - 7ab^2 - 3b^3$$

4. Calcula la resta de $\left(\frac{1}{3}a^x - 2ab^y + \frac{1}{2}b^y\right) - \left(a^x - \frac{2}{3}ab^y + \frac{1}{4}b^y\right)$

Solución

$$\left(\frac{1}{3}a^x - 2ab^y + \frac{1}{2}b^y\right) - \left(a^x - \frac{2}{3}ab^y + \frac{1}{4}b^y\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}a^x - 2ab^y + \frac{1}{2}b^y\right) + \left(-a^x + \frac{2}{3}ab^y - \frac{1}{4}b^y\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}a^x - a^x\right) + \left(-2ab^y + \frac{2}{3}ab^y\right) + \left(\frac{1}{2}b^y - \frac{1}{4}b^y\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1\right)a^x + \left(-2 + \frac{2}{3}\right)ab^y + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)b^y$$

$$= \left(\frac{1-3}{3}\right)a^x + \left(\frac{-6+2}{3}\right)ab^y + \left(\frac{2-1}{4}\right)b^y$$

$$= -\frac{2}{3}a^x - \frac{4}{3}ab^y + \frac{1}{4}b^y$$

Ejercicios Resuelve las siguientes sustracciones de polinomios

1. $\left(5a^3-6a^2+a-5\right)-\left(6a^2+2a+1+5a^3\right)=$ *R.* $-12a^2-a-6$

$-12a^2-a-6$

2. $\left(2x^3+2x-8x^2+3\right)-\left(4x^4-6x^2+2x-8\right)=$

$-4x^4+2x^3-2x^2+11$

3. $\left(5x^2y-8xy^2+y^9\right)-\left(x^3-xy^2+2y^9\right)=$ *R.* $-y^9-7xy^2+5x^2y-x^3$

$-y^9-7xy^2+5x^2y-x^3$

4. $\left(\frac{1}{2}q^2-\frac{3}{4}p^2-\frac{2}{5}pq\right)-\left(\frac{1}{6}q^2-\frac{1}{4}pq\right)=$

$\frac{1}{3}q^2-\frac{3}{20}pq-\frac{3}{4}p^2$

Suma y resta combinadas. Resuelve las siguientes sumas y restas de polinomios

1. $\left(3u^3+5u-1\right)+\left(5u^3-2u^2+8\right)-\left(-5u^3+6u^2+5u+6\right)=$ *R.* $13u^3-8u^2+1$

$13u^3-8u^2+1$ ✓

2. $\left(2x^3+2x-8x^2+3\right)+\left(3x^2-x^3+2x\right)-\left(4x^4-6x^2+2x-8\right)=$

$-4x^4+x^3+x^2+2x+11$ ✓

3. $\left(5a^2b-8ab^2+b^9\right)-\left(a^3-ab^2+2b^9\right)+\left(a^3-b^9\right)=$ *R.* $5a^2b-7ab^2-2b^9$

$5a^2b-7ab^2-2b^9$ ✓

❑ Multiplicación de monomios y polinomios

Multiplicación de monomios

> La multiplicación de monomios se lleva a cabo multiplicando entre si los coeficientes numéricos y sus partes literales teniendo en cuenta las leyes de los exponentes.

Ejemplos

a) $\left(2a^2b\right)\left(-3ab^5\right)=2(-3)a^{2+1}b^{1+5}=-6a^3b^6$

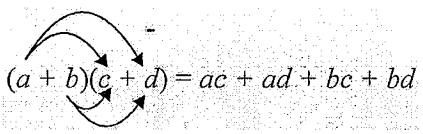
b) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)\left(9x^3y^2\right)=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{1}\right)x^{1+3}y^{2+2}=6x^4y^4$

Multiplicación de polinomios

> Para obtener el producto de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario utilizar varias veces la propiedad distributiva.

$$(a+b)(c+d)=c(a+b)+d(a+b)=ac+ad+bc+bd$$

Esto es equivalente a multiplicar cada uno de los términos de un factor por cada uno de los términos del otro factor, y al final sumamos estos productos.



Ejemplos

a) $\left(2x^2\right)(5xy-2)=2x^2(5xy)+2x^2(-2)$

$$=10x^3y-4x^2$$

b) $(2a-1)(3a-5)=2a(3a-5)+(-1)(3a-5)$

$$=6a^2-10a+(-3a+5)$$

$$=6a^2-10a-3a+5$$

$$=6a^2-13a+5$$

c) $2(x-3)\left(x^3+x+2\right)=2\left[x\left(x^3+x+2\right)+(-3)\left(x^3+x+2\right)\right]$

$$= 2\left[x^4 + x^2 + 2x + \left(-3x^3 - 3x - 6\right)\right]$$

$$= 2\left[x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6\right]$$

$$= 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 2x - 12$$

Ejercicios Obtén el producto de las siguientes multiplicaciones.

1. $\left(3x^4\right)\left(2x^3\right) =$ $6x^7$

R. $6x^7$

2. $\left(5r^2\right)\left(-2ru\right)$ $-10r^3u$

3. $\left(3x^2y\right)\left(4x^3y^5\right) =$ $12x^5y^6$

R. $12x^5y^6$

4. $\left(-2a^2b^3\right)\left(4a^3b\right) =$ $-8a^5b^4$

5. $(xy)\left(4x - 3x^2y + y^2\right) =$ $4x^2y - 3x^3y^2 + xy^3$

R. $4x^2y - 3x^3y^2 + xy^3$

6. $\left(x^3 - 3x^2y + 7xy^2\right)\left(2x^3y\right) =$ $2x^6y - 6x^5y^2 + 14x^4y^3$

7. $\left(\frac{2}{3}x^3y^2\right)\left(\frac{1}{9}x - 3x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2\right) =$ $\frac{2}{27}x^4y^2 - 2x^5y^4 + \frac{1}{3}x^3y^4$

R. $\frac{2}{27}x^4y^2 - 2x^5y^4 + \frac{1}{3}x^3y^4$

8. Con relación a la figura mostrada calcula las siguientes áreas:

a) Área del rectángulo mayor

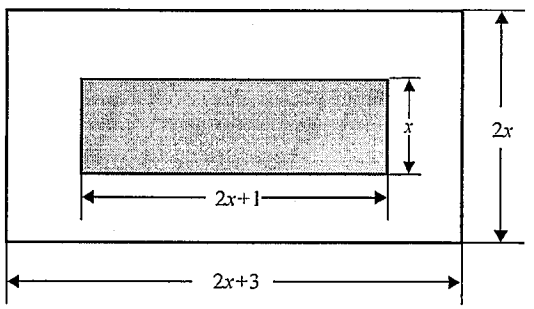
$4x^2 + 6x$

b) Área del rectángulo menor

$2x^2 + x$

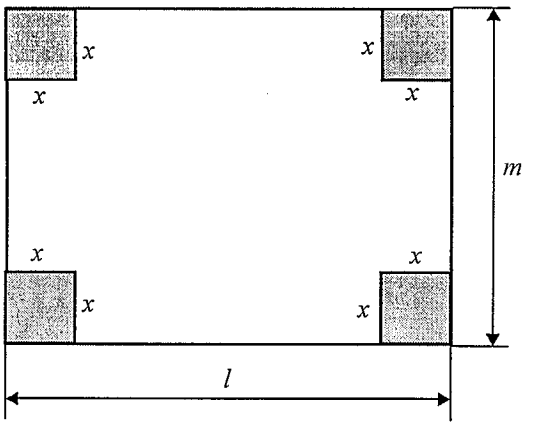
c) Área pintada de blanco

$2x^2 + 5x$



9. Calcula el área de la cruz pintada en blanco.

$A = lm - 4x^2$



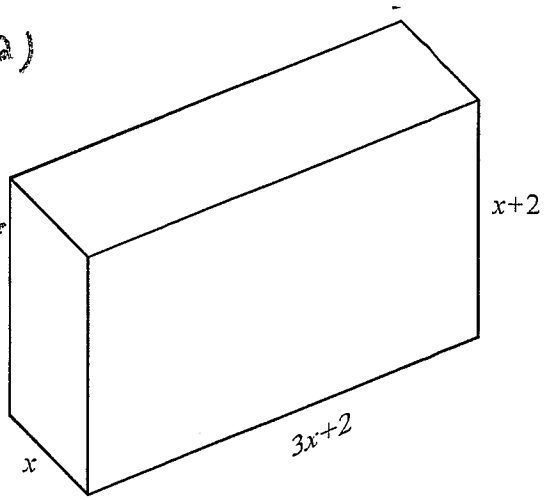
10. ¿Cómo se calcularia el volumen de la figura mostrada?

Volumen = $x(x+2)(3x+2)$

$= (x^2 + 2x)(3x+2)$

$= 3x^3 + 2x^2 + 6x^2 + 4x$

$= 3x^3 + 8x^2 + 4x$



División de polinomios

Ejemplo 1 División de monomio entre monomio

a) $\left(9a^2b^3\right)\div\left(-3ab^2\right)=\dfrac{9a^2b^3}{-3ab^2}=-3a^{2-1}b^{3-2}=-3ab$

b) $\left(-\dfrac{2}{5}a^3\right)\div\left(-\dfrac{1}{5}ab^2\right)=\dfrac{-\frac{2}{5}a^3}{-\frac{1}{5}ab^2}=\dfrac{10a^2}{5b^2}=\dfrac{2a^2}{b^2}$

Ejemplo 2 División de polinomio entre monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio, expresando el resultado como una serie de divisiones de monomios.

$$\left(9x^4y^2-6x^3y^3+4x^2y^4\right)\div\left(3x^2y^2\right)=\frac{9x^4y^2-6x^3y^3+4x^2y^4}{3x^2y^2}$$

$$=\frac{9x^4y^2}{3x^2y^2}-\frac{6x^3y^3}{3x^2y^2}+\frac{4x^2y^4}{3x^2y^2}$$

$$=3x^2-2xy+\frac{4}{3}y^2$$

Ejercicios Realiza cada una de las siguientes divisiones

1. $\dfrac{24x^3y^4}{-6xy^2}=$ $-4x^2y^2$ $-4x^2y^2$	**2.** $\dfrac{x^{b+3}}{x^{b+2}}=$ $x^{b+3-b-2}$ x

3. $\frac{2x^3y^4}{5x^5y^2} =$ $\frac{2}{5}\frac{y^2}{x^2}$ ✓

$\frac{2y^2}{5x^2}$

4. $\left(6a^{x+2}b^x\right) \div \left(3a^x b\right) =$ $2a^2b^{x-1}$ ✓

5. $\left(18x^4y^4 - 13x^3y + 5x^2y\right) \div \left(3x^2y\right) =$ $6x^2y^3 - \frac{13}{3}x + \frac{5}{3}$

R. $6x^2y^3 - \frac{13}{3}x + \frac{5}{3}$

6. $\left(20a^4b - 5a^5 + 8a^7b^2\right) \div \left(4a^2\right) =$ $5a^2b - \frac{5}{4}a^3 + 2a^5b^2$

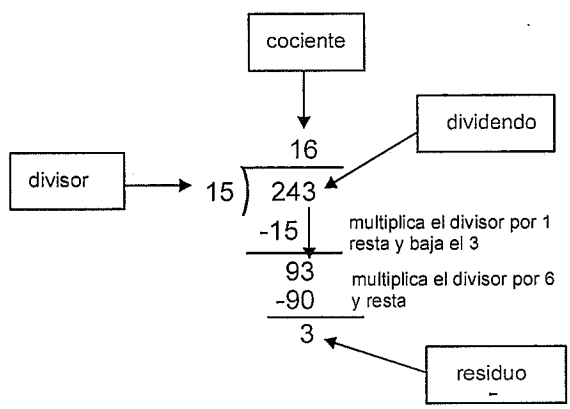
7. $\frac{x^m y + x^{m+1}y^m + 4x^{m-2}y^{m-1}}{x^m y^{m+1}} =$ $\frac{1}{y^m} + \frac{x}{y} + \frac{4}{x^2y^2}$

R. $\frac{1}{y^m} + \frac{x}{y} + \frac{4}{x^2y^2}$

8. $\dfrac{-3u^2v+5uv^5-10v^7}{5uv}=$ $-\frac{3}{5}u+v^4-\frac{2v^6}{u}$

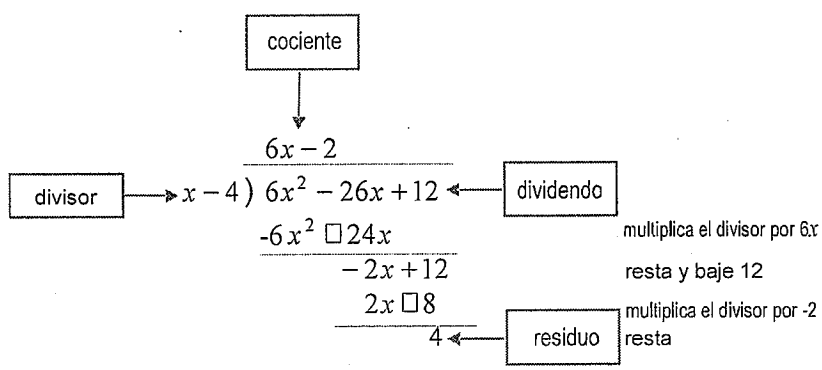
Polinomio entre polinomio

La división entre polinomios se realiza aplicando el algoritmo de la división aritmética, recordemos como es este procedimiento mediante un ejemplo.



La división anterior se puede expresar también como; $\dfrac{243}{15}=16+\dfrac{3}{15}=16+\dfrac{1}{5}$

Con la siguiente ilustración vamos a recordar la división larga de un polinomio entre otro polinomio. *Primero ordenamos el dividendo y el divisor en forma descendente.*



El resultado de la división anterior la podemos escribir como

$$\frac{6x^2-26x+12}{x-4}=6x-2+\frac{4}{x-4}$$

multiplicando por $(x-4)$ ambos lados de la igualdad la división se puede escribir también como

$$6x^2-26x+12=(6x-2)(x-4)+4$$

cuya expresión en forma de polinomios seria $P(x)=q(x)d(x)+r(x)$, donde

$q(x)$ es el cociente de la división, $d(x)$ es el divisor de la división y $r(x)$ es el residuo
Esto ilustra un teorema bien conocido: **el algoritmo de la división.**

Algoritmo de la división

Si $P(x)$ y $d(x)$ son polinomios tales que $d(x)$ no es cero y el grado de $d(x)$ es menor o igual que el grado de $P(x)$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\underbrace{P(x)}_{\text{dividendo}}=\underbrace{d(x)}_{\text{divisor}}\underbrace{q(x)}_{\text{cociente}}+\underbrace{r(x)}_{\text{residuo}}$$

El algoritmo de la división también puede escribirse como: $\frac{P(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$

Ejercicios Efectúa las siguientes divisiones de polinomios:

1. $(4x^3+5x-6)\div(2x-3)=$ *R.* $2x^2+3x+7+\frac{15}{2x-3}$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+5x-6 & 2x-3 \\ \hline -4x^3+6x^2 & 2x^2+3x+7 \\ \hline 6x^2+5x & \\ -6x^2+9x & \\ \hline 14x-6 & \\ -14x+21 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$2x^2+3x+7+\frac{15}{2x-3}$$

2. $\left(20a^4-5a^3+8a-3\right)\div\left(4a^2-3\right)=$

$5a^2-\frac{5}{4}a+\frac{15}{4}$

$4a^2-3 \;\big|\; 20a^4-5a^3+8a-3$

$-20a^4+15a^2$

$-5a^3+15a^2+8a-3$

$5a^3-\frac{15}{4}a$

$15a^2+\frac{17}{4}a-3$

$-15a^2+\frac{45}{4}$

$\frac{17}{4}a+\frac{33}{4}$

$5a^2-\frac{5}{4}a+\frac{15}{4}+\frac{\frac{17}{4}a+\frac{33}{4}}{4a^2-3}$

3. $\left(x^2-y^2\right)\div\left(x-y\right)=$ *R.* $x+y$

$x+y$

$x-y \;\big|\; x^2-y^2$

$-x^2+xy$

$xy-y^2$

$-xy+y^2$

0

$x+y$

4. $\left(5a^3-2a^2+3a-4\right)\div\left(a^2-2a+1\right)=$

$5a+8$

$a^2-2a+1 \;\big|\; 5a^3-2a^2+3a-4$

$-5a^3+10a^2-5a$

$8a^2-2a-4$

$-8a^2+16a-8$

$14a-12$

$5a+8+\frac{14a-12}{a^2-2a+1}$

5. $\left(x^6-2x^5+6x^3-7x^2-4x+6\right)\div\left(x^4-3x^2+2\right)=$

R. x^2-2x+3

x^4-3x^2+2

$x^2-2x+3\overline{)x^6-2x^5+6x^3-7x^2-4x+6}$

$-x^6+2x^5-3x^4$

$-3x^4+6x^3$

$3x^4-6x^3+9x^2$

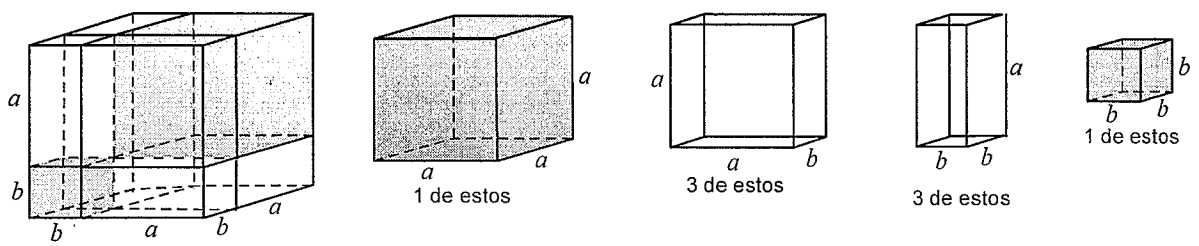
$2x^2-4x$

$-2x^2+4x-6$

0

x^4-3x^2+2

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION

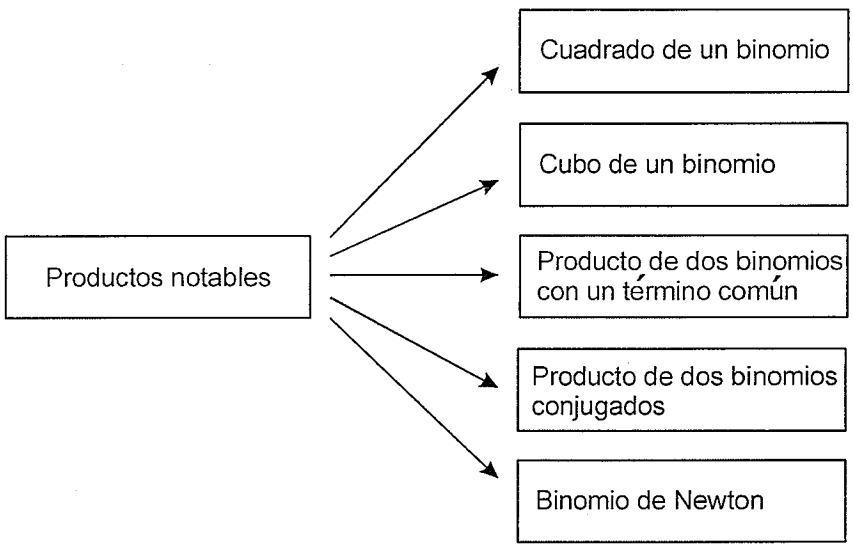


$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Los productos notables son fórmulas para obtener productos de multiplicaciones de una manera mas rápida y eficiente, esto con tan solo abreviar la aplicación del algoritmo normal estudiado en secciones anteriores.

Estas fórmulas son transformaciones algebraicas que con la utilización adecuada de las propiedades de los números reales, nos permiten obtener las relaciones que generan los productos correctos para la operación que definen.

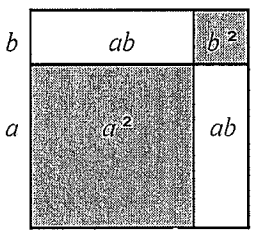
En esta parte del curso veremos algunas expresiones algebraicas cuyos productos pueden obtenerse a partir de una regla general, sin tener que realizar la multiplicación directa. Estos procesos generales se reconocen como **productos notables**.



Cuadrado de un binomio

Observa la figura de la derecha y fíjate que el área es;

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Esta interpretación geométrica de elevar un binomio al cuadrado se puede enunciar algebraicamente de la siguiente manera

$$\underbrace{(a+b)^2}_{a+b \text{ al cuadrado}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{cuadrado del} \\ \text{primer termino}}} + \underbrace{2ab}_{\substack{\text{Doble del primer} \\ \text{termino por el segundo}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{Cuadrado del} \\ \text{segundo termino}}}$$

Ejemplos Utilización de la regla para elevar un binomio al cuadrado

a) $(x+3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$
$= x^2 + 6x + 9$

b) $(2a-3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(-3b) + (-3b)^2$
$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$

c) $\left(a^x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(a^x\right)^2 + 2\left(a^x\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2$
$= a^{2x} - \frac{4}{3}a^x + \frac{4}{3}$

d) $(x+2y-z)^2=[(x+2y)-z]^2=(x+2y)^2+2(x+2y)(-z)+(-z)^2$

$$=x^2+4xy+4y^2-2xz-2yz+z^2$$

La regla anterior es muy útil para facilitar el cálculo de cuadrados numéricos y que no tenemos una calculadora a nuestro alcance, veamos dos ejemplos.

$$(23)^2=(20+3)^2=(20)^2+2(20)(3)+(3)^2=400+120+9=529$$

$$(28)^2=(30-2)^2=(30)^2+2(30)(-2)+(-2)^2=900-120+4=784$$

Los ejemplos nos enseñan que el producto que obtenemos al elevar un binomio al cuadrado, está formado por tres términos, el primero y el tercer términos son el cuadrado de cada uno de los términos del binomio y el segundo es el doble producto de estos. Un trinomio con estas características se llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Ejercicios Desarrolla cada una de las expresiones siguientes.

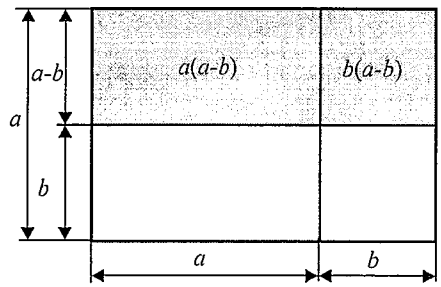
1. $(x-3)^2=$	**2.** $(u+5)^2=$
3. $(2x+1)^2=$	**4.** $(2a-3)^2=$

5. $(x+2y)^2 =$	**6.** $(3x-2y)^2 =$
7. $\left(3a-\frac{3}{2}\right)^2 =$	**8.** $\left(4x^2-3x\right)^2 =$
9. $(x+2y-3)^2 =$	**10.** $(m+2r-3)^2 =$

Producto de dos binomios conjugados

Encuentra el área de la región sombreada en la siguiente figura realizando la operación indicada.

$A = a(a-b) + b(a-b) =$



Fíjate en la figura que la multiplicación anterior es equivalente a multiplicar $(a+b)(a-b)$,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2 .$$

Los binomios como los anteriores se llaman **conjugados** porque tienen dos términos que son exactamente iguales y los otros dos difieren solo en el signo y como viste en las multiplicaciones anteriores su **producto es la diferencia de sus cuadrados**.

> **Regla**: El producto de dos binomios conjugados da como resultado la diferencia de los cuadrados de sus términos

Ejemplos Productos de binomios conjugados

a) $(a+3)(a-3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$

b) $(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

c) $(3x-5y)(3x+5y) = (3x)^2 - (5y)^2 = 9x^2 - 25y^2$

d) $\left(\frac{1}{2}a^x + \frac{2}{3}b^y\right)\left(\frac{1}{2}a^x - \frac{2}{3}b^y\right) = \left(\frac{1}{2}a^x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}b^y\right)^2 = \frac{1}{4}a^{2x} - \frac{4}{9}b^{2y}$

c) $(2a+3b-c)(2a+3b-c) = (2a+3b)^2 - (c)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 - c^2$

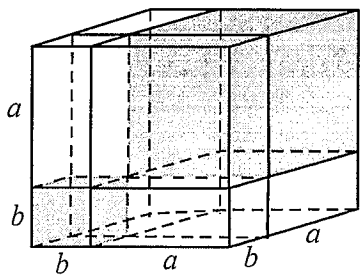
Ejercicios Desarrolla cada una de las expresiones siguientes.

1. $(x-7)(x+7)=$	**2.** $(x+11)(x-11)=$
3. $(u-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=$	**4.** $(3x-7)(3x+7)=$
5. $(5x-4)(-5x-4)=$	**6.** $(2x^n-7)(2x^n+7)=$
7. $\left(3a-\frac{3}{2}\right)\left(3a+\frac{3}{2}\right)=$	**8.** $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{2}x+3\right)=$
9. $(x+2y-3)(x+2y+3)=$	**10.** $(5m+2r-3)(5m+2r+3)=$

Cubo de un binomio

Otro producto notable que de muy útil el recordar es el **cubo de un binomio** cuya regla se obtiene a partir del desarrollo del algoritmo normal de la multiplicación.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$



Este producto recibe el nombre de **cubo perfecto** y la regla la podemos enunciar de la siguiente manera

Cubo de un binomio:

El cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primero por el segundo término, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.

Ejemplos Uso de la regla para elevar un binomio al cubo

a) $(2a+3b)^3 = (2a)^3+3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2+(3b)^3$

$$= 8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$$

b) $(x-2y)^3 = x^3+3x^2(-2y)+3x(-2y)^2+(-2y)^3$

$$= x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$$

c) $\left(2a^2+\frac{1}{2}b\right)^3 = \left(2a^2\right)^3+3\left(2a^2\right)^2\left(\frac{1}{2}b\right)+3\left(2a^2\right)\left(\frac{1}{2}b\right)^2+\left(\frac{1}{2}b\right)^3$

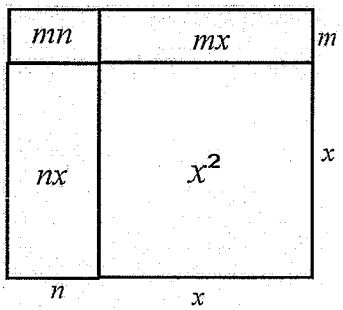
$$= 8a^6+6a^4b+\frac{3}{2}a^2b^2+\frac{1}{8}b^3$$

Ejercicios Desarrolla cada una de las expresiones siguientes.

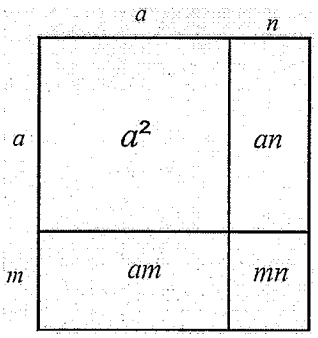
1. $(x+7)^3 =$
2. $(2u-5v)^3 =$
3. $(5x^2-4y^4)^3 =$
4. $\left(3a+\frac{3}{2}\right)^3 =$
5. $(0.25x^2-0.05x)^3 =$

Producto de dos binomios con un término común

Calcular el área de cada uno de los siguientes rectángulos



$A_1 =$



$A_2 =$

En ambos casos habrás observado que hay un elemento común al sumar las áreas de cada región en las que están divididos los rectángulos. Es decir

$$A_1 = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m+n)x + mn$$
$$A_2 = a^2 + am + an + mn = a^2 + (m+n)a + mn$$

El cálculo de este tipo de productos reciben el nombre de **binomios con un término común** y la regla la podemos enunciar de la siguiente manera.

Producto de dos binomios con un término común:

Cuadrado del común, mas la suma de los no comunes por el común mas el producto de los no comunes.

Ejemplos Aplicación de la regla del producto de dos binomios con un término común.

a) $(x+7)(x-5) = x^2 + (7-5)x + (7)(-5) = x^2 + 2x - 35$

b) $(2a+3)(2a-5) = (2a)^2 + (3-5)(2a) + (3)(-5) = 4a^2 - 4a - 15$

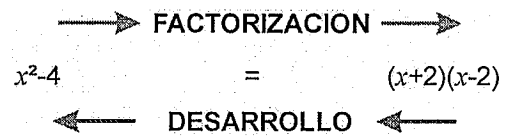
c) $\left(2x^3 - \frac{1}{2}\right)\left(2x^3 + \frac{2}{3}\right) = \left(2x^3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\left(2x^3\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 4x^6 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$

Ejercicios Desarrolla cada una de las productos siguientes.

1. $(x-3)(x+5)=$	**2.** $(u+5)(u-9)=$
3. $(2u+3)(x+2)=$	**4.** $(3x-7)(3x+2)=$
5. $(5x-4)(5x+3)=$	**6.** $(2x^n-7)(2x^n+3)=$
7. $\left(3a-\frac{3}{2}\right)\left(3a+\frac{1}{2}\right)=$	**8.** $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)=$
9. $(x^m+2y)(x^m+3y)=$	**10.** $(5m+2r)(5m+r)=$

FACTORIZACION

Cuando utilizamos la propiedad distributiva de las expresiones en sentido inverso al desarrollo de la multiplicación o de los productos notables lo que estamos realizando es un proceso que se llama **factorización**. Por ejemplo, escribimos



Factor común en un polinomio

A continuación compara las multiplicaciones con los factores y observa si puedes descubrir un patrón de comportamiento

Producto	Factores
$3(x+y)=3x+3y$	$3x+3y=3(x+y)$
$2a(x+3)=2ax+6a$	$2ax+6a=2a(x+3)$

Lo que nos enseñan los ejemplos anteriores es que tenemos que hallar un factor común a todos los términos de la expresión y que para poder factorizar el polinomio completamente es necesario seleccionar el *máximo factor común*, ax^n, donde;

- a es el máximo entero que divide a cada uno de los coeficientes del polinomio y
- n es el mínimo exponente de x en todos los términos del polinomio.

Ejemplos

a) Factorizar $6x^3+18x^2$

Solución

Aquí tenemos que 6 y 18 tienen como factor común más grande a 6 y,

x^3 y x^2 tienen como factor común más grande a x^2, por lo tanto escribimos

$$6x^3+18x^2=6x^2(x+3)$$

Verificamos la multiplicación

$$6x^2(x+3)=6x^3+18x^2$$

b) Factorizar $6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4$

Solución

Aquí tenemos que 6, 8 y 2 tienen como factor común más grande a 2 y

x^3y^2, x^2y^3 y xy^4 tienen como factor común más grande a xy^2, por lo tanto escribimos

$$6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4 = (2xy^2)(3x^2) + (2xy^2)(4xy) + (2xy^2)(-y^2)$$

$$= 2xy^2(3x^2 + 4xy - y^2)$$

Verificamos la multiplicación

$$2xy^2(3x^2 + 4xy - y^2) = 6x^3y^2 + 8x^2y^3 - 2xy^4$$

Ejercicios Factoriza completamente la expresión.

1. $9y - 18 =$	**2.** $-3y - 18 =$
3. $4a^2 + 32 =$	**4.** $3x^3 + 6x^2 + 9x =$
5. $-3x^3 - 18x^6 =$	**6.** $8x^3 + 4x^2 - 16x =$
7. $5x^7 - 15x^6 + 10x^3 - 20x^2 =$	**8.** $3(x+4) - y(x+4) =$
9. $5(y-2) - x(y-2) =$	**10.** $p(x-q) - (x-q) =$

Factorización por agrupación

Un polinomio como x^3+2x^2+3x+6, pareciera que no tiene un factor común, pero si utilizamos la propiedad asociativa y después la distributiva veremos que si es posible, aquí esta como

$$x^3+2x^2+3x+6=\left(x^3+2x^2\right)+\left(3x+6\right)$$ Propiedad asociativa

$$=x^2\left(x+2\right)+3\left(x+2\right)$$ Factor común en cada binomio

$$=\left(x+2\right)\left(x^2+3\right)$$ Propiedad distributiva con el MFC

Ejemplo Factoriza $6x^2+2xy+-9xy-3y^2$

$$6x^2+2xy+-9xy-3y^2=\left(6x^2+2xy\right)+\left(-9xy-3y^2\right)$$ Propiedad asociativa

$$=2x\left(3x+y\right)-3y\left(3x+y\right)$$ Factor común en cada binomio

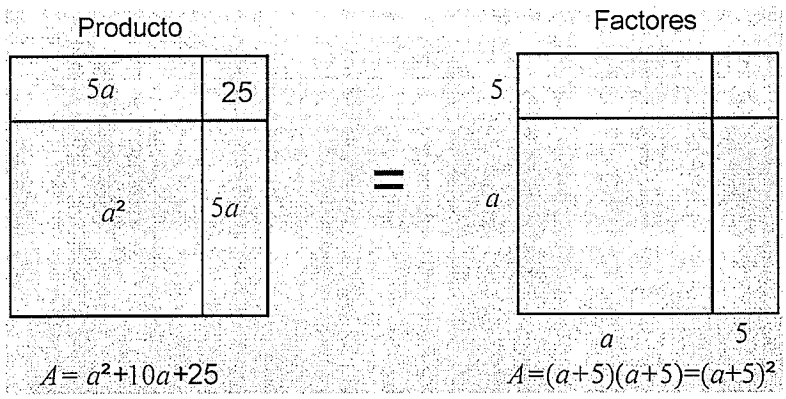
$$=\left(3x+y\right)\left(2x-3y\right)$$ Propiedad distributiva con el MFC

Ejercicios Factoriza por agrupación.

1. $x^3+2x^2+x+2=$ *R.* $(x+2)(x^2+1)$	**2.** $x^3+3x^2+x+3=$
3. $y^3-3y^2+y-3=$ *R.* $(y-3)(y^2+1)$	**4.** $y^3-5y^2+y-5=$
5. $4a^3+6a^2+2a+3=$ *R.* $(2a+3)(2a^2+1)$	**6.** $6x^3+3x^2+2x+1=$
7. $3x^4+12x^2+x^2+4=$ *R.* $(3x^2+1)(x^2+4)$	**8.** $x^2+2y-2x^2-4y=$

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

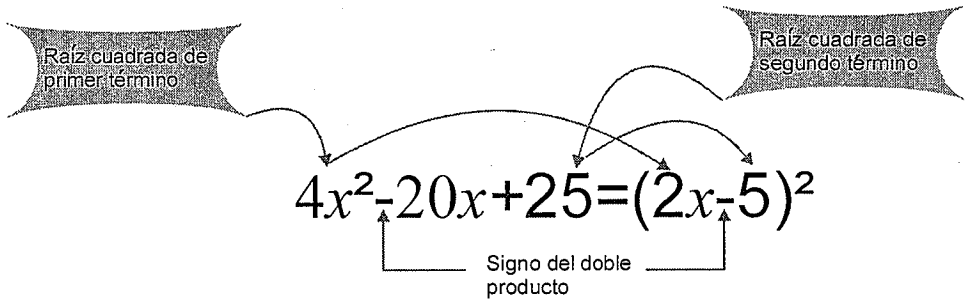
Ve los dos cuadrados dibujados abajo y fíjate que el área esta expresada en dos formas diferentes, pero que evidentemente es exactamente la misma.



El modelo geométrico anterior nos enseña que:

$$a^2 + 10a + 5 = (a+5)^2$$

y que la factorización de un trinomio cuadrado perfecto se puede obtener de la siguiente manera:



Ejemplos Factores de un trinomio cuadrado perfecto

a) $9x^2 + 12xy + 4y^2 = \left(\underbrace{3x}_{\text{Raiz de } 9x^2} + \underbrace{2y}_{\text{Raiz de } 4y^2} \right)^2$

b) $\frac{x^2}{4} - 2xy^2 + 4y^4 = \left(\frac{x}{2} - 2y^2 \right)^2$

Ejercicios Factoriza cada trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 - 6x + 9 =$	**2.** $x^2 + 4x + 4 =$
3. $9y^2 + 42y + 49 =$	**4.** $144y^2 + 144y + 365 =$
5. $16a^2 + 40a + 25 =$	**6.** $x^4 + 2x^2 + 1 =$
7. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^2y^3 + \frac{4}{25}y^6 =$	**8.** $\frac{4x^2}{25} - \frac{4xy^2}{25} + \frac{y^4}{9} =$

Completando un trinomio cuadrado perfecto

La expresión $x^2 + 4x - 8$ evidentemente no es un trinomio cuadrado perfecto pero se puede factorizar parcialmente con tan solo manipular el cero de la siguiente manera.

$$x^2 + 4x - 8 = x^2 + 4x + \underbrace{2^2 - 2^2}_{\substack{\text{2 es la mitad del} \\ \text{coeficiente de } 4x. \\ \text{La resta es 0}}} - 8$$

$$= \underbrace{x^2 + 4x + 2^2}_{\substack{\text{Los primeros tres} \\ \text{terminos son un} \\ \text{trinomio cuadrado} \\ \text{perfecto}}} - 2^2 - 8 = (x+2)^2 - 12$$

Ejemplos Completando un trinomio cuadrado perfecto

a) $x^2 + 6x - 10 = x^2 + 6x + \underbrace{3^2 - 3^2}_{\text{cero}} - 10$

$$= \underbrace{x^2 + 6x + 3^2}_{\substack{\text{Trinomio cuadrado} \\ \text{perfecto}}} - 3^2 - 10 = (x+3)^2 - 19$$

b) $x^2 - 3x + 16 = x^2 - 3x + 16 + \underbrace{2(4)x - 2(4)x}_{cero}$

$$= \underbrace{x^2 - 2(4)x + 16}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} + 2(4)x - 3x$$

$$= (x-4)^2 + 5x$$

Observa que en este ejemplo tenemos dos cuadrados perfectos x^2 y 16, pero sus raíces respectivas por 2 no nos producen el doble producto que necesitamos, por tanto tuvimos que utilizar el cero para completar el doble del primero por el segundo.

c) $4y^2 - 12y - 5 = 4y^2 - 12y + \underbrace{3^2 - 3^2}_{\substack{\text{El 3 es el numero} \\ \text{necesario donde} \\ 12y = 2(3)(2y)}} - 5$

$$= \underbrace{4y^2 - 12y + 3^2}_{\text{TCP}} - 3^2 - 5$$

$$= (2y-3)^2 - 14$$

Ejercicios Completa cada trinomio cuadrado perfecto y factoriza parcialmente.

1. $x^2 - 6x =$ $\qquad R.\quad (x-3)^2 - 9$
2. $4y^2 - y + 16 =$
3. $36a^2 + 48a + 63 =$ $\qquad R.\quad (6a+4)^2 + 47$
4. $a^4 - a + 121 =$

Factores de trinomios de la forma ax^2+bx+c

Para hallar los factores de un trinomio de la forma ax^2+bx+c, con $a\neq 0$, es necesario dividir la situación en dos casos:

$$ax^2+bx+c\begin{cases}\text{cuando } a=1\\ \text{cuando } a\neq 1\end{cases}$$

Caso en que $a=1$. Para factorizar un polinomio cuadrático, de la forma x^2+bx+c, es necesario observar que

$$(x+m)(x+n)=\underbrace{x^2}_{\substack{\text{Produto del}\\ \text{comun}}}+\underbrace{(m+n)x}_{\substack{\text{Suma de los no comunes}\\ \text{por el comun}}}+\underbrace{mn}_{\substack{\text{Producto de los}\\ \text{no comunes}}}$$

donde m y n son números tales que $(m+n)=b$ y $mn=c$.

Ejemplos Factores de x^2+bx+c por ensayo y error.

a) Factorizar $x^2+7x+12$

Solución Aquí $mn=12$ y $m+n=7$; por lo tanto buscamos por ensayo y error factores de 12 cuya suma sea 7.

m	1	2	3
n	12	6	4
Suma	13	8	7

Entonces, $m=3$ y $n=4$ son los factores de 12 cuya suma es 7. Por tanto

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$$

b) Factoriza $y^2-8y+15$

Solución Aquí $mn=15$ y $m+n=-8$; por lo tanto buscamos por ensayo y error factores de 15 cuya suma sea -8.

m	-1	-3
n	-15	-5
Suma	-16	-8

Entonces, $m=-3$ y $n=-5$ son los factores de 15 cuya suma es -8. Por tanto

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$$

Caso en que $a \neq 1$. Para factorizar un polinomio cuadrático, de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 1$ es necesario encontrar factores de la forma $px + m$ y $qx + n$, donde

$$ax^2 + bx + c = (px + n)(qx + m) = pqx^2 + (pn + qm)x + mn$$

donde p, q, m y n son números tales que $pq = a$, $(pn + qm) = b$ y $mn = c$.

Ejemplos Factores de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error.

a) Factorizar $6x^2 + 7x - 5$

Solución Aquí $pq = 6$, $pn + qm = 7$ y $mn = -5$; por lo tanto buscamos por ensayo y error los valores anteriores

pq	mn	$pn + qm$
$(6)(1)$	$(-1)(5)$	$(6)(5) + (1)(-1) = 29$
$(3)(2)$	$(5)(-1)$	$(3)(-1) + (2)(5) = 7$

Entonces, $p = 3$, $q = 2$, $m = 5$ y $n = -1$. Por tanto

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

Ejercicios Factoriza cada una de las siguientes expresiones.

1. $x^2 + 8x + 15 =$	**2.** $x^2 + 9x + 8 =$
3. $y^2 + y - 30 =$	**4.** $y^2 - 13y + 40 =$
5. $a^2 + 11a - 26 =$	**6.** $x^4 + 2x^2 - 8 =$

7. $x^{2m} - 2x^{m} - 8 =$
8. $5y^2 + 4y - 12 =$
9. $4a^2 + 12a + 9 =$
10. $4t^2 - 12t + 9 =$
11. $2x^2 - 7x - 4 =$
12. $5t^2 + 7t + 2 =$
13. $4x^2 - 4x - 3 =$

Factores de una diferencia de cuadrados

Hemos de recordar que el resultado de multiplicar dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados por tanto al factorizar una diferencia de cuadrados el proceso es inverso, es decir;

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; entonces $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Ejemplos Factorizando una diferencia de cuadrados

a) $4x^2-9=\left(\sqrt{4x^2}+\sqrt{9}\right)\left(\sqrt{4x^2}-\sqrt{9}\right)=(2x+3)(2x-3)$

b) $16a^4-b^6=\left(4a^2+b^3\right)\left(4a^2-b^3\right)$

c) $(x+y)^2-y^2=[(x+y)+y][(x+y)-y]=x(x+2y)$

d) $6a^2-6=6\left(a^2-1\right)=6(a+1)(a-1)$

Ejercicios Factoriza cada una de las siguientes expresiones.

1. $25x^2-16=$	**2.** $-81x^2+4y^2=$
3. $625a^2-64=$	**4.** $4y^{2x}-47=$
5. $(2y-3)^2-36=$	**6.** $1-x^4=$
7. $16b-36b^5=$	**8.** $x^3-x=$

Factores de sumas y diferencias de cubos

Para factorizar expresiones como a^3+b^3 o a^3-b^3 es necesario recordar las divisiones entre polinomios. Por ejemplo

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2 \qquad \text{por tanto} \qquad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

De la misma manera;

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2 \qquad \text{luego} \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Ejemplos Factorizando sumas y diferencias de cubos.

a) $27a^3+8=(3a)^3+2^3=(3a+2)\left[(3a)^2-(3a)(2)+(2)^2\right]$

$$=(3a+2)(9a^2-6a+4)$$

b) $x^6-64=\left(x^2\right)^3-4^3=\left(x^2-4\right)\left[\left(x^2\right)^2+\left(x^2\right)(4)+(4)^2\right]$

$$=\left(x^2-4\right)\left(x^4+4x^2+16\right)$$

Ejercicios Factoriza cada una de las siguientes expresiones.

1. $125x^3-1=$	**2.** $-81x^3+y^3=$
3. $a^3+27=$	**4.** $a^3-27=$
5. $x^6-64=$	**6.** $x^6-y^6=$

Factores de un cubo perfecto

Para factorizar un cubo perfecto solo debemos analizar que el polinomio que deseamos factorizar contenga; el primer término al cubo, el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, el triple producto del primero por el cuadrado del segundo y el cubo del segundo, es decir;

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

Ejemplos Factores de un cubo perfecto.

a) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = (2x)^3 + 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 + (3)^3$

$= (2x+3)^3$

b) $8a^6 - 36a^4b^3 + 54a^2b^6 - 27b^9 = \left(2a^2\right)^3 + 3\left(2a^2\right)^2\left(-3b^3\right) + 3\left(2a^2\right)\left(-3b^3\right)^2 + \left(-3b^3\right)^3$

$= \left(2a^2 - 3b^3\right)^3$

Ejercicios Factoriza cada una de las siguientes expresiones.

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$	**2.** $x^3 - 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 =$
3. $8 - 27y^3 - 36y + 54y^2 =$	**4.** $64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3 =$
5. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 =$	**6.** $x^{3n} + 3x^{2n} + 3x + 1 =$

Factorizando completamente una expresión algebraica

A veces al factorizar un polinomio la expresión resultante puede nuevamente factorizarse, y entonces es conveniente hacerlo para hacer más simple la expresión. A este proceso de factorizar un polinomio hasta que ya no sea posible se le llama **factorización completa**.

Ejemplo Factorización total.

a) $2x^4 - 8x^2 = 2x^2\left(x^2 - 4\right)$ Factor común $2x^2$.

$= 2x^2(x+2)(x-2)$ Factorización de $x^2 - 4$ cómo $(x+2)(x-2)$.

b) $a^5b - ab^5 = ab\left(a^4 - b^4\right)$ Factor común ab.

$= ab\left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 - b^2\right)$ Factorización de $a^4 - b^4$ cómo $\left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 - b^2\right)$.

$= ab\left(a^2 + b^2\right)(a+b)(a-b)$ Factorización de $a^2 - b^2$ cómo $(a+b)(a-b)$.

Ejercicios Factoriza totalmente cada una de las siguientes expresiones.

1. $16x - 36y^5 =$	**2.** $2x^3 - 8xy^5 =$
3. $a^{16} - 81b^8 =$	**4.** $a^4 - 1 =$
5. $1 - y^4 =$	**6.** $x^2 - 10x + 25 - 36y^2 =$

EXPRESIONES FRACCIONARIAS

Cuando tratamos con el cociente de dos expresiones algebraicas, estamos trabajando con una **expresión fraccionaria** en donde el valor del denominador no es cero.

Si el numerador y el denominador de la fracción son polinomios, entonces la fracción se llama **expresión racional**. Por ejemplo

$$\frac{x^3 - 2x + 5}{x - 3}$$

Fíjate que para que nuestra expresión racional tenga sentido, debemos considerar valores para el denominador donde $x \neq 3$.

Simplificación de fracciones

Para simplificar expresiones racionales es conveniente que tanto el numerador como el denominador no tengan factores comunes, por tanto utilizaremos la propiedad básica siguiente:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Ejemplos Simplificación de expresiones racionales.

a) $$\frac{4xy}{2ax^2 + 2x^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot x \cdot y}{2 \cdot x^2 (a + x)}$$

$$= \frac{2y}{x(a + x)}$$

b) $$\frac{1 - a^2}{a^2 + 2a + 1} = \frac{(1 + a)(1 - a)}{(a + 1)(a + 1)}$$

$$= \frac{1 - a}{1 + a}$$

c) $$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{(x + 3)}{(x + 2)}$$

Ejercicios Simplifica cada una de las siguientes expresiones.

1. $\frac{2a^3b^2}{ab^5} =$ *R.* $\frac{2a^2}{b^3} =$	**2.** $\frac{18a^2b^3}{24a^3b^2c} =$
3. $\frac{2a^3k^2}{6a^5bk^7} =$ *R.* $\frac{1}{3a^2bk^5} =$	**4.** $\frac{xy}{3x^2y-3xy^2} =$
5. $\frac{-2xy}{4x^2y+2x^3} =$ *R.* $\frac{-y}{x(2y+x)} =$	**6.** $\frac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2} =$
7. $\frac{x^2-4y^2}{-x^2-4xy-4y^2} =$ $\frac{x-2y}{-x-2y} =$	**8.** $\frac{x^2-3x+2}{2x^2-4x+2} =$
9. $\frac{1-x^2}{x^3-1} =$ $\frac{-x-1}{x^2+x+1} =$	**10.** $\frac{x^2+x-6}{x^2-4} =$
11. $\frac{y-y^2}{y^2-1} =$ $\frac{-y}{y+1} =$	**12.** $\frac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6} =$

Multiplicación de fracciones

La siguiente propiedad es la que utilizamos para multiplicar fracciones y significa que se multiplican sus numeradores y sus denominadores para finalmente simplificar la fracción.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplos Multiplicación de expresiones fraccionarias

a) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{4}{3}$

b) $\frac{3x^2-3x}{x-1}\cdot\frac{x-y}{x}=\frac{3x(x-1)}{x-1}\cdot\frac{x-y}{x}=\frac{3x(x-1)(x-y)}{x(x-1)}=3x-3y$

Ejercicios Simplifica cada una de las siguientes expresiones.

1. $\frac{ax^2}{b^2y}\cdot\frac{a^2b}{x^2y^4}=$

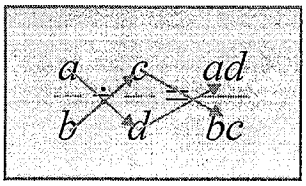
2. $\frac{x-3}{x^2+9}\cdot\frac{x+3}{x^2-9}=$

3. $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\frac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}=$

4. $\frac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2}\cdot\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+0}=$

División de expresiones fraccionarias

Para dividir expresiones fraccionarias, utilizamos la siguiente propiedad de las fracciones.



Esta propiedad en realidad significa que para dividir una fracción por otra, multiplicamos el inverso del divisor por la fracción del numerador.

Ejemplos División de expresiones fraccionarias

a) $\frac{12}{15} \div \frac{10}{3} = \frac{12 \cdot 3}{15 \cdot 10}$

$= \frac{(2 \cdot 2 \cdot 3)(3)}{(3 \cdot 5)(2 \cdot 5)}$

$= \frac{6}{25}$

b) $\frac{x^2 - x}{x} \div \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 - x}{x} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

$= \frac{x(x-1)}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$

$= x + 1$

Ejercicios Simplifica cada una de las siguientes expresiones.

1. $\frac{x^3 y^2}{xy^3} \div \frac{x^2 y^2}{x^5 y} =$
2. $\frac{4a^2 - 9a - 9}{8a^2 - 14a - 15} \div \frac{3a^2 - 7a - 6}{6a^2 - 11a - 10} =$
3. $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x} \div \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x - 3} =$
4. $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 3x + 2} \div \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 0} =$

Suma y resta de expresiones fraccionarias

Para sumar y restar expresiones fraccionarias, primero obtenemos un denominador común (máximo común múltiplo) y a continuación utilizamos la siguiente propiedad de las fracciones.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

El mínimo común denominador (MCD) se obtiene al factorizar cada denominador y tomar el producto de los diferentes factores, utilizando la potencia más elevada que aparezca en cualquiera de los factores.

Ejemplos Suma y resta de expresiones fraccionarias

a) $\frac{2}{6}+\frac{3}{8}=\frac{(4)(2)+(3)(3)}{(3)(8)}$

$=\frac{8+9}{24}=\frac{17}{24}$

El MCD de 6 y 8 es (8)(3)

6	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

$(2^3)(3)=(8)(3)$

b) $\frac{5}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{2x}{x+2}=\frac{5-(x+1)+2x}{x+2}$ El MCD es $x+2$

$=\frac{5-x-1+2x}{x+2}$

$=\frac{x+4}{x+2}$

c) $\frac{2}{1-x}+\frac{3x}{x+2}=\frac{(2)(x+2)+(3x)(1-x)}{(1-x)(x+2)}$ El MCD es $(1-x)(x+2)$

$=\frac{2x+4+3x-3x^2}{(1-x)(x+2)}$

$=\frac{4+5x-3x^2}{(1-x)(x+2)}$

El MCD es $(x-1)(x+1)^2$

d) $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2x}{(x+1)^2}+\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2x}{(x+1)^2}+\dfrac{2x+1}{x+1}$

$$=\frac{(1)(x+1)-2x(x-1)+(2x+1)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-2x^2+2x+(2x+1)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1-2x^2+2x+2x^3-2x+x^2-1}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3-x^2+x}{(x-1)(x+1)^2}$$

Ejercicios Resuelve cada una de las siguientes sumas y restas.

1. $\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}=$	*R.* $\dfrac{5x+1}{(x+5)(x-3)}$
2. $\dfrac{3-x}{x+5}+\dfrac{2x+3}{x+5}=$	
3. $\dfrac{3a}{2b}+\dfrac{2b}{5a}=$	*R.* $\dfrac{15a^2+4b^2}{10ab}$

4. $\dfrac{3-a}{(a+3)(a-4)}+\dfrac{a}{a+3}=$

5. $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}=$ *R.* $\dfrac{x-2}{(x+3)(x-3)}$

6. $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-9}=$

7. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x-2}=$ *R.* $\dfrac{2x^2-x-2}{x^2(x-2)}$

8. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x^2-4}=$

Simplificación de una fracción compuesta

Una fracción compuesta se caracteriza porque contiene fracciones tanto en el numerador como en el denominador y se resuelve con la siguiente propiedad.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

ad ← extremos

bc ← medios

Ejemplos Simplificación de fracciones compuestas

a) $$\frac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}} \cdot \left[\frac{ab}{ab}\right] = \frac{a^2+ab}{ab-b^2}$$

$$= \frac{a(a+b)}{b(a-b)}$$

Método 1
Obtenemos el mínimo común denominador ab de todas las fracciones dentro de la expresión, y enseguida multiplicamos el numerador y el denominador por éste.

b) $$\frac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{a}}$$

$$= \frac{a(a+b)}{b(a-b)}$$

Método 2
Realizamos las operaciones del numerador y del denominador para obtener una sola fraccion y enseguida multiplicamos extremo por extremo y medio por medio.

c) $$\frac{\frac{1}{x+y}-1}{1+\frac{2}{x-y}} = \frac{\frac{1}{x+y}-1}{1+\frac{2}{x-y}} \cdot \left[\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}\right]$$

$$= \frac{x-y-(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)+2(x+y)}$$

$$= \frac{(x-y)(1-x-y)}{(x+y)(x-y+2)}$$

Multiplicamos y dividimos tanto el numerador como el denominador por el mínimo común denominador $(x+y)(x-y)$ y luego simplificamos.

Ejercicios Simplifica las siguientes expresiones.

1. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}=$ *R.* $-xy$

2. $1-\dfrac{1-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}+1}=$

3. $\dfrac{1-\dfrac{1}{x+y}}{1+\dfrac{1}{x+y}}=$ *R.* $\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$

4. $\dfrac{\dfrac{x-y}{x}-\dfrac{x+y}{y}}{\dfrac{x-y}{y}-\dfrac{x+y}{x}}=$

5. $\dfrac{\dfrac{5}{a-1}-\dfrac{2}{a+1}}{\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}}=$ *R.* $\dfrac{3a+7}{a^2+2a-1}$

Teorema del residuo

Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $x-k$, entonces el residuo es $r=P(k)$

El significado del teorema es que si evaluamos el polinomio en $x=k$, entonces el resultado va a ser el residuo de la división.

De acuerdo con el algoritmo de la división, tenemos

$$P(x)=q(x)(x-k)+r(x)$$

y si evaluamos el polinomio $P(x)$ en $x=k$, comprobamos el teorema:

$$P(k)=q(k)(k-k)+r(k)=0+r=r$$

Ejemplo. Usando el teorema del residuo evalúa el polinomio $P(x)=3x^3+8x^2+5x-7$ en $x=2$

Utilizando la división sintética tenemos que

-2	3	8	5	-7
		-6	-4	-2
	3	2	1	-9

El residuo es $r=-9$

La conclusión es, por tanto que si en el polinomio sustituimos x por -2, el resultado es $r=-9$.

$$P(-2)=3(-2)^3+8(-2)^2+5(-2)-7=-9$$

Aplicaciones

Sin efectuar la división, Hallar el residuo de dividir

a) x^2-7x+6 entre $x-4$

b) x^3+5x^2+x entre $x+5$

c) $2a^3+6a^2-12a+1$ entre $2a+1$

d) x^4-9x^2-3x+2 entre $x-2$

CALCULO

$$y = x^4 + 5x - 4$$

Contenido

PARTE 1 **LÍMITES DE FUNCIONES**

Límite de una variable

Definición

Métodos para calcular límites

Funciones continuas

PARTE 2 **LA DERIVADA**

Definición

Razón de cambio

Incrementos

Reglas para derivar potencias

Derivada de funciones implícitas

Derivadas de orden superior

PARTE 3 **VALORES EXTREMOS**

Máximos y mínimos relativos de una función

Primer criterio para calcular máximos y mínimos

Segundo criterio para calcular máximos y mínimos y concavidad de una curva

PARTE 4 **LA INTEGRAL**

Integral indefinida y cambio de variable

Cambio de variable

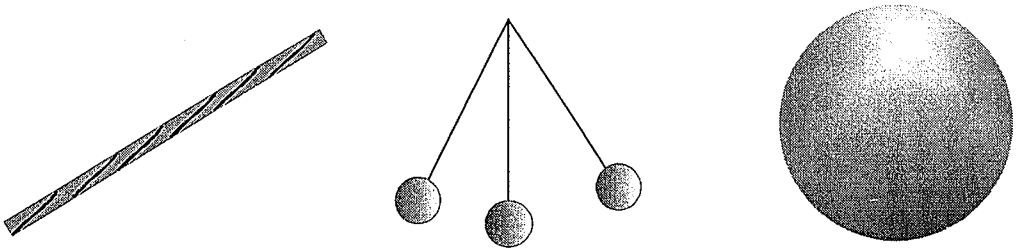
Integral definida

CALCULO

Presentación preliminar

El concepto de límite es parte fundamental en el desarrollo del cálculo y en términos generales en toda la estructura matemática, para comprenderlo será necesario abrir nuestra mente y hacer uso del razonamiento.

Por ejemplo cuando se estira un cable y este se rompe se dice que este sobrepaso su límite de resistencia, si no hubiera fuerza de fricción un péndulo seguiría oscilando y su movimiento no tendría límite, un globo se revienta cuando alcanza el límite de su capacidad, etc.,



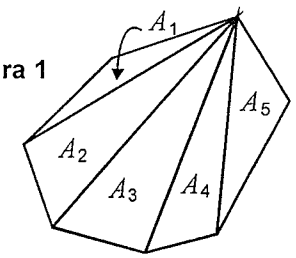


Figura 1

Los orígenes del cálculo se remontan unos 2500 años por lo menos, los antiguos griegos hallaron áreas aplicando el "método del agotamiento". Este técnica consistía en dividir el área A de un polígono en varios triángulos, y luego sumar las áreas de estos triángulos. La figura 1 nos muestra el método.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Evidentemente mucho más difícil era obtener el área de una figura curva. En este caso el método del agotamiento consistía en inscribir y circunscribir polígonos en torno a la figura y a continuación hacer que el número de lados de los polígonos aumentara. La figura 2 nos muestra el método en el caso de un círculo, con polígonos regulares inscritos.

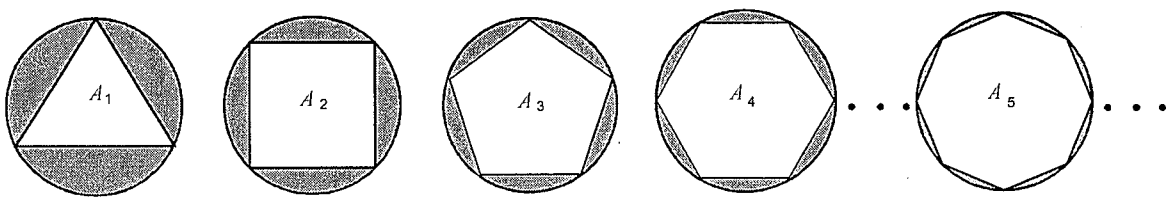


Figura 2

Llamemos A el área del círculo y A_n el área del polígono inscrito con n lados. Al aumentar n indefinidamente, parece que A_n se aproxima cada vez más al área del círculo. Decimos que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos, esta idea se escribe así;

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Es conveniente aclarar que los griegos no aplicaron explícitamente los límites.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Límite de una variable

En general si A es el área del círculo y A_n es el área del enésimo polígono trazado, es decir cuando $n \to \infty$ es fácil concluir que la diferencia $A - A_n$ llega a ser menor que cualquier número positivo pensado de antemano y se llama *límite de una variable.*

Límite de una función

Para calcular y comprender el límite de una función, consideremos la función $f(x)$ definida por la ecuación:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

Es claro que $x \neq 1$ porque la función no está definida para este valor. Enseguida investigaremos valores de la función cuando x esté muy próximo a 1 por la izquierda y por la derecha, es decir; menores y mayores que 1 pero lo más cercanos posible a éste, a esto se le conoce como **límite por la izquierda** y **limite por la derecha** de $f(x)$ y se representan de la siguiente manera

Limite por la izquierda	**Limite por la derecha**
$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$

En la tabla siguiente ilustramos lo que esto significa. Para una total comprensión te sugerimos que calcules los valores de $f(x)$ para los valores dados de x

x se acerca mucho a 1 por la izquierda — x se acerca mucho a 1 por la derecha

x	-2	-0.5	0	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.5	2
$f(x)$	3	$\frac{3}{4}$	1	2.71	2.97	2.997	?	3.003	3.03	3.31	4.75	7

hacia donde se acerca $f(x)$? — hacia donde se acerca $f(x)$?

Comparando ambos lados vemos que $f(x)$ se aproxima a 3 a medida que x se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha.

Lo que nos enseña este experimento es que cuando el límite por la izquierda es igual que el límite por la derecha se dice que el límite existe, es decir en notación simbólica.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$$

Utilizando alguna técnica algebraica el límite anterior puede calcularse de la siguiente manera

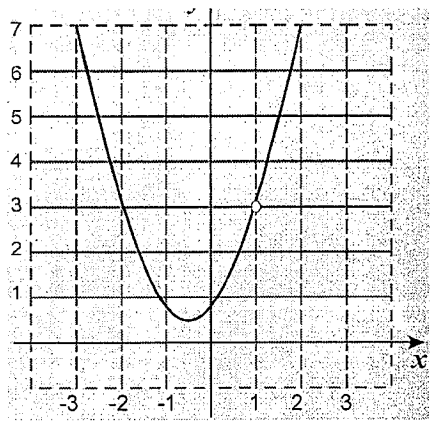
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)$$
$$=1^2+1+1=3$$

Recordar que una diferencia y una suma de cubos se factoriza respectivamente de la siguiente manera

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

El experimento lo podemos apreciar gráficamente en la ilustración mostrada en la parte derecha, el hueco de $f(x)$ cuando $x=1$ significa que la función no está definida en ese punto



$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1},\quad x\neq 1$$

El análisis anterior nos conduce a la siguiente *definición*:

Si $f(x)$ se aproxima arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a a por por la izquierda y por la derecha, decimos que el límite $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y escribiremos

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$

Teoremas fundamentales de los límites

Reglas básicas de límites

Suponer que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y que $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$. Entonces

1. $\lim_{x\to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot L_1$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

3. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$

4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}; \quad L_2 \neq 0$

5. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Las reglas anteriores pueden expresarse como sigue:

1. El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función.

2. El límite de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de los limites.

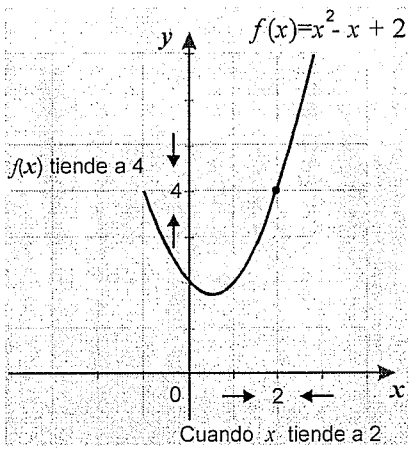
3. El límite de un producto es el producto de los límites

4. El límite de un cociente es el cociente de los límites

5. El límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es $f(a)$

Métodos para calcular límites

Veamos cómo es el comportamiento de la función $f(x)=x^2-x+2$ para valores muy cercanos a 2 e investiguemos si tiende a un límite. La tabla adjunta nos muestra los cálculos para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.



x tiende a 2 por la izquierda	$f(x)$	x tiende a 2 por la derecha	$f(x)$
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Figura 1

A partir de la tabla y de la gráfica de $f(x)$ que se muestra en la figura 1 es fácil darse cuenta que cuando x se acerca a 2 por la izquierda o por la derecha, $f(x)$ se aproxima al 4 como límite.

Solución analítica

Algebraicamente y utilizando la *regla 5* el límite de $f(x)=x^2-x+2$ cuando x tiende a 2 puede expresarse y calcularse de la siguiente manera.

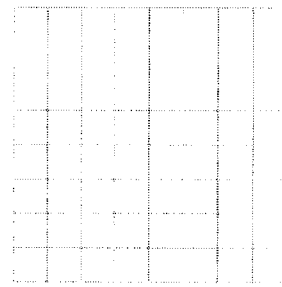
$$\lim_{x\to 2}(x^2-x+2)=f(2)=2^2-2+2=4$$

Observa que cuando una función está definida para un valor específico de x en su gráfica se marca el punto $[x,f(x)]$ con un círculo relleno

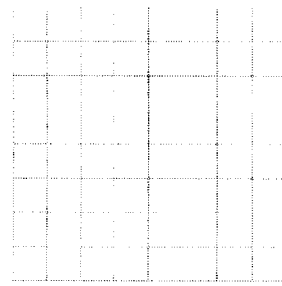
EJERCICIOS

Calcula cada uno de los siguientes límites usando la regla 5. Se te sugiere trazar la gráfica.

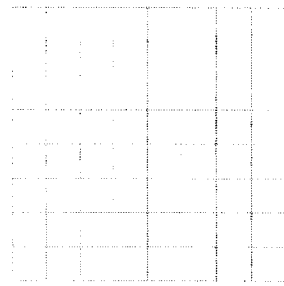
1. $\lim_{x\to 2}(x^2-2)=$ $(2)^2-2=2$



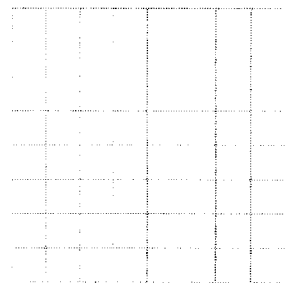
2. $\lim_{x\to -3}(x+2)=$ $-3+2=-1$



3. $\lim_{x\to 1}(x^2-x-2)=$ $(1)^2-1-2=-2$



4. $\lim_{x\to 0}x^2-x+2=$ $(0)^2-0+2=2$



Límites de funciones racionales

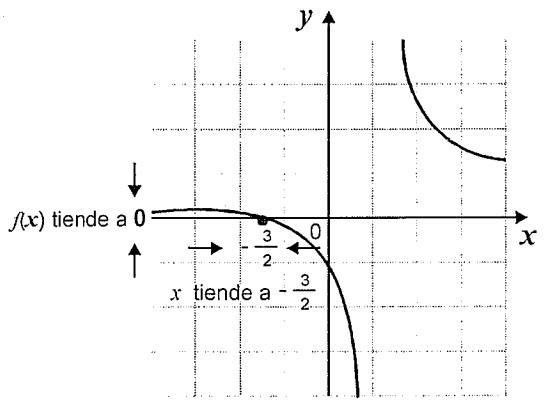
Ejemplo 1. Calcular $\lim_{x\to -\frac{3}{2}} \dfrac{2x+3}{3x-4}$, utilizando la *regla 5*

Solución

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{2x+3}{3x-4} = f\left(-\frac{3}{2}\right), \text{ porque } f$$

está definida en $x = -\dfrac{3}{2}$, entonces

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{2x+3}{3x-4} = \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)+3}{3\left(-\frac{3}{2}\right)-4} = 0$$



Ejemplo 2. Hallar $\lim_{x\to -1} \dfrac{6x-3}{2x-4}$ utilizando la *regla 5.*

Solución

$$\lim_{x\to -1} \frac{6x-3}{2x-4} = f(-1)$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{6x-3}{2x-4} = \frac{6(-1)-3}{2(-1)-4} = \frac{3}{2}$$

Una función racional es de la forma

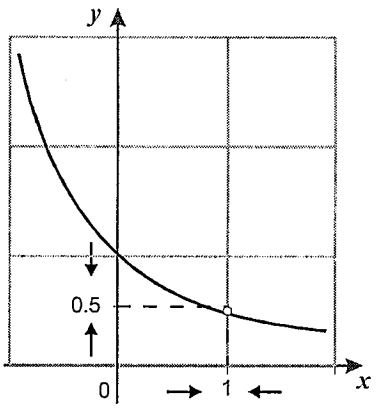
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}; \quad q(x) \neq 0$$

donde p y q son polinomios

Ejemplo 3. Encuentra el valor de $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

Solución. Observa que la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ no está definida para $x = 1$, sin embargo recuerda que la definición de límite nos dice que se consideren valores cercanos a 1 por la izquierda y por la derecha y si en ambos casos el límite es el mismo, entonces este existe. Con base en los valores de las tablas adjuntas conjeturamos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=0.5$$



$x<1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x>1$	$f(x)$
1.5	0.40000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

Solución analítica. En estos casos nos valemos de alguna técnica algebraica para poder calcular el límite, aquí está como

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0.5$$

Recuerda que la diferencia de dos cuadrados se factoriza así

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Ejemplo 4. Encuentra el valor de $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$

Solución: Como x no está definida para –3 entonces observando la expresión es fácil darse cuenta que el numerador puede factorizarse y obtener el límite

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-4)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to -3}(x-4)=-3-4=-7$$

Un trinomio como x^2-x-12 es de la forma

$$x^2+bx+c$$

y puede factorizarse multiplicando los binomios $(x+m)(x+n)$, donde

$$m+n=b$$

$$mn=c$$

por tanto en x^2-x-12; $b=-1$; $c=-12$, luego dos números que sumados resulten –1 y multiplicados –12; son 3 y –4 que son m y n respectivamente.

$$x^2-x-12=(x+3)(x-4)$$

EJERCICIOS. Calcula los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0}$ ind.

R. $-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{0}{0}$ ind.

R. -2

$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -2$

3. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(2)^2-1}{2+1} = 1$

R. 1

4. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{0}{0}$ ind.

R. -4

$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = -2-2 = -4$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \dfrac{0}{0}$ ind.

R. -6

$\lim_{x\to -3} (x-3) = -6$

6. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x-4} = \dfrac{(-1)^2+5(-1)+4}{(-1)^2-3(-1)-4} = \dfrac{0}{0}$ ind.

R. $-\frac{3}{5}$

$\lim_{x\to -1} \dfrac{(x+4)(x+1)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x\to -1} \dfrac{x+4}{x-4} = -\dfrac{3}{5}$

7. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x+3} = \dfrac{0}{0}$ ind.

R. -2

$\lim_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(x+1)}{x+3} = -3+1 = -2$

8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^4-16} = \dfrac{0}{0}$ ind.

R. $\frac{1}{8}$

$\lim_{x\to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x^2+4)(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{8}$

9. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \dfrac{0}{0}$ ind.

R: 0

$\lim_{x\to -3} \dfrac{(x+3)^{2}}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{-3+3}{-6} = \dfrac{0}{-6}$

10. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2+x-12}{x^2+6x+8} = \dfrac{0}{0}$ ind.

$\lim_{x\to -4} \dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x+2)} = \dfrac{-7}{-2} = \dfrac{7}{2}$

EJEMPLO 1. Determinar $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Si utilizamos la *regla 5* de los teoremas de límites es evidente que x no está definida para 1, pero para evitar la indeterminación se racionaliza el numerador de la siguiente manera;

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Racionalización. Es el proceso mediante el cual transformamos una fracción que tiene un numerador o denominador irracional a una fracción equivalente con numerador o denominador racional según convenga. Este proceso se lleva a cabo con tan solo multiplicar la fracción por la unidad.

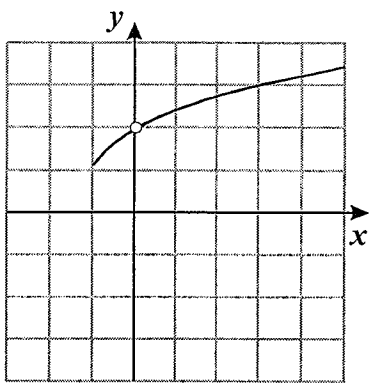
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cuando la cantidad que se va a racionalizar es un binomio, se multiplica y divide por su conjugado

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

EJEMPLO 2. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ y bosquejar su gráfica.



Como la función no está definida para $x=0$ racionalizamos El denominador

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right) = \sqrt{0+1}+1 = 2$$

La gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ se muestra en la figura y puede obtenerse con un programa para graficar o bien tabulando valores en su ecuación.

EJERCICIOS. Probar cada uno de los siguientes límites

1. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{1}{4}$

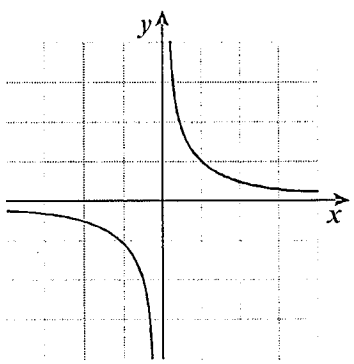
2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-1}=-2$

Cálculo de límites de funciones especiales

EJEMPLO 1. Determinar $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ por medio de tabulación y gráfica



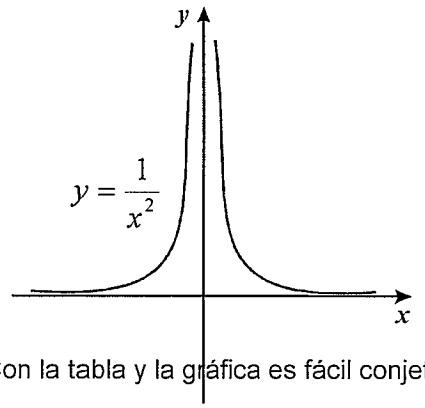
$x<0$	$f(x)$
-0.100000	-10
-0.010000	-100
-0.001000	-1000
-0.000100	-10000
-0.000010	-100000
-0.000001	-1000000
0^-	$-\infty$

$x>0$	$f(x)$
0^+	$+\infty$
0.000001	1000000
0.000010	100000
0.000100	10000
0.001000	1000
0.010000	100
0.100000	10

Conforme $x\to 0$; $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tiende hacia $-\infty$ por la izquierda y hacia $+\infty$ por la derecha, de modo que los valores de $f(x)$ no tienden a un número; por tanto $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ no existe.

El símbolo ∞ significa que estamos hablando de un número muy grande respecto de otro.

EJEMPLO 2. Encuentra $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$



x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

Con la tabla y la gráfica es fácil conjeturar que $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ no existe

EJEMPLO 3. Encuentra $\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10\,000}\right)$

Solución. Utilizando la *regla 5* es fácil encontrar la solución

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10\,000}\right)=0^3+\frac{\cos 5(0)}{10\,000}=\frac{1}{10\,000}=0.0001$$

EJEMPLO 4. . Encuentra $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{3x^2-2x-5}=\frac{2}{3}$

Si usamos la regla 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{3x^2-2x-5}=\infty$$

Entonces para evitar la indeterminación se divide cada termino del numerador y del denominador entre la potencia más grande de x que es x^2. Aquí te mostramos cómo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{3x^2-2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{3-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

EJEMPLO 5. Probar que si, $f(x)=2x^2-4x$ entonces $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x-4$

Primero busquemos $f(x+h)$;

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 2(x+h)^2-4(x+h) \\ &= 2x^2+4xh+2h^2-4x-4h \end{aligned}$$

Enseguida restamos $f(x)$ de $f(x+h)$

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= 2x^2+4xh+2h^2-4x-4h-(2x^2-4x) \\ &= 4xh+2h^2-4h \\ &= h(4x+2h-4) \end{aligned}$$

por tanto

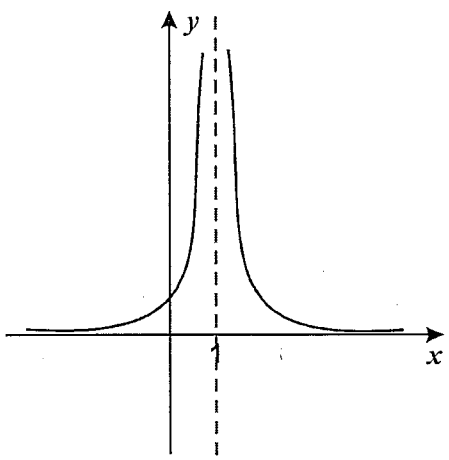
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h-4)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}(4x+2h-4)=4x-4$$

EJERCICIOS.

1. Determinar si existe $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$.

2. Encuentra $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$ por medio de tabulación y gráfica



x	$f(x)$

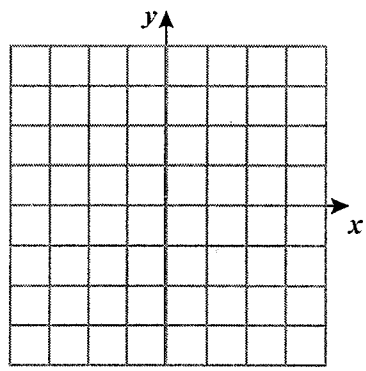
3. Hallar $\lim_{x\to\pi}\left(sen\frac{3x}{2}\right)$. Recuerda que $\pi = 180^0$ R. -1

4. Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{\tan x}$. Recuerda que $\pi = 180^0$. Sugerencia: sustituye $\tan x$ por $\frac{senx}{\cos x}$

5. Hallar $\lim_{x\to\pi}\frac{senx}{\tan x}$. Sugerencia: sustituye $\tan x$ por $\frac{senx}{\cos x}$ R. -1

7. Investiga por medio de tabulación y gráfica si existe $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

x	$f(x)$



8. demostrar que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+2x^2-5}{5x^3-3x+2} = \dfrac{3}{5}$

9. demostrar que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-3x+2} = \dfrac{3}{2}$

Ejercicios 10-12. Determina para cada función, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

10. $f(x)=3x-2$ R. 3

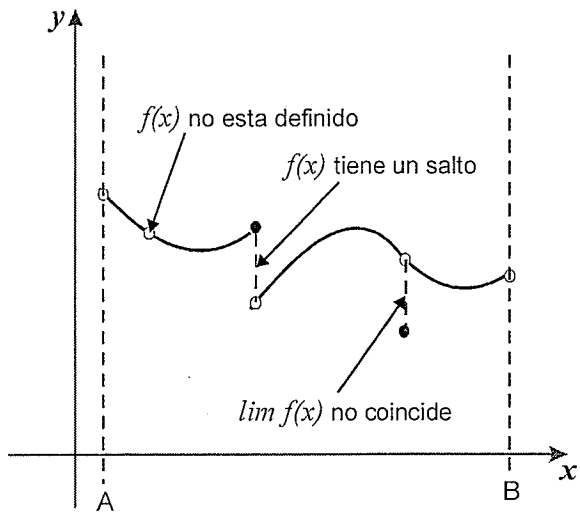
11. $f(x)=x^2-2x+3$

12. $f(x)=\dfrac{3}{2x-3}$ R. $-\dfrac{6}{(2x-3)^2}$

Funciones continuas

En matemáticas el termino continuidad significa lo mismo que en el lenguaje cotidiano. Decir que una función f es continua en $x = a$ debe de entenderse como que su gráfica no sufre interrupción en a, que ni se rompe ni tiene saltos o huecos. Por ejemplo en la figura siguiente se muestran tres valores de x en los que la función no es continua.

En los demás puntos del intervalo (A, B) la gráfica no se interrumpe y decimos que la función es continua en ellos. Por tanto definamos continuidad de una función f como sigue:



Continuidad en un punto: Una función se dice continua en a si se verifican las siguientes condiciones

1. $f(a)$ está definido.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Continuidad en un intervalo abierto: Una función f se dice continua en un intervalo (A, B) si lo es en todos los puntos del intervalo.

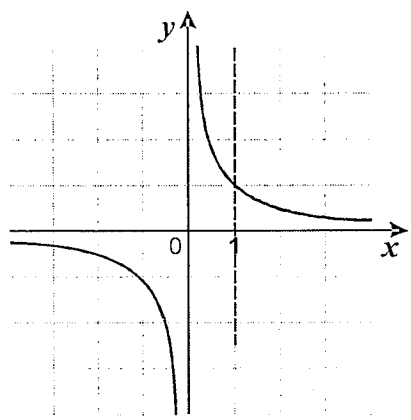
EJEMPLO 1. Verificar si la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $0 < x < 1$

Solución

$f(x)$ está definida en el intervalo

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe en el intervalo

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ en el intervalo



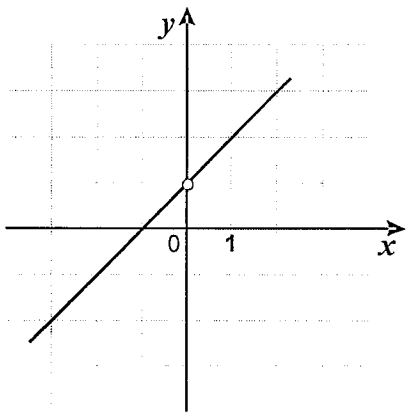
Si trazamos la gráfica vemos que la función cumple las condiciones de continuidad en el intervalo $0 < x < 1$

Es de relevancia observar que la función en $x = 0$ no está definida y como vimos antes el límite ahí no existe cuando x tiende a cero, por tanto la función en ese punto no es continua.

EJEMPLO 2. Determina si la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ es continua; en caso contrario indica en qué punto es discontinua.

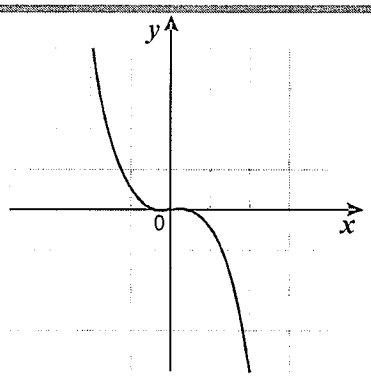
Solución

En la ecuación de la función es evidente que no está definida para $f(1)$, por tanto no es continua en ese punto.



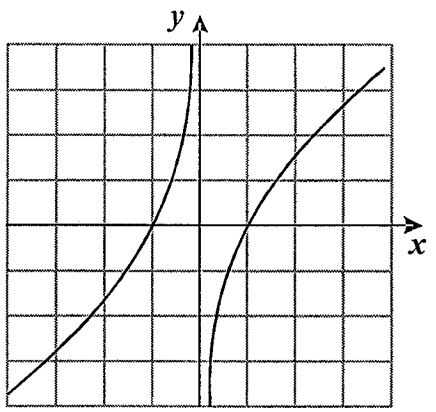
EJERCICIOS 1-3. Usar la gráfica para determinar los puntos de discontinuidad. (si los hay)

1. $f(x)=-\dfrac{x^3}{2}$



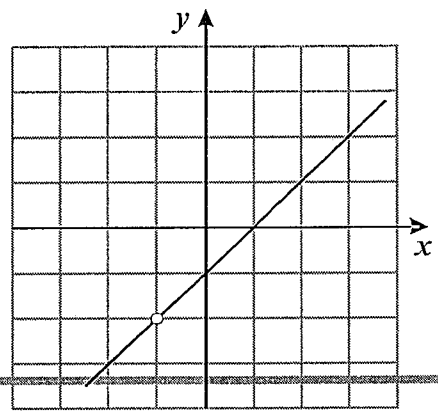
No existen puntos de discontinuidad.

2. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

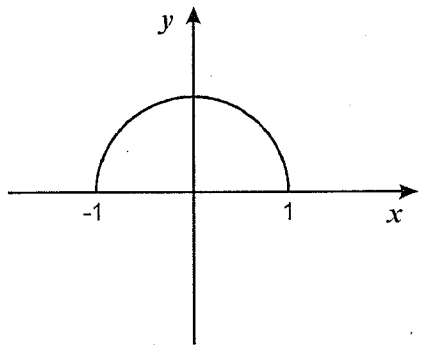


Punto de discontinuidad. X=0

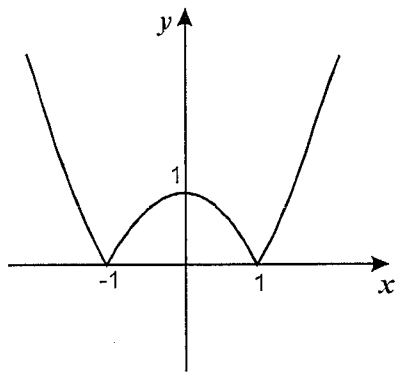
3. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$



4. Si $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Escribe su intervalo de continuidad



5. Si $f(x)=|x^2-1|$. Escribe su intervalo de continuidad



LA DERIVADA

Si, en $y = f(x)$ calculamos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

lo que estamos encontrando por definición es la ***derivada*** de la función $y = f(x)$.

Por convención y para fines prácticos emplearemos el símbolo $\frac{dy}{dx}$ para denotar dicho límite.

Por tanto, decimos que si $y = f(x)$ su derivada es; $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ y se lee "la derivada de y con respecto a x". Es importante aclarar que dicha expresión no debe verse como una fracción sino como lo que es "un límite" o un operador diferencial que nos está indicando una ***razón de cambio*** de una variable dependiente, y con respecto de otra independiente, x.

Algunos otros símbolos para indicar la derivada son: y', $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, D_x

Ejemplo . Si, $f(x) = x^2 - 2x$ hallar su derivada

Primero encontramos $f(x+\Delta x)$

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x \end{aligned}$$

luego restemos $f(x)$

$$\begin{array}{rl} f(x+\Delta x) - f(x) = & x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x \\ & -x^2 \qquad\qquad\qquad\quad +2x \\ \hline & 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \qquad -2\Delta x \end{array}$$

dividimos por Δx , por tanto;

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 2)}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x - 2 \end{aligned}$$

finalmente calculamos el límite que estamos buscando y es precisamente la derivada

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 2) \qquad \text{entonces}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x - 2$$ que se lee "la derivada de $f(x)$ con respecto a x es $2x - 2$".

Ejercicios. En cada una de las funciones siguientes encuentra su derivada'

1. $f(x) = 2 - 3x$

2. $f(x) = 1 - x^2$

3. $s = t^3 - 12$

4. $y = \sqrt{x-4}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

6. $f(x)=\sqrt{x+1}$

7. $y=(x-2)^2$

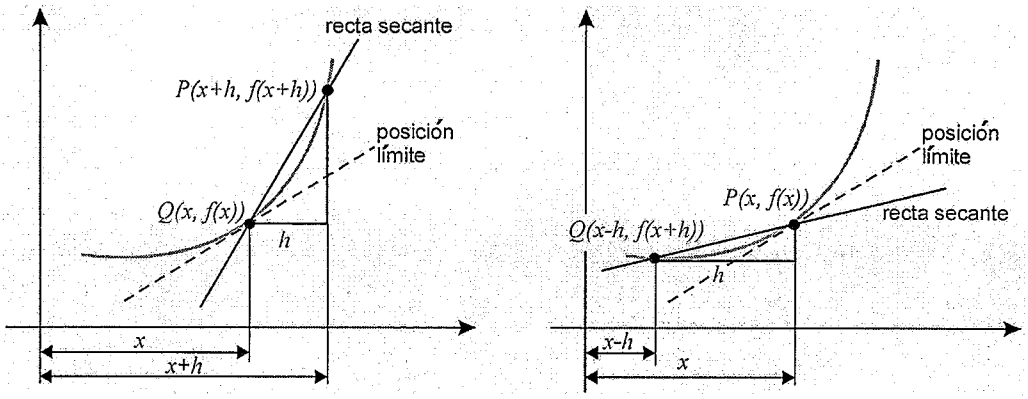
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

La línea tangente

El concepto de límite proporciona el modo de alcanzar la mejor descripción de línea tangente.

En la figura sea P un punto fijo y Q un punto móvil próximo a P. Observa que la recta secante que pasa por P y Q, tiene como posición límite la recta tangente en P cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva.

También vemos que la pendiente de la secante es $m_{sec}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$



En consecuencia, la línea tangente es la recta que pasa por P con pendiente m_{tan} que satisface

$$m_{tan}=\lim_{h\to 0}(m_{sec})=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df(x)}{dx}$$

Definición.- Se dice que la derivada de una función $y = f(x)$ desde el punto de vista geométrico es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en un punto dado $P(x, y)$

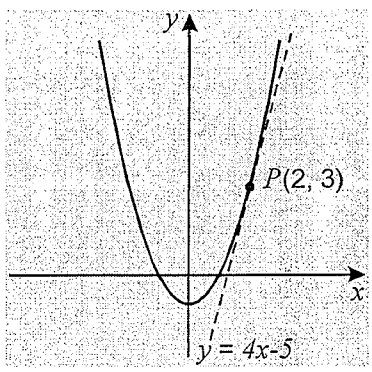
Ejemplo. Encuentra la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 1$ en el punto $P(2,3)$.

Primero calculemos

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + (h)^2 - 1 - x^2 + 1}{h}$$

$$= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$



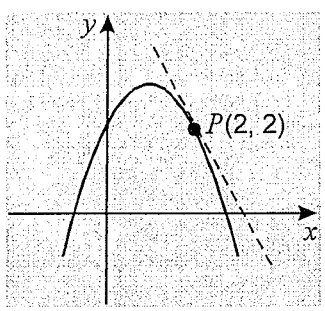
luego; $m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$

por tanto $m_{tan} = 2x$ en cualquier punto; $m_{tan} = 2(2) = 4$ en $x = 2$

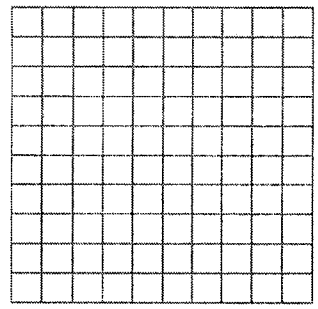
La ecuación de la tangente es

$$y - 3 = 4(x - 2)$$
$$y = 4x - 8 + 3$$
$$y = 4x - 5$$

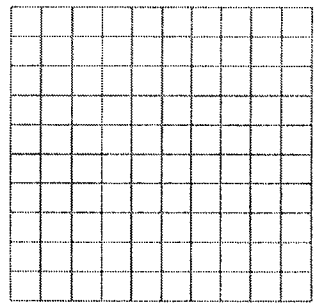
Ejercicio 1. Encuentra la pendiente de la tangente a la curva $y = -x^2 + 2x + 2$ en el punto donde $x = 2$



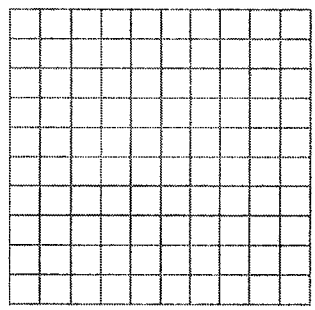
Ejercicio 2. Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=1-x^2$ en el punto *P*(2, -3). Trazar la gráfica.



Ejercicio 3. Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=x^3+1$ en el punto P(1, 2). Trazar la gráfica.



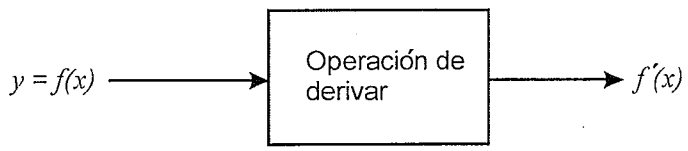
Ejercicio 4. Encuentra los puntos de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ donde su pendiente es -1/4. Trazar la gráfica.



REGLAS PARA DERIVAR

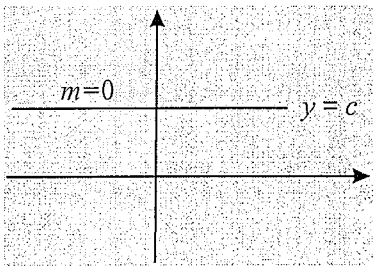
Calcular la derivada de una función a partir de su definición es finalmente un proceso tedioso y que demanda mucho tiempo. Esa es la razón por la que se han desarrollado instrumentos (teóricos y tecnológicos) que permitan acortar el largo camino que hemos visto hasta aquí.

Recuérdese que la derivada de una función $f(x)$ nos produce otra función. Este proceso lo podemos esquematizar de la siguiente manera.



Regla1. La derivada de una función constante $f(x) = c$ es cero. Cuando una función $f(x)$ no tiene cambios su pendiente es cedro.

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$



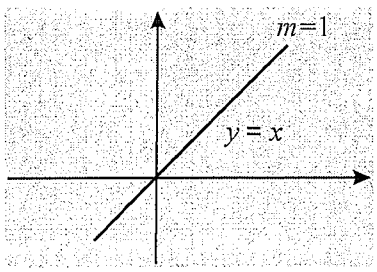
Ejemplo.

Sí $y = -5 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(-5)}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Regla 2. La derivada de la función identidad $f(x) = x$ es 1. La razón de cambio es 1 a 1.

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$



Para demostrar la regla número 3 es conveniente recordar que:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

Regla 3. Si $f(x) = x^n$ entonces su derivada es, $\dfrac{d(x)}{dx} = nx^{n-1}$. Es decir,

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

Dentro del paréntesis todos los términos tienen como límite cero excepto uno, el que no tiene como factor a Δx.

Ejemplos:

1) $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$

2) $\frac{d(x^{-5})}{dx} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

3) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^3} = \frac{d(x)^{\frac{3}{2}}}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

Regla 4. Si c es una constante y $f(x)$ una función, entonces

$$\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

La justificación se deja como ejercicio.

Regla 5. Si u, v y w son funciones de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

justifica la regla como un ejercicio de tarea.

Ejercicios: Encuentra la derivada de cada una de las siguientes funciones.

1. $y = 2x^3$

2. $y = \pi x^2$

3. $y = \dfrac{-2}{x^4}$

4. $y = \dfrac{4}{5x^5}$

5. $y = 3 - 2x + \pi x^2 - \dfrac{2}{x^4}$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$. Rescribe $\sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$.

7. $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$

8. $y = -x^4 + 3x^2 - 6x + 2\sqrt{x} - 1$

9. $y = 11x^3 - 2x + 3\sqrt{x^3} - 4$

Regla 6. Si $y = f(v)$ y $v = g(x)$ entonces,

$$\frac{dv^n}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Supongamos que $y = v^n$ entonces $\frac{dy}{dv} = \frac{d}{dv}v^n = nv^{n-1}$ de acuerdo a la regla 3.

Ahora bien, estarás de acuerdo que;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dv}\left[v^n\right]\cdot\frac{dv}{dx}$$

Por tanto, $\frac{dy}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$. Este proceso también se le llama regla de la cadena.

Ejemplo. Hallar la derivada de $y = (3 - x^2)^3$

Hagamos $n = 3$ y $v = 3 - x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2x$

Por tanto $\frac{dy}{dx} = 3(3 - x^2)^2(-2x)$

$$\frac{dy}{dx} = -6x(3 - x^2)^2$$

Ejercicios. Calcular la derivada de las siguientes funciones.

1. $y=\sqrt{2x^3-3}$.

Rescribir la función como $y=\left(2x^3-3\right)^{\frac{1}{2}}$

2. $y=(3-7x)^{10}$

3. $s=\left(t^2-5t+2\right)^5$

4. $y=\dfrac{5}{\sqrt[3]{5x-3}}$

5. $f(x)=\dfrac{3}{x^3-4}$

6. $y=\sqrt[3]{x^2-2x+1}$

7. $y = -3\sqrt[4]{2-9x}$

8. $s = \sqrt{\dfrac{1}{t^2-2}}$

DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Recordemos a través del siguiente ejemplo qué es una función implícita y calculemos $\dfrac{dy}{dx}$

Función implícita	Función explícita	Derivada
$xy = 2$	$y = \dfrac{2}{x}$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{x^2}$

El ejemplo nos enseña que es relativamente fácil despejar y de la función implícita para así, obtener su derivada. Pero sabemos que a veces en ciertas funciones, o no se puede despejar la y o es sumamente difícil hacerlo, entonces hay que preguntarse si dichas funciones se pueden derivar implícitamente. La respuesta es sí, y es necesario hacerlo término a término considerando que la ecuación determina a y como función de x.

Ejemplo 1. Derivar $x^2 + y^2 = 5$

Derivando término a término tenemos que:

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}(5)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

Comprobación del **ejemplo 1**.

Si en el ejemplo 1 hacemos explícita la función, entonces

$$y=\sqrt{5-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(5-x)^{\frac{-1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\left(5-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

pero si en el denominador sustituimos $\sqrt{5-x^2}$ por y obtenemos el mismo resultado que en el ejemplo 1.

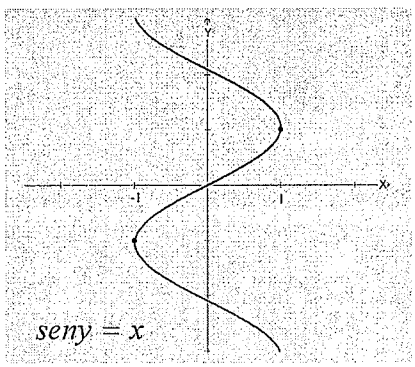
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Ejemplo 2. Calcular $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación $seny=x$

$$\frac{d}{dx}seny=\frac{dx}{dx}$$

$$\cos y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$$



Ejercicios 1-6. hallar $\frac{dy}{dx}$ implícitamente

1. $x^2 - y^2 = 16$

2. $x^2 - y^3 = 0$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$

4. $x^2 + y^2 = 2$

5. $y^3 - y = x$

6. $\sqrt{y} = x - 2y$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Hemos visto que, la derivada de una función de x, es también otra función de x. Si ocurre que esta nueva función es derivable; en este caso la derivada de la primera derivada se llama segunda derivada. De forma semejante la derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada, y así, sucesivamente hasta la enésima derivada.

Ejemplo.

$$\text{Si,}\quad y=5x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=15x^2 \quad \text{entonces} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(15x^2\right)}{dx}=30x, \text{ etc.}$$

Símbolos para indicar las derivadas sucesivas:

$y' = f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, significa la primera derivada de y con respecto a x

$y'' = f''(x)=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, significa la segunda derivada de y con respecto a x

$y''' = f'''(x)=\dfrac{d^3y}{dx^3}$, significa la tercera derivada de y con respecto a x

$y^{IV} = f^{IV}(x)=\dfrac{d^4y}{dx^4}$, significa la cuarta derivada de y con respecto a x, etc.,

Ejercicios

1. Determinar la segunda derivada de $y=2x^2-5x+2$

2. Determinar la tercera derivada de $y=x^4+5x-4$

3. Hallar la tercera derivada de $y=(x-2)^3$

4. hallar la segunda derivada de $y=(x-3)(x+3)$

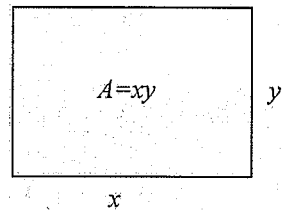
VALORES MÁXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION

Iniciemos el tema de máximos y mínimos considerando la siguiente situación.

Un rectángulo (figura mostrada) tiene 100 cm de perímetro. Expresar su área A como función de x y calcular la base y la altura que nos da la figura de mayor área.

Si el perímetro es 100, entonces

$$2x + 2y = 100$$
$$x + y = 50$$
$$y = 50 - x$$

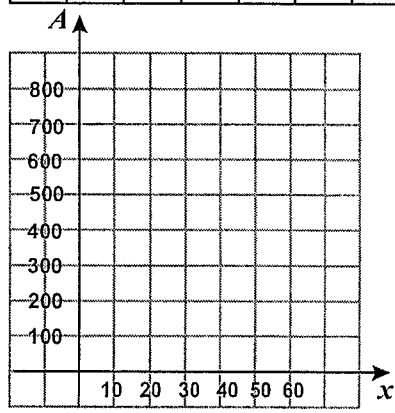


El área del rectángulo es

$$A = x(50 - x)$$
$$A = 50x - x^2$$

Con la ecuación del área $A = 50x - x^2$ completa la siguiente tabla y grafica.

x	0	10	20	30	40	50
A						



¿Qué nos enseña la gráfica?

Que existe un valor máximo para A

Que $\frac{dy}{dx} = m$ vale cero en donde A es máx. Por tanto.

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 2x$$
$$50 - 2x = 0$$
$$x = 25 \text{ cm}$$

$$y = 50 - x$$
$$y = 25 \text{ cm}$$

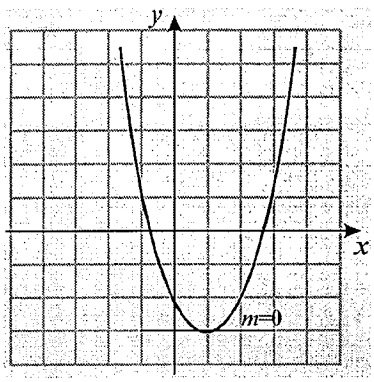
Conclusión. La base y la altura del rectángulo deben valer 25 cm para obtener el rectángulo de mayor área

De una forma análoga se concluye que una parábola que tiene su concavidad hacia arriba tiene un valor mínimo y que su derivada en ese punto también es cero.

Ejemplo 1. Determina el valor máximo o mínimo de la función $y = x^2 - 2x - 2$

Primero hay que obtener la derivada de $y = x^2 - 2x - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2$$



En la gráfica es evidente que hay un punto mínimo, por tanto

$$2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = (1)^2 - 2(1) - 2 = -3$$

Esto significa que la función tiene un valor mínimo en el punto $P(1,-3)$

Ejemplo 2. Se desea hacer una caja abierta, con una pieza cuadrada de material de 4 pulgadas de lado, cortando cuadraditos iguales de cada esquina y doblando por las líneas de puntos de la figura. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

El volumen de la caja es el área de la base por la altura

$$V = (4 - 2x)^2 x = 16x - 16x^2 + 4x^3$$

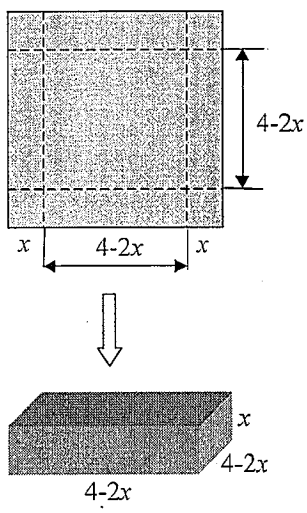
luego derivando obtenemos

$$\frac{dV}{dx} = 16 - 32x + 12x^2$$

$16 - 32x + 12x^2 = 0$ si el volumen es máx. o min.

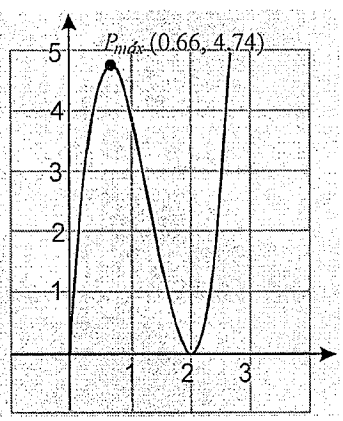
$$4 - 8x + 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = \tfrac{2}{3}$$



La solución factible es $x = \frac{2}{3}$ porque la otra partiría la pieza cuadrada en cuatro partes iguales

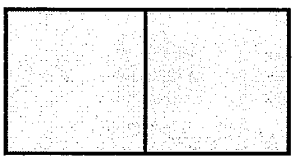
Gráfica de la función volúmen



Ejercicio 1. Encontrar dos números positivos de manera tal que la suma del doble de uno más el otro, sea mínima, si el producto de dichos números es 288.

Ejercicio 2. Hallar dos números, cuya diferencia sea 50, de modo que su producto sea mínimo

Ejercicio 3. Un granjero dispone de 200 pies de valla para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares (figura mostrada). ¿Qué dimensiones debe elegir para que el área encerrada sea mínima?



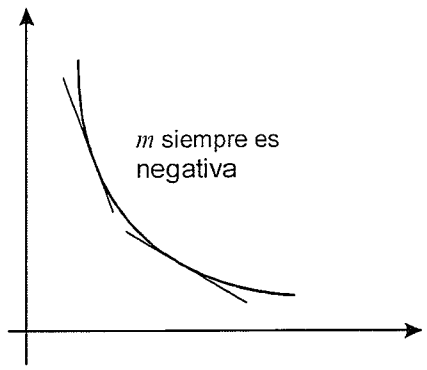
y

MÁS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

¿Cómo encontrar un primer método para analizar los máximos y/o mínimos relativos de una función $y = f(x)$?

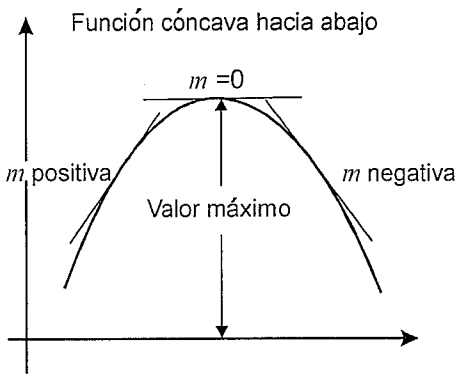
Comencemos por analizar las funciones crecientes y decrecientes con respecto a su pendiente en cada punto de ellas.

Función creciente. Es cuando x crece y también lo hace y. Su pendiente o **derivada** siempre es **positiva**.

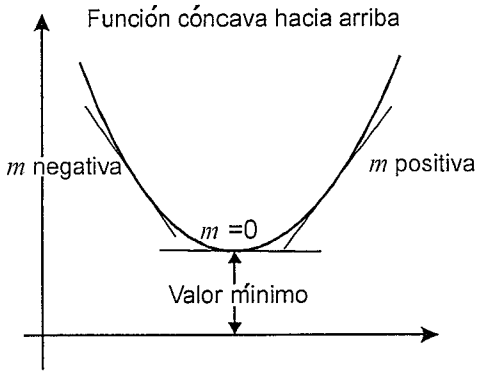


Función decreciente. Es cuando x crece y decrece y. Su pendiente o **derivada** siempre es **negativa**.

Con los antecedentes anteriores podemos concluir que una curva que tiene su concavidad hacia abajo, tiene un máximo relativo y que una que es cóncava hacia arriba tiene un mínimo relativo.



Una función tiene un máximo relativo cuando su pendiente es cero y su derivada pasa de ser positiva a ser negativa haciendo el recorrido de izquierda a derecha.



Una función tiene un mínimo relativo cuando su pendiente es cero y su derivada pasa de ser negativa a ser positiva haciendo el recorrido de izquierda a derecha.

Con el análisis de las ilustraciones anteriores podemos concluir el primer método para calcular los máximos y/o mínimos relativos de una función $y = f(x)$

Primer criterio para calcular los máximos y/o mínimos relativos de una función

1. Calcular la derivada de $y = f(x)$
2. Igualar a cero la derivada de $y = f(x)$ y resolver la ecuación, la soluciones se llaman valores críticos
3. Analizar el signo de $\frac{dy}{dx}$ un valor antes y uno después de cada valor crítico sin brincar alguno de ellos
   a) si la derivada de $y = f(x)$ cambia de $(+)$ a $(-)$ se trata de un **máximo**
   b) si la derivada de $y = f(x)$ cambia de $(-)$ a $(+)$ se trata de un **mínimo**
   c) si no hay cambio de signo no es ni máximo ni mínimo

4.- Graficar

Ejemplo. Calcular los máximos y mínimos de la función $y = x^3 - 6x^2 + 9x$. Graficar

Primero calculamos la derivada de la función

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

igualamos a cero la derivada de la función

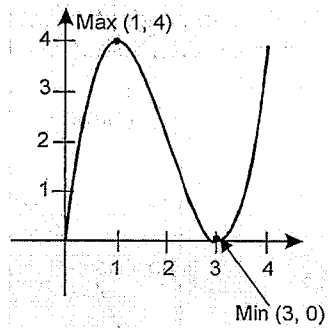
$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

factorizando y resolviendo la ecuación, tenemos que

$$3(x-3)(x-1) = 0,$$

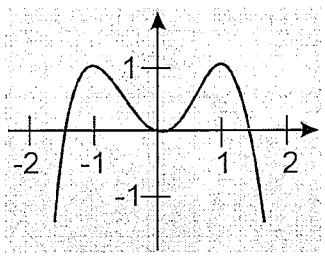
entonces

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 4$$
$$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 0$$

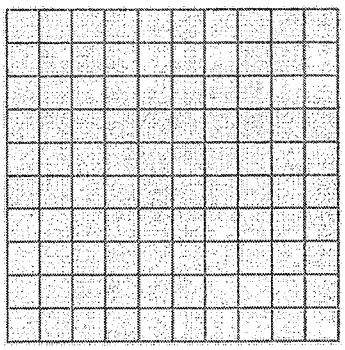


Análisis del valor crítico $x_1 = 1$	Análisis del valor crítico $x = 3$
Si x < 1, por ejemplo 0.9 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(-)(-) = +$	Si x < 3, por ejemplo 2.9 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(-)(+) = -$
x > 1, por ejemplo 1.1 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(-)(+) = -$	Si x > 3, por ejemplo 3.1 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(+)(+) = +$

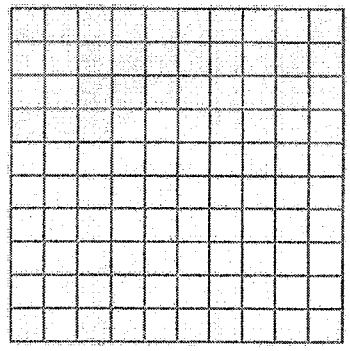
Ejercicio 1. Calcular los máximos y mínimos de la función $y = 2x^2 - x^4$



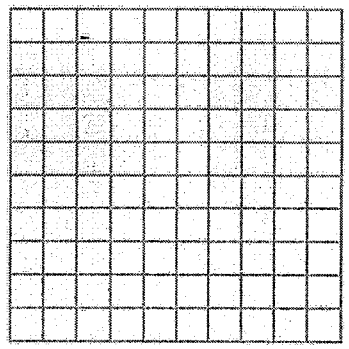
Ejercicio 2. Calcular los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^4 - 4x$. Graficar.



Ejercicio 3. Hallar los máximos y mínimos de $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. Graficar.

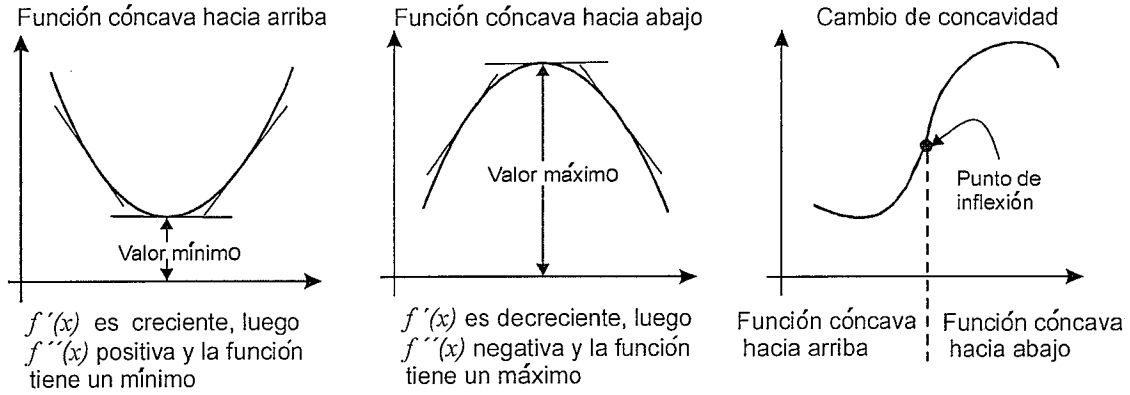


Ejercicio 4. Determinar los máximos. y mínimos de $y = x^2 + \frac{2a^3}{x}$. Graficar.



Concavidad de una curva. Cuando recorremos una curva de izquierda a derecha y la tangente de esta en cada punto gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, se dice que la curva es ***cóncava hacia arriba***; si gira en sentido opuesto, la gráfica es ***cóncava hacia abajo***.

Luego es evidente que la derivada de una función con concavidad hacia arriba es creciente, por tanto su segunda derivada es **positiva**, por el contrario si la concavidad es hacia abajo, la primera derivada es decreciente y su segunda derivada es **negativa**. Por último, un cambio de concavidad se encuentra en un punto que se llama de ***inflexión***. Los diagramas siguientes nos ayudarán a aclarar lo antes dicho.



Analizando y sintetizando estas ilustraciones podemos concluir un segundo método para calcular los máximos y/o mínimos de una función $y = f(x)$

1. Calcular la primera derivada
2. Encontrar los valores críticos
3. Hallar la segunda derivada
4. Evaluar la segunda derivada en cada uno de los valores críticos para conocer el signo de esta:
   a) Si $f''(x)$ es negativa la función tiene un máximo
   b) Si $f''(x)$ es positiva la función tiene un mínimo
   c) Si $f''(x)$ es cero o no existe, generalmente es un ***punto de inflexión***
5) Graficar

Ejemplo . Hallar los valores máximos y/o mínimos de $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$

Solución: Derivando $f(x)$ tenemos

$$f'(x)=x^2-2x-3$$

luego

$$x^2-2x-3=0 \text{ en un máx. o mín.}$$

Resolviendo la ecuación los valores críticos son

$$x_1=-1 \text{ y } x_2=3$$

Calculamos la segunda derivada

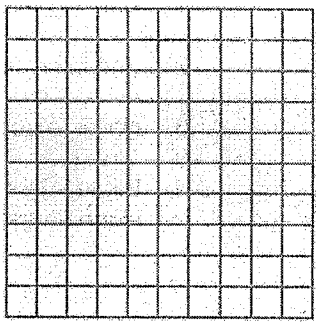
$$f''(x)=2x-2$$

Evaluamos $f''(x)$ en $x_1=-1$ y $x_2=3$

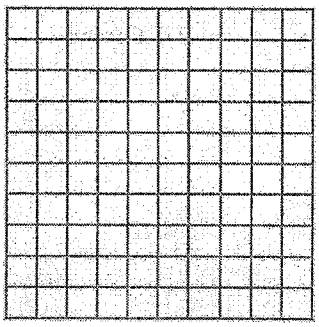
$f''(-1)=2(-1)-2=-4$, es negativa, por tanto, hay un **máximo** = 6.33 en $x=-1$.

$f''(3)=2(3)-2=4$, es positiva, por tanto, hay un **mínimo** $=-5$ en $x=3$.

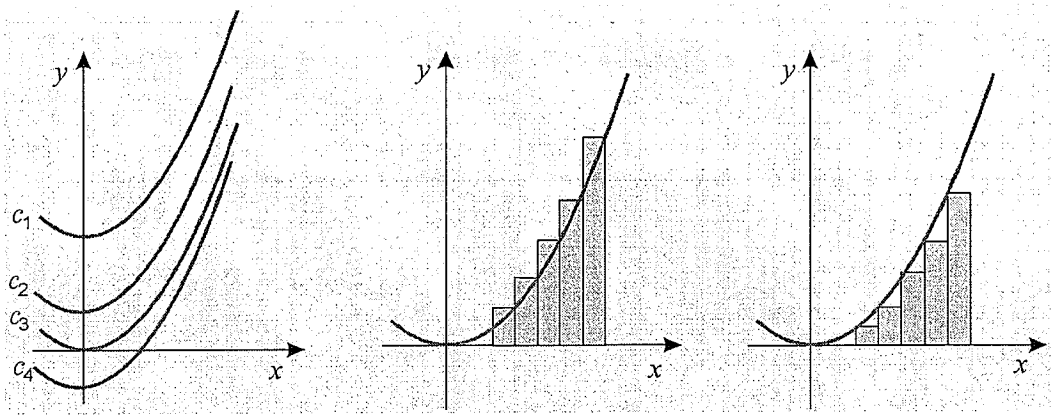
Ejercicio 1. Hallar los máximos y mínimos de $f(x)=x^3-3x+4$. Graficar.



Ejercicio 2. Determinar los máximos. y mínimos de $f(x)=x^4+x^3$. Graficar.



ANTIDERIVADAS - INTEGRALES



Sabemos que las operaciones en matemáticas tienen sus inversas, por ejemplo, la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, elevar a una potencia y extraer una raíz, etc.,

En el cálculo integral sucede exactamente lo mismo; la integración es una operación inversa a la derivación.

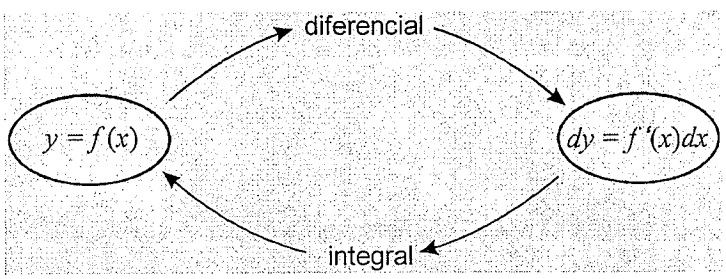
En el cálculo diferencial aprendimos que si, $y = f(x)$; entonces, la derivada de la función es $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ o bien si empleamos diferenciales, la diferencial de la función es;

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{(definición de diferencial)}$$

El propósito fundamental del **cálculo integral** depende de la operación inversa a la diferenciación, es decir:

> Hallar una función $y = f(x)$, cuya diferencial $dy = f'(x)dx$ es conocida

Lo antes dicho lo podemos resumir con la siguiente ilustración



La función $f(x)$ que así se obtiene se llama **integral o antiderivada** de la expresión diferencial dada; el procedimiento de hallarla, se llama **integración**; la operación se indica escribiendo el signo integral $\int$ delante de la expresión diferencial; de manera que;

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

Algunos autores utilizan indistintamente el termino de **antiderivada** en lugar de **integral** por ser una operación inversa a la diferenciación.

Ejemplos

Función	Diferencial	Integral
1. $y = x^3$	$dy = 3x^2dx$	$\int 3x^2dx = x^3$
2. $y = e^x$	$dy = e^xdx$	$\int e^xdx = e^x$
3. $y = \arctan x$	$dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x$

Significado geométrico de la constante de integración

Cuando integramos una diferencial dada, realmente lo que estamos obteniendo es una familia de funciones de la forma $f(x)+C$, donde C se denomina *constante de integración*; y es una *constante arbitraria* porque se le puede asignar cualquier valor real, veamos enseguida por qué

Como $d(x^3)=3x^2dx$, entonces

$$\int 3x^2dx = x^3$$

Como $d(x^3+1)=3x^2dx$, entonces

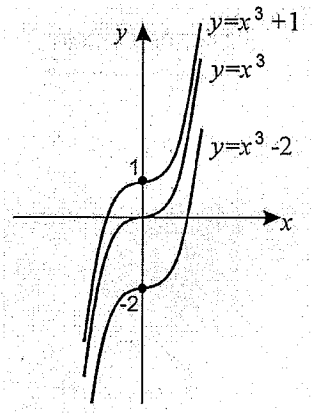
$$\int 3x^2dx = x^3+1$$

Como $d(x^3-2)=3x^2dx$, entonces

$$\int 3x^2dx = x^3-2$$

En general, como

$$d[f(x)+C]=f'(x)dx$$



Familia de funciones $f(x)+C$

donde C es una constante arbitraria, tenemos que

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

se llama **integral indefinida** y C **constante de integración.**

Casi siempre, cada diferencial proporciona una fórmula de integral inmediata. En la tabla siguiente se listan las primeras integrales que utilizaremos en esta sección.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Evidentemente que las integrales inmediatas cumplen con las reglas de linealidad, es decir;

$\int cf'(x)dx = c\int f'(x)dx$, donde c es constante

$\int [f'(x) + g'(x)]dx = \int f'(x)dx + \int g'(x)dx$

Ejemplo 1. Calcular

$$\int 3dx$$

Solución

$\int 3dx = 3\int dx = 3x + C$ aplicando la primer integral inmediata y la primer regla de linealidad.

Ejemplo 2. Calcular

$$\int x^5 dx$$

Solución

$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$ porque $n = 5$, y aplicando la regla número 2 de la tabla anterior.

Ejemplo 3. Hallar el valor de

$$\int \sqrt[3]{x} dx$$

Solución

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx$$

$$= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$

porque $n = 1/3$ y evidentemente $n + 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$

Una raíz $\sqrt[a]{x^b}$ se puede expresar como una potencia de la siguiente manera

$$x^{b/a},$$

de manera que $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

Ejemplo 4.. Hallar el valor de

$$\int 3x^5 dx$$

Solución

$$\int 3x^5 dx = 3 \int x^5 dx$$

$$= 3\left(\frac{x^6}{6}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} x^6 + C$$

Ejemplo 5.. Calcular

$$\int \frac{5dx}{x^3}$$

Solución

$$\int \frac{5dx}{x^3} = 5 \int x^{-3} dx = 5\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C = -\frac{5}{2x^2} + C$$

Ejemplo 6.. Calcular

$$\int\left(3x^3+4x^2-2x+5\right)dx$$

Solución

$$\int\left(3x^3+4x^2-2x+5\right)dx = \int 3x^3dx+\int 4x^2dx-\int 2xdx+\int 5dx$$

$$= 3\int x^3dx+4\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx$$

$$= 3\left(\frac{x^4}{4}\right)+4\left(\frac{x^3}{3}\right)-2\left(\frac{x^2}{2}\right)+5x+C$$

$$= \frac{3}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-x^2+5x+C$$

Ejemplo 7.. Calcular

$$\int(x-3)^2\,dx$$

Solución

$$\int(x-3)^2\,dx = \int\left(x^2-6x+9\right)dx \qquad \text{Elevando el binomio al cuadrado}$$

$$= \int x^2dx-6\int xdx+9\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3}-3x^2+9x+C$$

Ejemplo 8.. Calcular

$$\int\frac{2x^3-3x}{x}dx$$

Solución

$$\int\frac{2x^3-3x}{x}dx = 2\int x^2dx-3\int dx \qquad \text{Dividiendo todo entre } x$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3}\right)-3x+C$$

$$= \frac{2}{3}x^3-3x+C$$

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales indefinidas

1. $\int 5x^6 dx$ $R.$ $\frac{5}{7}x^7 + C$

2. $\int \frac{3dx}{x^4}$

3. $\int 2\sqrt[3]{x^2}\, dx$

$R.$ $\frac{6}{5}x^{5/3} + C$

4. $\int 2\sqrt[3]{x^2}\, dx$

13. $\int x\left(\sqrt{x}-2\right)dx$

R. $-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^4}+C$

R. $\frac{2}{5}x^{5/2}-x^2+C$

14. $\int\frac{(x+2)(x-2)}{x}dx$

CAMBIO DE VARIABLE

Cuando tenemos que integrar una diferencial, producto de una función compuesta, es conveniente hacer un **cambio de variable** para que se nos facilite el proceso de integración.

En una integral de la forma

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

si hacemos $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$, entonces la integral se puede escribir como

$$\int f(u)du$$

y si $F(u)+C$ es la antiderivada de la expresión anterior podemos concluir que

$$\int f(u)du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

Ejemplo 1. Calcular

$$\int (x^2+3)^5 2xdx$$

Solución Hagamos

$$u = x^2+3, \quad \text{luego} \quad du = 2xdx.$$

Entonces

$$\int (x^2+3)^5 2xdx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+3)^6 + C \quad \text{Sustituyendo } u \text{ por } x^2+3$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{6}(x^2+3)^6 + C\right] = \frac{6}{6}(x^2+3)^5(2x) = (x^2+3)^5 2x.$$

En los siguientes ejemplos dejamos la comprobación al estudiante como ejercicios.

Ejemplo 2. Calcular

$$\int \frac{dx}{(2+3x)^3}$$

Solución Hagamos

$$u = 2+3x, \qquad \text{luego} \qquad du = 3dx \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{1}{3}du$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{(2+3x)^3} = \int \frac{\frac{1}{3}du}{u^3} = \frac{1}{3}\int u^{-3}du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C = -\frac{1}{6u^2} + C = -\frac{1}{6(2+3x)^2} + C$$

Sustituyendo u por $2+3x$.

Ejemplo 3. Calcular

$$\int x^2\sqrt{2+x^3}\,dx$$

Solución Hagamos

$$u = 2+x^3, \qquad \text{luego} \qquad du = 3x^2dx$$

Entonces podemos ver qué $\frac{1}{3}du = x^2dx$; por tanto

$$\int x^2\sqrt{2+x^3}\,dx = \int \frac{1}{3}u^{1/2}du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{2}{9}u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{9}\left(2+x^3\right)^{3/2} + C \quad \text{Sustituyendo } u \text{ por } 2+x^3$$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales mediante un cambio de variable.

1. $\int (2x-3)^3\,dx$

R. $\frac{1}{8}(2x-3)^4 + C$

2. $\int \sqrt{2x-3}\,dx$

R. $-\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$

3. $\int \frac{dx}{(2x+1)^3}$

4. $\int (a+bx)^2\,dx$

5. $\int \sqrt{x^2-3}\,x\,dx$

R. $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^{3/2}+C$

6. $\int t\left(2-3t^2\right)^2\,dt$

7. $\int y(3-3y)^2\,dy$

R. $\frac{9}{2}y^2 - 6y^3 + \frac{9}{4}y^4 + C$

8. $\int \frac{5x^2\,dx}{\sqrt{4-x^3}}$

La Regla del Logaritmo para la Integración

Sea u una función de x derivable.

1. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ 2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

Ejemplo 1

$\int \frac{dx}{2x-1}$ haciendo u = 2x – 1 se tiene que du = 2 dx entonces

$\frac{1}{2}\int \frac{(2)dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c$

Ejemplo 2

$\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}$ considerando u = x^2 + 3 tendremos du = 2x por tanto

$\frac{1}{4}\int \frac{(4)x\,dx}{2x^2+3} = \frac{1}{4}\ln|2x^2+3| + c$

Ejemplo 3

$\int \frac{x+1}{x^2+2x} dx$ tenemos que u = x^2 + 2x entonces du = 2x + 1 así que

$\frac{1}{2}\int \frac{(x+1)(2)}{x^2+2x} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x| + c$

1. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+2} dx$

2. $\int \frac{x^2-3}{-x^3+9x+1}\,dx$

3. $\int \frac{2x}{x-1}\,dx$

4. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

Reglas de Integración para funciones exponenciales

Sea u una función de x derivable.

1. $\int e^x\,dx = e^x + c$ 2. $\int e^u\,du = e^u + c$

Ejemplo 1

1. $\int e^{3x+1}\,dx$

Solución: considerando u = 3x + 1

entonces tenemos que du = 3dx Así que,

$$\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}(3)dx = \frac{e^{3x+1}}{3} + c$$

Ejemplo 2

$$\int 5x\,e^{-x^2}\,dx$$

Solución: si hacemos $u = -x^2$ entonces $du = -2x\,dx$ Así pues,

$$\int 5x\,e^{-x^2}\,dx = 5\int x\,e^{-x^2}\,dx = \frac{5}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx = -\frac{5}{2}e^{-x^2} + c$$

1. $\int e^{-5x}\,dx$

2. $\int x e^{3x^2} dx$

3. $\int \left(e^x + 1\right)^2 dx$

4. $\int \left(e^x + 1\right)^3 e^x dx$

5. $\int \frac{e^x}{2 + e^x} dx$

INTEGRAL DEFINIDA
EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función f es continua en el intervalo [a, b], entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde F(x) es cualquier integral indefinida de f(x)

Ejemplo 1

$$\int_1^2 \left(x^2 - 3\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

Ejemplo 2

$\int_0^1 (4x+1)^2\,dx$ se tiene que u = 4x + 1 por tanto du = 4dx entonces

$$\int_0^1 (4x+1)^2\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (4x+1)^2\,(4)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(4x+1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left[\frac{125}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{31}{3}$$

Ejemplo 3

$$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 3\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = 2\sqrt{(4)^3} - 2\sqrt{(1)^3} = 14$$

1. $\int_0^2 \left(2x^2 - 3x + 2\right)dx$

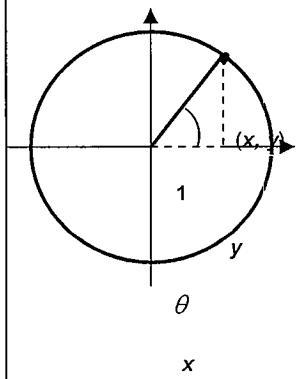
2. $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) dx$

3. $\int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx$

4. $\int_1^2 \frac{x-2}{x}\, dx$

5. $\int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$

TRIGONOMETRÍA

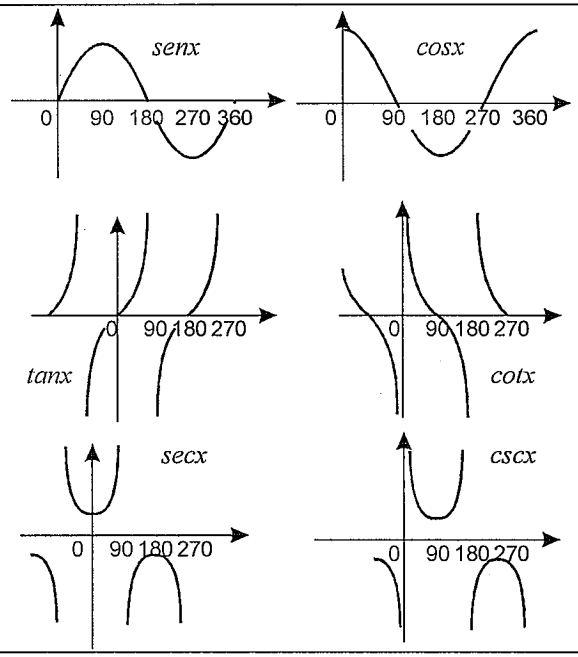


$$x^2 + y^2 = 1$$

$$sen\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

GRÁFICAS



FÓRMULAS MATEMÁTICAS

DERIVADAS FUNCIONES ALGEBRAICAS

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$$

1. $\frac{d}{dx} c = 0$
2. $\frac{d}{dx} x = 1$
3. $\frac{d}{dx} cf(x) = c\frac{d}{dx} f(x)$
4. $\frac{d}{dx} v^n = nv^{n-1}\frac{d}{dx} v$
5. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) - h(x)] = f'(x) + g'(x) - h'(x)$
6. $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

FÓRMULAS DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

$$sen(x+y) = senx\cos y + \cos x seny$$

$$sen(x-y) = senx\cos y - \cos x seny$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - senxseny$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + senxseny$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

FÓRMULAS DE ÁNGULOS DOBLES

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x = 2\cos^2 - 1 = 1 - 2sen^2 x$$

$$sen2x = 2senx\cos x \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

FÓRMULAS DE MEDIO ÁNGULO

$$sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ley de senos. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

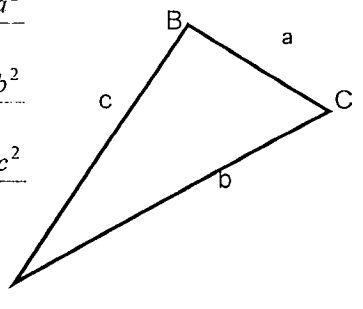
$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Ley de cósenos. El coseno de un ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman menos el cuadrado del lado opuesto, todo dividido entre dos veces el producto de los lados que lo forman

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

1. $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{d}{dx} u$
2. $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx} u$

DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

1. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{d}{dx} u$
2. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{d}{dx} u$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. $\frac{d}{dx} senu = \cos v \frac{d}{dx} u$
2. $\frac{d}{dx}\cos u = -senu\frac{d}{dx} u$
3. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{d}{dx} u$
4. $\frac{d}{dx} ctgu = -\csc^2 u\frac{d}{dx} u$
5. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\frac{d}{dx} u$
6. $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc uctgu\frac{d}{dx} u$

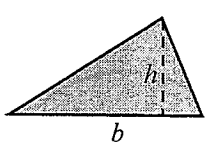
DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. $\frac{d}{dx} arcsenu = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u$
2. $\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{d}{dx} u$
3. $\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{d}{dx} u$
4. $\frac{d}{dx} arcctgu = -\frac{1}{1+u^2} \frac{d}{dx} u$
5. $\frac{d}{dx} arc\sec u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{d}{dx} u$
6. $\frac{d}{dx} arc\csc u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{d}{dx} u$

Las funciones anteriores también se escriben así

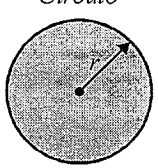
GEOMETRíA

Triángulo



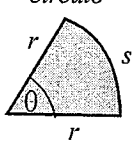
$A = \frac{1}{2} bh$

Círculo



$P = 2\pi r$

Sector de círculo



$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$y = senx \Rightarrow x = sen^{-1} y$; $y = \cos x \Rightarrow x = \cos^{-1} y$

$y = \tan x \Rightarrow x = \tan^{-1} y$; $y = ctgx \Rightarrow x = cgt^{-1} y$

$y = \sec x \Rightarrow x = \sec^{-1} y$; $y = \csc x \Rightarrow x = \csc^{-1} y$

INTEGRALES

1. $\int dx = x + C$
2. $\int cdu = c \int du$
3. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq 1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
7. $\int e^u du = e^u + C$
8. $\int senudu = -\cos u + C$
9. $\int \cos udu = senu + C$
10. $\int \sec^2 udu = \tan u + C$
11. $\int \csc^2 udu = -ctgu + C$
12. $\int \sec u \tan udu = \sec u + C$
13. $\int \csc uctgudu = -\csc u + C$
14. $\int \tan udu = \ln|\sec u| + C$
15. $\int ctgudu = \ln|senu| + C$
16. $\int \sec udu = \ln|\sec u + \tan u| + C$
17. $\int \csc udu = \ln|\csc u - ctgu| + C$
18. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$
19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a} + C$

19a. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+u}{a-u} + C$

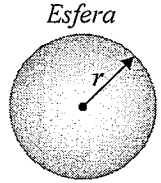
20. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen \frac{u}{a} + C$
21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$
22. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arcsen \frac{u}{a} + C$
23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$

INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int udv = uv - \int vdu$$

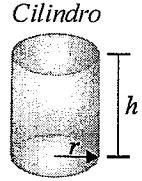
GEOMETRIA

Esfera



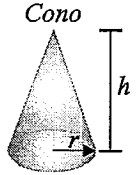
$A = 4\pi r^2$

Cilindro



$V = \pi r^2 h$

Cono

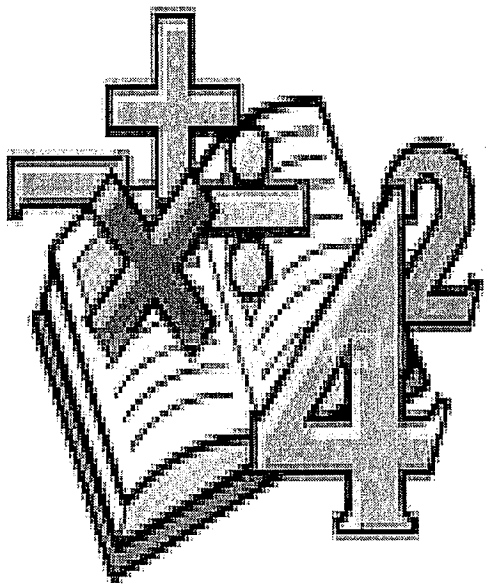


$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Formulario elaborado por:
René Jiménez

ARITMETICA



INDICE

- CONJUNTOS
- OPERACIONES CON CONJUNTOS
- DIAGRAMAS DE VENN-EULER
- SISTEMAS DE NUMERACION
- ESCRITURA DE UN NUMERO EN EL SISTEMA DECIMAL
- RELACIONES DE IGUALDAD
- RELACIONES DE DESIGUALDAD
- TEORIA CON NUMEROS PRIMOS
- PROBABILIDAD
- OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NUMEROS REALES/ PROPIEDADES
- INTERVALOS

PROBLEMARIO DE ARITMÉTICA

CONJUNTOS

EJERCICIO 1.

I. Especifica cada uno de los siguientes conjuntos por extensión.

1. El conjunto de los números naturales mayores que 10 pero menores que 18, inclusive.

_____

2. El conjunto de los días de la semana que comienzan con la letra c

_____

3. El conjunto de los meses del año que tienen 31 días.

_____

4. El conjunto de los números impares entre 2 y 1

_____

5. El conjunto de los números cuyo cuadrado es cero.

_____

II. Especifica los siguientes conjuntos en una forma constructiva (por comprensión)

1. $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$_____

2. $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$ _____

3. $M = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ _____

4. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ _____

5. $B = \{1, 9, 25, 49, 81, ...\}$ _____

6. $A = \{...,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$_____

7. $W = \{..., -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ _____

EJERCICIO 2.

I. Escribe en notación de conjuntos las siguientes afirmaciones.

1. *x* es elemento de P _____
2. *a* no está contenido en M _____
3. A es un subconjunto de B _____
4. *M* es subconjunto propio de *N* _____
5. *M* no es subconjunto de A _____
6. *A* es un conjunto vacío _____
7. *P y Q* son conjuntos equivalentes _____
8. *P y Q* son conjuntos iguales _____

II. Indica si los conjuntos descritos a continuación son finitos o infinitos

1. Las estaciones del año _____
2. Los seres humanos que habitan en la tierra _____
3. {1,2,3,...100,000} _____
4. {*x*/*x* es un número impar} _____
5. {*x*/*x* es una ciudad del planeta tierra}_____
6. { *x*/*x* es un número entero } _____
7. El conjunto de los múltiplos de 4 _____
8. { *x*/*x* es un número racional mayor que 4 pero menor que 5} _____

III. Determina la cardinalidad de los siguientes conjuntos

1. A = { *x*/*x* es un mes del año} _____
2. B = { *x*/*x* es un día de la semana} _____
3. M = {*y*/*y* es una vocal} _____
4. *N* = { *x*/*x* es un número entero positivo menor que 14} _____
5. A = { *x*/*x* es un número entero entre 15 y 16} _____
6. A = {11,12,13, ... 99} _____
7. W = { *x*/*x* es un número real y $x^2 = -9$ } _____

$\cup$ -> Unión
$\in$ -> Pertenece
$\notin$ -> No pertenece
$'$ -> Complemento
Por ej. $A' = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$
$\cap$ -> Intersección

IV. Dados los conjuntos:

A = {2,4,56,8,10}

B = {a,e,i,o,u}

C = { *x/x* es un número natural menor que 12}

D = { *x/x* es una letra del alfabeto}

E = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Determina cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas

1. $8.6 \in C$ _____
2. $z \in D$ _____
3. $8 \in A$ _____
4. $A \subset B$ _____
5. $A \leftrightarrow B$ _____
6. $A \subset E$ _____
7. A y C son comparables _____
8. $A \subset C$ _____
9. $C \not\subset A$ _____
10. $E = C$ _____
11. $B \subseteq A$ _____
12. $C \subseteq E$ _____
13. $D \subset E$ _____
14. $C \subset E$ _____
15. A y B son Comparables_____

V. Escribe todos los subconjuntos que se pueden formar con los elementos del conjunto.

A = {2,4,6}

B = {a,e,i,o,u}

M = {2,a }

A = {x}

OPERACIONES CON CONJUNTOS

EJERCICIO 3.

I. Dado el conjunto universo

U = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Y los conjuntos:

A = { 1,4,7,9}

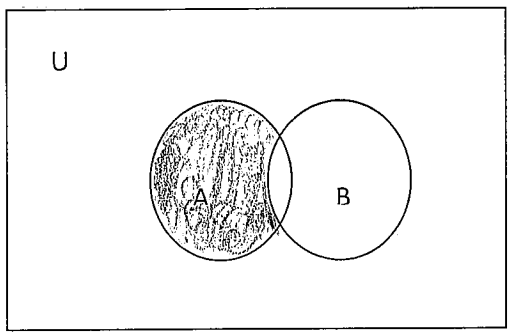
B = {2,4,6}

C = {4,5,6,7}

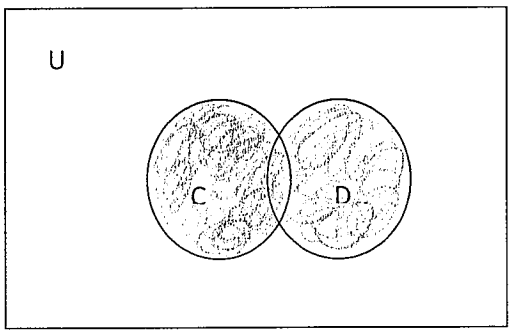
D = {*x*/*x* ∈ U y *x* es par}

E = {*x*/*x* ∈ U y *x* es impar}

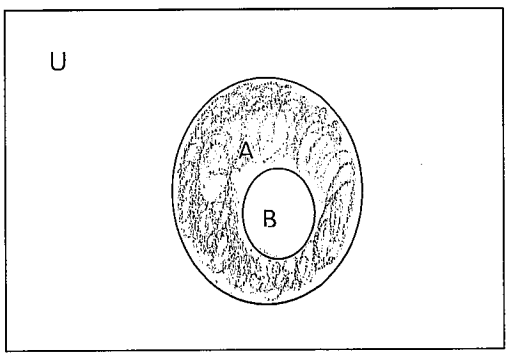
$A \cap B'$



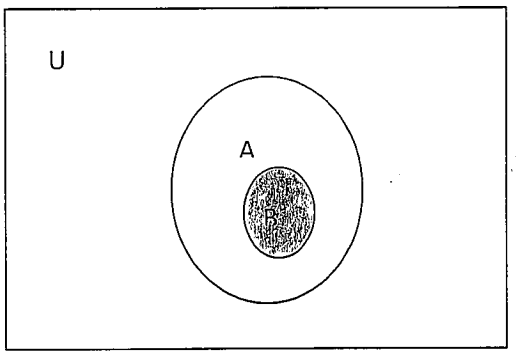
$C \cup D$



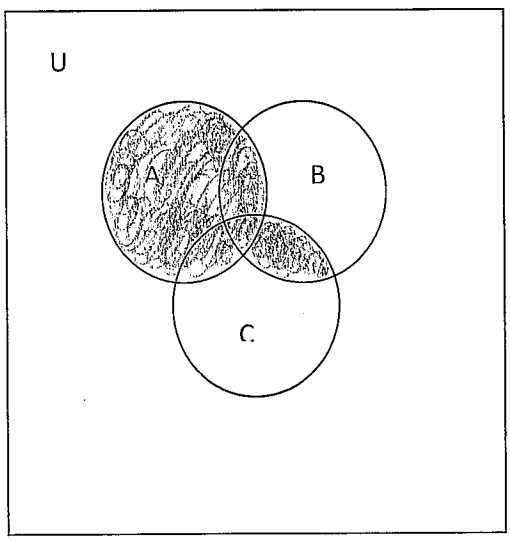
A- B



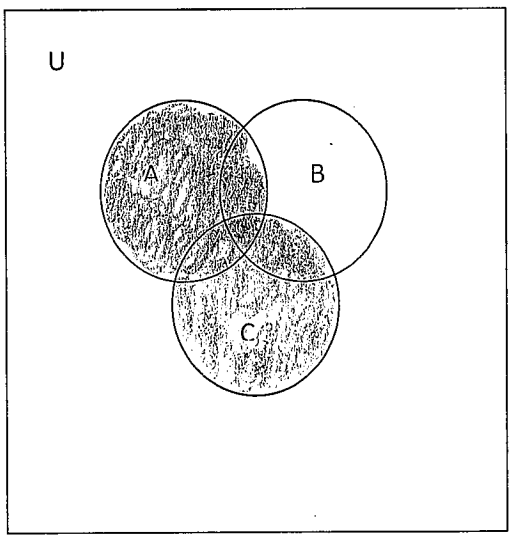
$A \cap B$



$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)'$



II. Resuelve los siguientes problemas utilizando diagramas de Venn-Euler.

1. En una escuela de idiomas trabajan 67 personas, de las cuales, 47 hablan el idioma inglés, 35 el francés y 23 ambos idiomas. ¿Cuántas personas que trabajan en dicho instituto no hablan ni el inglés ni el francés?

2. De un grupo se conoce que a 19 les gustan las matemáticas, a 17 las artes, a 11 la historia; a 2 les gustan las tres; 12 prefieren matemáticas y artes; 7 historia y matemáticas; 5 artes e historia y a 5 alumnos ninguna de ellas, hallar:

a) El número de alumnos que hay en el grupo
b) El número de alumnos a los cuales les gustan solamente las matemáticas y artes
c) El número de alumnos a los cuales les gustan solamente las artes e historia
d) El número de alumnos a los cuales únicamente les gustan las matemáticas
e) El número de alumnos a los cuales solamente les gusta la asignatura de artes
f) El número de alumnos a los cuales solamente les gusta la asignatura de historia
g) El número de alumnos a los cuales solamente les gusta matemáticas e historia

3. 50 en el sistema cuaternario	**4.** 1645 en el sistema de base 8
5. 1425 en el sistema de base 7	**6.** 2700 en el sistema de base 9

III. Efectúa las conversiones que se piden.

1. Convierte el número 1021_3 al sistema binario	**2.** Convierte el número 782_9 al sistema base 5
3. Convierte el número 302132_4 al sistema de base 7	**4.** Convierte el número 520321_6 al sistema de base 8

ESCRITURA DE UN NÚMERO EN EL SISTEMA DECIMAL

I. Escribe los números del sistema decimal que se indican a continuación.

1. Veinte mil cuatrocientos siete unidades y cuatro décimas

_____

2. Trescientos cuarenta y seis mil, sesenta y ocho unidades y catorce centésimas

_____

3. Cinco millones, ciento ocho mil trescientos cincuenta y dos unidades y siento setenta y cinco milésimas

_____

4. Setecientos treinta millones, ochocientos doce mil quinientos dos unidades y seis centésimas

_____

5. Diez billones, ciento ocho mil novecientos seis millones, trescientos veintiséis mil cuatro unidades y siete milésimas

_____

6. Mil cuatrocientos billones, cuarenta y un millones nueve mil doscientos tres unidades y cuarenta y ocho diezmilésimas

_____

II. Escribe los siguientes números del sistema decimal.

1. 13 546 714.0128

_____

2. 108 042 109.3651

_____

3. 7 465 946 024.607

_____

4. 52 000 320 002.16

_____

5. 208 000 504 114.108

_____

6. 1 000 062 500 000.9

_____

RELACIONES DE IGUALDAD

1. $4(6-x)-2(3-x)-5=9(5-2x)$	**2.** $(y-4)^2-7(2-y)=(y+5)(y-2)$
3. $\frac{4x+13}{7}-1=\frac{3x-5}{10}$	**4.** $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=2$

5. $\lvert 2x-7\rvert = 15$	**6.** $\lvert 30-5x\rvert = 20$
7. $\sqrt{5-4x}-1=6$	**8.** $3\sqrt{2x+5}+2=11$

RELACIONES DE DESIGUALDAD

1. $3x-7 \geq 2$	**2.** $5(x-1)-2(x-3) \geq 13$

3. $2(5-x) \geq x+19$	**4.** $-10<5(x+3) \leq 5$
5. $2-3x>11$	**6.** $5(9-x)<4(x+15)+12$
6. $-14 \leq 7(3-x) \leq 7$	**8.** $21<3(5-2x)<39$

TEORÍA DE NÚMEROS PRIMOS

I. Descomponer en sus factores primos los números indicados

1. 378	**2.** 525
3. 198	**4.** 630

II. Encuentra el máximo común divisor de (m.c.d.) de los números indicados.

1. 216 y 840	**2.** 360 y 450
3. 475 y 580	**4.** 580 y 950

III. Encuentra el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los números indicados

1. 64, 96 y 108	**2.** 6,8,9,12

3. 15,18 y 30	**4.** 6,9,17 y 51

PROBABILIDAD

1. En una caja hay 25 tornillos en buen estado y 80 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de sacar de la caja al azar un tornillo en buen estado?

2. De cada 1000 personas a las que se les practican exámenes médicos, 35 tienen problemas de la vista. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona examinada padezca algún malestar con su visión?

3. En una caja hay 75 canicas azules y 225 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar una canica azul?

4. Se lanza un dado y se saca una canica de una bolsa; en la bolsa hay 3 canicas, una roja, una azul y una verde. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número primo y una canica azul?

5. De un grupo escolar se van a elegir por sorteo a 3 alumnos que se hagan cargo de una ceremonia escolar; en el grupo hay 24 hombres y 12 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo de representantes esté conformado de las maneras siguientes?

A) Sean 3 hombres

B) Sean 2 hombres y 1 mujer

C) Sean 2 mujeres y 1 hombre

D) Sean 3 mujeres

6. En una caja hay 5 bolas rojas, 8 blancas y 3 azules.

A) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola, ésta sea roja **o** blanca?

B) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar **una** bola ésta sea azul **y** blanca?

C) ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar dos bolas, una sea blanca y una roja?

D) ¿Cuál es la probabilidad de que al realizar el suceso, la primera bola sea blanca y la segunda roja?

7. La probabilidad de que un jugador de tenis gane un torneo es de 2/5, y la probabilidad de que gane otro de los jugadores es de 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que uno o el otro tenista ganen el torneo?

8. La probabilidad de que un equipo de béisbol gane su primer juego es de 1/4, la probabilidad de que gane su segundo juego es de 1/2. Calcular la probabilidad de que gane por lo menos uno de sus dos primeros juegos de un torneo, si la probabilidad de que gane ambos es de 1/5.

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NUMEROS REALES. PROPIEDADES

Adición y multiplicación

0PERACION	*PROPIEDAD*	*GENERALIDAD*	*SIGNIFICADO*
	Conmutativa	$a+b=b+a$	El orden es intrascendente cuando dos números se suman
Adición	***Asociativa***	$a+(b+c)=(a+b)+c$	Los números se pueden agrupar indistintamente
	Identidad	$a+0=a$	Sumar cero a cualquier cantidad produce la misma cantidad
	Inversa o **negativa**	$a+(-a)=0$	Sumar una cifra a su inverso aditivo produce 0
	Conmutativa	$ab=ba$	Al multiplicar dos números el orden no tiene importancia
	Asociativa	$a(bc)=(ab)c$	La agrupación de los términos en la multiplicación no tiene importancia
Multiplicación	**Identidad**	$a\cdot 1=a$	Multiplicar cualquier número por 1 da el mismo número.
	Inversa o **recíproca**	$a\left(\frac{1}{a}\right)=1$	Multiplicar un número diferente de 0 por su recíproco multiplicativo da 1
	Distributiva	$a(b+c)=ab+ac$ $(a+b)c=ac+bc$	Multiplicar un número y la suma de dos cifras equivale a multiplicar cada cifra por el número y luego sumar los resultados

EJERCICIOS

1. Escribe a la derecha de cada igualdad la propiedad correspondiente.	
Igualdad	Propiedad
$7 + y = y + 7$	
$7 + 0 = 7$	
$125 + (-125) = 0$	
$x + (y + 3) = (x+y)+3$	
$x\,(7) = 7x$	
$1\,y = y$	
$x\,(yz) = (xy)\,z$	
$y\,(1/y) = 1$	
$(x+y)(w+z)=x(w+z)+y(w+z)$	

2. Escribe a la izquierda un ejemplo para cada propiedad indicada.	
Igualdad	Propiedad
	Adición conmutativa
	Multiplicación conmutativa
	Adición asociativa
	Adición-identidad
	Multipicación-inversa
	Adición - inversa
	Multipicación-asociativa
	Multipicación-distributiva
	Multipicación-identidad

Sustracción y división

Las operaciones de **sustracción** $(-)$ y **división** $(\div)$ se definen como sigue.

Definición	**Significado**	**Ejemplos**
$a-b=a+(-b)$ a se llama minuendo b se llama sustraendo El resultado de $a-b$ es la resta	Para restar un número de otro, se suma el negativo.	$5-12=5+(-12)$
$a\div b=a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)$ $=a\cdot b^{-1};\qquad b\neq 0$ a se llama numerador b se llama denominador La división de a y b también suele escribirse a/b o bien $\frac{a}{b}$ y el resultado se llama cociente	Para dividir un numero entre otro diferente de cero, se multiplica por el recíproco. Como 0 no tiene inverso multiplicativo, a/b no está definida para $b=0$, por tanto *la división por cero no está definida.* Es por esta razón que los números reales en la división no tienen propiedad de cerradura.	$7\div 5=7\cdot\left(\frac{1}{5}\right)$ $=7\cdot 5^{-1}$

Propiedades de los cocientes

Propiedad	**Ejemplos**
$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si $ad=bc$	$\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ porque $1\cdot 15 = 3\cdot 5$
$\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$	$\frac{3\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{3}{2}$
$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$	$\frac{5}{-7}=\frac{-5}{7}=-\frac{5}{7}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{3}{9}+\frac{5}{9}=\frac{3+5}{9}=\frac{8}{9}$
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+5\cdot 3}{5\cdot 4}=\frac{8+15}{20}=\frac{23}{20}$
$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{35}$
$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\frac{3}{4}\div\frac{2}{7}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{21}{8}$

Propiedades de la igualdad

Si $a=b$ y c es cualquier número real, entonces

1. $a+c=b+c$ el mismo número se puede sumar en ambos lados de una igualdad

Propiedades de los números negativos	**Ejemplos**
1. $-(-a)=a$	1. $-(-5)=5$
2. $(-a)b=-(ab)=a(-b)$	2. $(-7)3=-(7\cdot 3)=7(-3)$
3. $(-a)(-b)=ab$	3. $(-7)(-3)=7\cdot 3$

Notación para recíprocos	Ejemplos
Si $a \neq 0$, entonces su reciproco se puede escribir $\frac{1}{a} = a^{-1}$ Es evidente que si $a \neq 0$, entonces	$\frac{1}{3} = 3^{-1}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

Productos donde interviene el cero
1. $a \cdot 0 = 0$ para todo numero real a

Relaciones entre a y $-a$
1. Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo
2. Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo

En la tabla siguiente definimos las relaciones posibles que se pueden dar entre dos números reales a y b.

Considerando los símbolos **mayor que** $(>)$ y **menor que** $(<)$. Estas relaciones se llaman **desigualdades**.

Notación	*Definición*	*Terminología*
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

EJERCICIO. Completa la siguiente tabla.

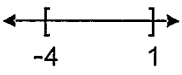
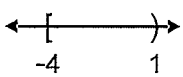
Notación	*Definición*	*Terminología*
7>5	porque 7-5 es positivo	7 es mayor que 5
3<5		
		10 es menor que 13
	porque 5-8 es negativo	
-5<-2		

INTERVALOS

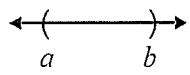
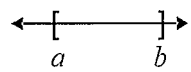
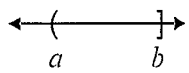
Hasta ahora hemos conocido los signos de desigualdad **mayor que** (>) y **menor que** (<), vamos a introducir los símbolos **mayor o igual que** $(\geq)$ y **menor o igual** que $(\leq)$ para comprender mejor el concepto de intervalo y la ordenación entre dos números reales a y b.

Llamaremos **intervalo** al conjunto de números reales que satisfacen una desigualdad, estos se indican encerrando entre paréntesis dos números reales a y b, es decir (a,b) y/o corchetes $[a,b]$, uno inferior, a y el otro superior, b que nos señalan el conjunto formado por todos los números de la recta numérica entre estos valores. También puede darse una combinación de paréntesis y corchetes.

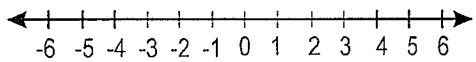
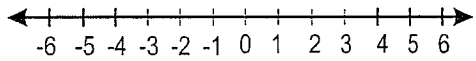
Ilustración

Intervalo	Notación	Desigualdad	Gráfica
Números reales entre 3 y 7	(3, 7)	$3< x <7$	
Números reales mayores o iguales que -4 y menores o iguales a 1	[-4, 1]	$-4 \leq x \leq 1$	
Números reales mayores o iguales que -4 y menores que 1	[-4, 1)	$-4 \leq x < 1$	

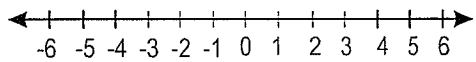
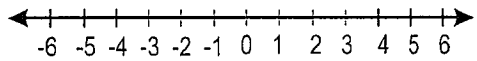
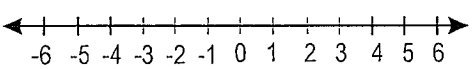
En la tabla de enseguida mostramos la representación y los usos de los diferentes signos de desigualdad

Intervalo	Notación	Desigualdad	Gráfica
Abierto	(a, b)	$a < x < b$	
Cerrado	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Semiabierto por la derecha	$[a, b)$	$a \leq x < b$	
Semiabierto por la izquierda	$(a, b]$	$a < x \leq b$	

EJERCICIOS. Representa en la recta real cada uno de los intervalos siguientes e indica la notación

Intervalo	Notación	Gráfica
1. $2 \leq x \leq 4$		
2. $2 \leq y \leq 5$		

Continúa de la misma manera...

Intervalo	Notación	Gráfica
3. $x < -1$		
4. $x > 7/2$		
5. $-3 \leq x \leq 3$		

Máximo común divisor (mcd) y mínimo común múltiplo (mcm)

Resuelve las siguientes situaciones.

1. Una señora tiene dos retazos de tela de 36m y 48m que quiere dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo?

2. Un almacenista quiere empacar 161kg, 253kg y 207kg de fríjol para tres pedidos diferentes en cajas que contengan costales del mismo peso y que sea el mayor posible. ¿Cuál será el peso de cada costal y cuantos costales deberá haber en cada caja?

Una forma práctica de encontrar la solución de las situaciones anteriores es descomponer primero los números compuestos de cada problema en sus **factores primos**.

Los factores primos de un numero se encuentran dividiendo el numero compuesto entre el menor de sus factores primos y así sucesivamente hasta llegar a la unidad. Por ejemplo descompongamos 36 y 48 en sus factores primos.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Los factores primos de 36 son $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Los factores primos de 48 son $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 = 48$

Máximo común divisor. Es el número mayor de los divisores enteros comunes a esos números. Por ejemplo el de 36 y 48 se obtiene de la siguiente manera.

Se descomponen los números simultáneamente en sus factores primos y enseguida se buscan los factores que tengan en común los números descompuestos, el producto de estos es el **mcd**

36	48	(2)
18	24	(2)
9	12	2
9	6	2
9	3	(3)
3	1	3
1	1	

El **mcd** de 36 y 48 es $2^2 \cdot 3 = 12$, por tanto es la *solución* del primer problema.

Mínimo común múltiplo. Es el menor de los múltiplos enteros comunes a un grupo de números compuestos, es decir es el número menor que puede ser dividido exactamente por todos esos números. Por ejemplo el **mcm** de 36 y 48 se obtiene multiplicando todos los factores primos de ambos.

36	48	2
18	24	2
9	12	2
9	6	2
9	3	3
3	1	3
1	1	

El **mcm** de 36 y 48 es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2 = 144$

Valor absoluto

El valor absoluto de un número a se indica con el símbolo $|a|$ y denota el número de unidades entre el origen y la magnitud de a, sin tomar en cuenta la dirección, y se define como sigue

Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$

Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$

Ejemplos

1. $|5| = 5$, porque $5 > 0$

2. $|-5| = -(-5) = 5$, porque $-5 < 0$

3. $|\sqrt{5} - 5| = 5 - \sqrt{5}$, porque $5 - \sqrt{5} > 0$

4. $|\sqrt{5} - 5| = -(\sqrt{5} - 5)$, porque $\sqrt{5} - 5 < 0$

En general se pude decir que $|a| = |-a|$ para todo número real a

Trigonometría

TRIGONOMETRÍA

- Sistemas de coordenadas
- Funciones
- Gráficas de funciones
- Ángulos
- Funciones trigonométricas
- Gráficas de las funciones trigonométricas
- Verificación de identidades trigonométricas
- Ecuaciones trigonométricas
- Ley de senos
- Ley de cósenos

TRIGONOMETRÍA

La palabra **TRIGONOMETRÍA** está compuesta de dos griegas trigonon significa triángulo y metron medir. Podemos decir que trigonometría significa medidas de los triángulos. Relaciona los lados con sus ángulos.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos y en sistemas de navegación por satélites.

Elementos básicos del método deductivo

Proposición. Es el enunciado de un hecho, ley, principio o de una cuestión por resolver.

Axioma. Es una proposición, que siendo evidente, no requiere demostración.

Postulado. Es una proposición cuya verdad, aunque no tenga la evidencia de un axioma, se admite sin demostración.

Teorema. Es una proposición cuya verdad necesita demostración.

Corolario. Es una proposición que es consecuencia inmediata de otra, y cuya demostración requiere poco o ningún razonamiento nuevo.

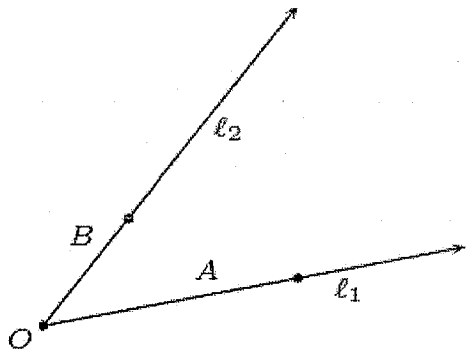
Hipótesis. En un teorema, es lo que se supone dado o cierto. Es la información con la que se cuenta para demostrar el teorema.

Tesis. En un teorema, es lo que se quiere demostrar, la expresión o propiedad geométrica o matemática que se deducirá a partir de la hipótesis.

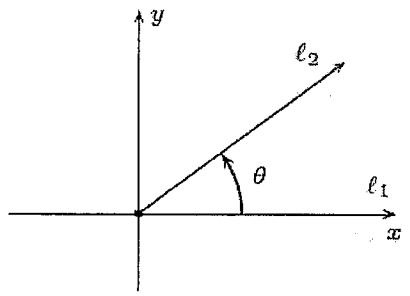
DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

Definición: Un ángulo es la figura formada por dos semirrectas que se interceptan en un punto. Las semirrectas son los lados del ángulo y el punto de intersección es su vértice., en trigonometría con frecuencia se interpretan los ángulos como la rotación de una línea fija *l1* alrededor de uno de sus extremos llamado O de origen hasta la posición especificada por la línea l2 en donde a l1 se denomina lado inicial A y a l2 lado final B pudiendo tener más de una revolución denominándose ángulo $\angle$**AOB**

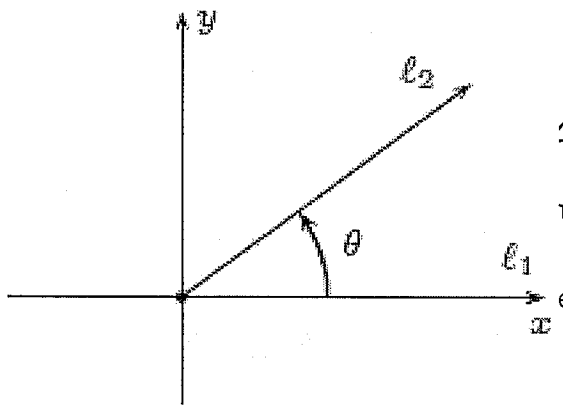
Si se utiliza el sistema de coordenas rectangulares un ángulo se obtiene con el vértice en el origen y hacer que el lado inicial coincide con el eje de las x, los ángulos medidos en el sentido contrario de las manecillas del reloj se consideran positivos (levógiro), si giran el sentido de las manecillas del reloj el ángulo es negativo (dextrógiro), denotándose esta medida por letras griegas como α, β, γ .

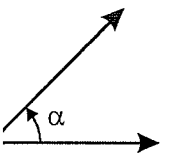


- ℓ_1: lado inicial del ángulo
- ℓ_2: lado terminal del ángulo
- O: vértice del ángulo
- Notación: $\angle AOB$

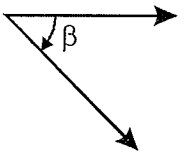


- Vértice O coincide con el origen
- Lado inicial ℓ_1 coincide con el eje x
- Ángulo positivo: ↶
- Ángulo negativo: ↷





ıgulo positivo



Angulo negativo

era:

Ángulo	Definición	Ejemplos
Ángulo agudo θ	0° < θ < 90°	12°, 45°, 89°
Ángulo recto θ	θ = 90°	
Ángulo obtuso θ	90° < θ < 180°	91°, 157°, 179°
Ángulo llano o rectilíneo	θ = 180°	
Ángulo reflejo o entrante	180° < θ < 360°	190°, 240°, 350°

2. Por pares de ángulos:

Pares de ángulos	Definición	Ejemplos
Ángulos complementarios α y β	α + β = 90°	21°,79°; 0°, 90° ; 45°, 45°
Ángulos suplementarios α y β	α + β = 180°	115°, 65° ; 2°, 178° ; 50°, 130°
Ángulos conjugados α y β	α + β = 360°	36°, 324° ; 103°, 257° ; 180°, 180°

SISTEMAS DE UNIDADES PARA MEDIR ÁNGULOS

Medida de un ángulo. Para medir un ángulo dado, se le compara con otro que es la unidad, el número de veces que contiene este ángulo al ángulo unidad, es la medida del ángulo.

La medida de un ángulo puede expresarse en diferentes unidades, pero aquí nosotros vamos a estudiar dos de gran relevancia; el **sistema sexagesimal** y el **sistema cíclico**.

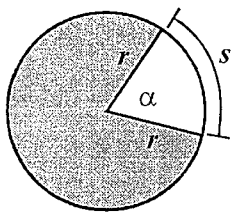
El **sistema sexagesimal** es uno de los sistemas más empleados para medir ángulos y consiste en dividir una circunferencia en *360 partes* iguales llamadas **grados ( )** , el grado en *60 partes* iguales llamadas **minutos (')** y cada minuto en *60 partes* iguales llamadas **segundos (")**.

El **sistema cíclico**, tiene como unidad, la *unidad cíclica* o *unidad circular* y es el ángulo central de una circunferencia, cuyos lados interceptan un arco de longitud igual a la del radio.

Radián es el nombre que se la da a la unidad cíclica en este sistema

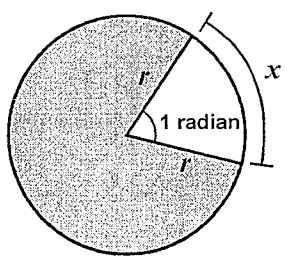
Cuando la longitud de s es igual que la de r , el ángulo α es **1 radián,** es decir;

Si $s = r$; entonces $\alpha = 1\,radian$



EQUIVALENCIA ENTRE LOS SISTEMAS CICLICO Y SEXAGESIMAL

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, y si representamos por x el número de grados de un radián, podemos establecer la siguiente proporción:



$$\frac{x}{r} = \frac{360^\circ}{2\pi r} \quad \text{de donde} \quad x = \frac{360^\circ r}{2\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi};$$

entonces, $x = 57.29578^\circ$, que es el valor de **1 radián en grados**, pero es más fácil y práctico recordar que

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ$$

EJEMPLOS

1. Expresar en radianes el ángulo de 45°.

Para la conversión vamos a multiplicar 45° por el factor $\frac{\pi rad}{180^\circ}$

$$45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} rad = 0.78539 rad$$

---

2. Expresar en radianes el ángulo de 58.25°.

$$58.25^\circ = 58.25^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = 1.01665 rad$$

---

3. Convertir $85^\circ\ 35'$ en unidades cíclicas.

Primero expresemos el ángulo en puros grados

$$85^\circ\ 35' = 85^\circ + \left(\frac{35}{60}\right)^\circ = 85.5833^\circ$$

$$85.5833^\circ = 85.5833^\circ \cdot \frac{\pi rad}{180^\circ} = 1.49371 rad$$

---

4. Transformar $2.5 rad$ en unidades sexagesimales.

Ahora procedemos de forma semejante solo que el factor de conversión es $\frac{180^\circ}{\pi rad}$.

$$2.5 rad = 2.5 rad \cdot \frac{180^\circ}{\pi rad} = 143.23^\circ$$

---

5. Transformar $\frac{2}{3} rad$ en unidades sexagesimales.

$$\frac{2}{3} rad = \frac{2}{3} rad \cdot \frac{180^\circ}{\pi rad} = \frac{120}{\pi} rad = 38.1971^\circ$$

5. Transformar $\frac{2}{3} \pi rad$ en unidades sexagesimales.

$$\frac{2}{3} \pi rad = \frac{2}{3} \pi rad \cdot \frac{180^\circ}{\pi rad} = 120^\circ$$

EJERCICIOS

1. Expresar en radianes los ángulos siguientes.

33.25° =
55° 28' =
36° 25' 40'' =
65° 15' 30''

CONCEPTOS BÁSICOS Y CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

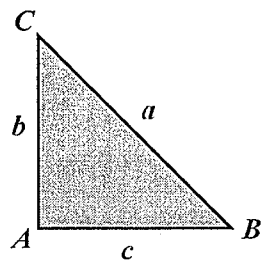
Un triángulo es un área plana delimitada por tres segmentos de recta. Los elementos del triángulo son: tres vértices, tres lados y tres ángulos. La suma de la medida de los tres ángulos internos es 180°.

A cada ángulo interno del triángulo le corresponde un ángulo exterior. La medida de cada ángulo exterior es igual a la suma de la medida de los dos ángulos interiores no adyacentes. La suma de la medida de los tres ángulos exteriores es 360°.

Cada lado del triangulo se designa por regla general con una letra minúscula y al ángulo opuesto al lado le corresponde la misma letra pero mayúscula

a,b,c Lados del triángulo

A,B,C Ángulos del triángulo



Clasificación de los triángulos según sus lados

Triángulo escaleno: Es un triángulo que tiene sus tres lados diferentes.

Triángulo isósceles: Es un triángulo que tiene al menos dos de sus lados iguales.

Triángulo equilátero: Es un triángulo que tiene sus tres lados iguales.

Clasificación de los triángulos según sus ángulos

Triángulo rectángulo: Es un triángulo que tiene un ángulo recto.

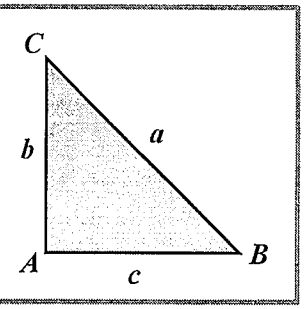
Triángulo obtusángulo: Es un triángulo que tiene un ángulo obtuso

Triángulo acutángulo: Es un triángulo que tiene sus tres ángulos agudos.

Triángulo equiángulo: Es un triángulo que tiene sus tres ángulos iguales.

Para un triangulo rectángulo se designan los lados de la siguiente forma:

Lado	Angulo B	Angulo C
a	hipotenusa	hipotenusa
b	cateto opuesto	cateto adyacente
c	cateto adyacente	cateto opuesto



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para todo triángulo rectángulo se pueden obtener seis relaciones usando las longitudes de sus lados sin importar el tamaño del triángulo si no se varían sus ángulos.

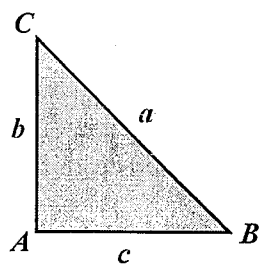
Históricamente las **funciones trigonométricas** de ángulos agudos se han definido como las razones geométricas entre los lados de un triángulo rectángulo.

Razón geométrica. Es la comparación de dos cantidades por división. Por ejemplo; $\frac{3}{5} = 0.6$ significa que 3 es el 60 % de 5.

Definición de las funciones trigonométricas

Para definir las funciones trigonométricas, consideremos un ángulo agudo cualquiera de un triángulo rectángulo, por ejemplo el $\angle B$. Se definen como se muestra enseguida.

Nombre	Definicion	Notacion
seno de B	$\frac{\text{cateto opuesto a } B}{\text{hipotenusa}}$	$sen\ B$
coseno de B	$\frac{\text{cateto adyacente a } B}{\text{hipotenusa}}$	$cos\ B$
tangente de B	$\frac{\text{cateto opuesto a } B}{\text{cateto adyacente a } B}$	$tan\ B$
cotangente de B	$\frac{\text{cateto adyacente a } B}{\text{cateto opuesto a } B}$	$cot\ B$
secante de B	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } B}$	$sec\ B$
cosecante de B	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } B}$	$csc\ B$

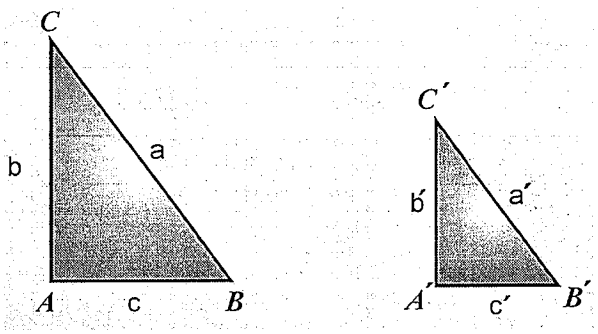


Por la semejanza de triángulos

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Por tanto

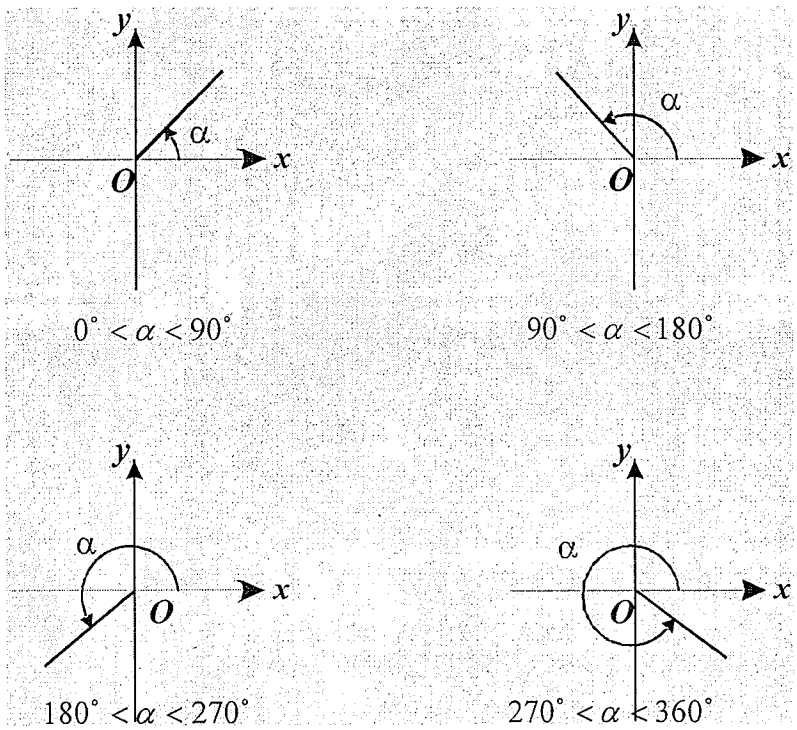
$$senB = senB' = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$



Lo que nos demuestra que los valores de las funciones trigonométricas son independientes de la magnitud de los lados de un triángulo.

Ángulos en los diferentes cuadrantes

A continuación se ilustra la posición de un ángulo α atendiendo a su lado móvil en cada uno de los diferentes cuadrantes del sistema de coordenadas cartesianas



Los signos de las funciones trigonométricas para ángulos de cualesquier magnitud, dependiendo del cuadrante donde quede posicionado el lado móvil del ángulo pueden resumirse en el siguiente cuadro.

Funciones	primer cuadrante	segundo cuadrante	tercer cuadrante	cuarto cuadrante
Seno y cosecante	+	+	-	-
Coseno y secante	+	-	-	+
Tangente y cotangente	+	-	+	-

APLICACIONES

1. Dado $sen\alpha = \frac{4}{5}$, calcular las demás funciones de α teniendo en cuenta su posición en las coordenadas cartesianas.

Existen dos únicas posiciones para el ángulo en esas condiciones, en el primero y segundo cuadrantes por el signo positivo de la ordenada.

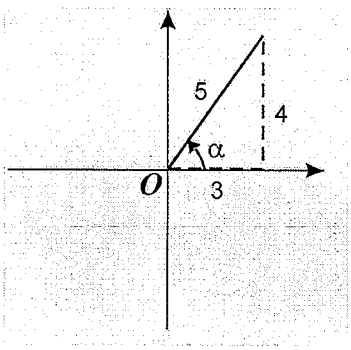
Con el Teorema de Pitágoras calculamos la abscisa; $x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

Primer cuadrante

$sen\alpha = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\tan\alpha = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\cot\alpha = \frac{3}{4}$

$\sec\alpha = \frac{5}{3}$ $\quad$ $\csc\alpha = \frac{5}{4}$

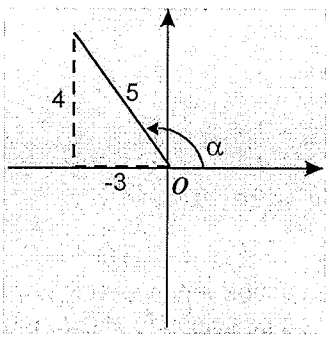


Segundo cuadrante

$sen\alpha = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$

$\tan\alpha = \frac{4}{-3}$ $\quad$ $\cot\alpha = \frac{-3}{4}$

$\sec\alpha = \frac{5}{-3}$ $\quad$ $\csc\alpha = \frac{5}{4}$



2. Dado $\tan\alpha = \frac{3}{2}$, calcular las demás funciones de α teniendo en cuenta su posición en las coordenadas cartesianas.

Las posiciones para el ángulo en esas condiciones, están en el primero y tercer cuadrantes por el signo positivo de la tangente.

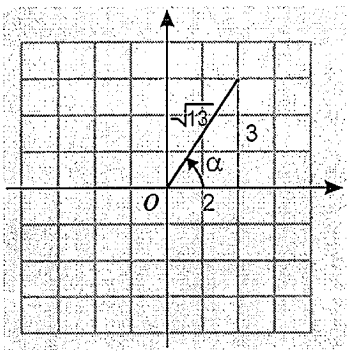
Con el Teorema de Pitágoras calculamos la hipotenusa; $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

Primer cuadrante

$$sen\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{2} \qquad \cot\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

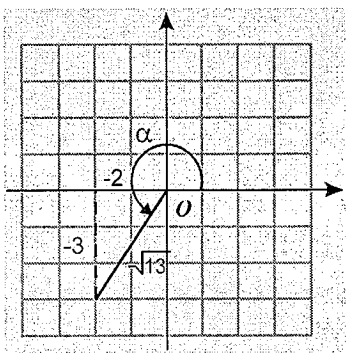


Tercer cuadrante

$$sen\alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

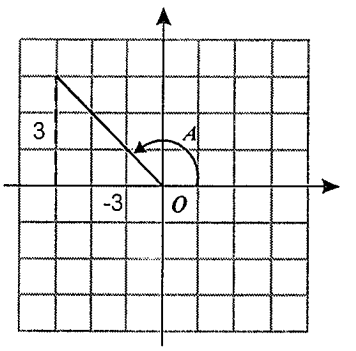
$$\tan\alpha = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \qquad \cot\alpha = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{13}}{-2} \qquad \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{-3}$$

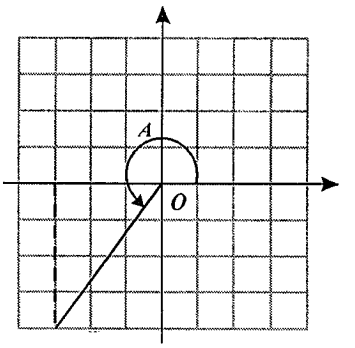


EJERCICIOS

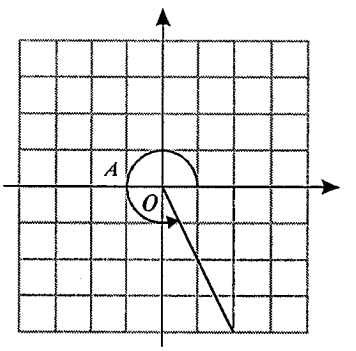
1. Dada la gráfica del ángulo A en las coordenadas cartesianas, calcular las seis funciones trigonométricas de A.



2. Dada la gráfica del ángulo A en las coordenadas cartesianas, calcular las seis funciones trigonométricas de A.

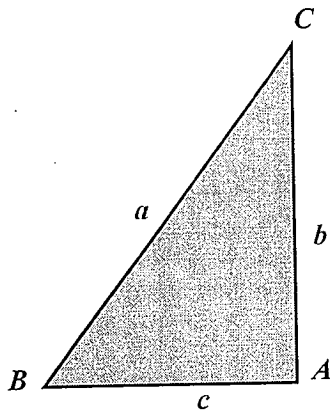


3. Dada la gráfica del ángulo A en las coordenadas cartesianas, calcular las seis funciones trigonométricas de A.



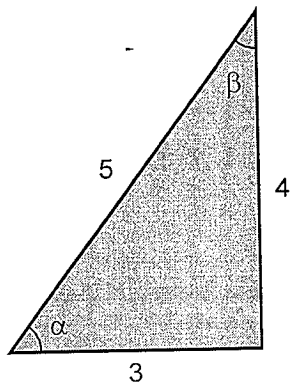
Considerando las definiciones anteriores y el triángulo que está a la derecha se pueden completar las funciones trigonométricas de los ángulos indicados.

Funciones del $\angle B$	Funciones del $\angle C$
$SenB = \frac{b}{a}$	$SenC = \frac{c}{a}$
$CosB = \frac{c}{a}$	$CosC = \frac{b}{a}$
$TanB = \frac{b}{c}$	$TanC = \frac{c}{b}$
$CotB = \frac{c}{b}$	$CotC = \frac{b}{c}$
$SecB = \frac{a}{c}$	$SecC = \frac{a}{b}$
$CscB = \frac{a}{b}$	$CscC = \frac{a}{c}$



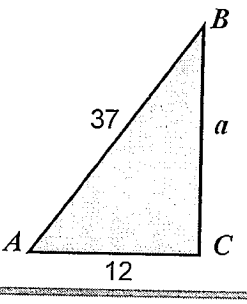
Esto se relaciona de la siguiente manera.

Funciones del $\angle\alpha$	Funciones del $\angle\beta$
$Sen\alpha = \frac{4}{5}$	$Sen\beta = \frac{3}{5}$
$Cos\alpha = \frac{3}{5}$	$Cos\beta = \frac{4}{5}$
$Tan\alpha = \frac{4}{3}$	$Tan\beta = \frac{3}{4}$
$Cot\alpha = \frac{3}{4}$	$Cot\beta = \frac{4}{3}$
$Sec\alpha = \frac{5}{3}$	$Sec\beta = \frac{5}{4}$
$Csc\alpha = \frac{5}{4}$	$Csc\beta = \frac{5}{3}$



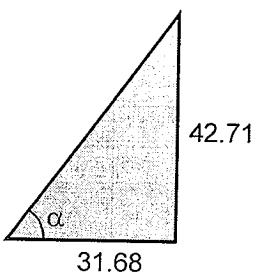
EJERCICIOS

1. En el triángulo de la figura, calcular las seis funciones del ángulo *A*.

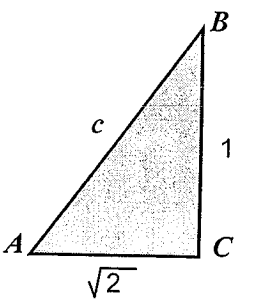


=35

2. En el triángulo de la figura, calcular las seis funciones del ángulo α .



3. En el triángulo de la figura, calcular las seis funciones del ángulo ***B***.

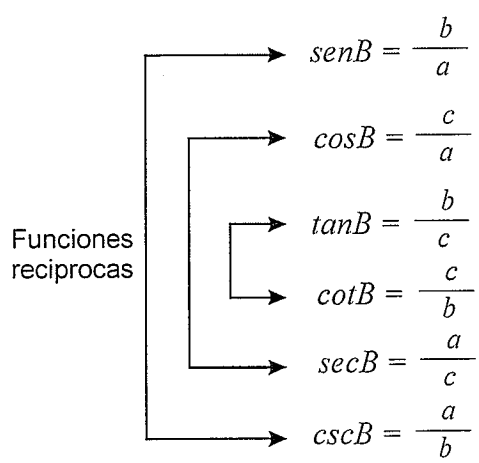


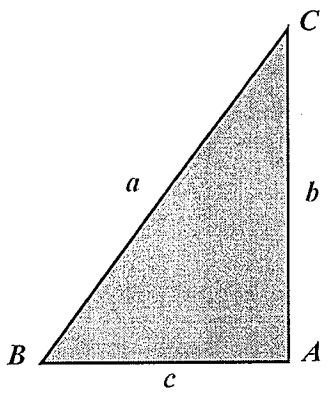
4. Dado el triángulo *BAC* rectángulo en *A*, con $a = 4$ y $b = 1$ Hallar las seis funciones del ángulo *B*.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

En el ejercicio anterior te fijaste que cada uno de los productos dio como resultado 1, precisamente es el concepto de funciones recíprocas.

Funciones recíprocas. Dos funciones trigonométricas cuyo producto es 1, son recíprocas.





Demostración

1. $senB \csc B = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$ $\quad$ $senB \csc B = 1$

2. $\cos B \sec B = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1$ $\quad$ $\cos B \sec B = 1$

3. $\tan B \cot B = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$ $\quad$ $\tan B \cot B = 1$

EJERCICIOS

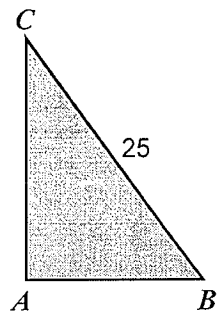
1. ¿Puede valer 2 el seno de un ángulo? ¿Por qué?

2. ¿Es admisible el valor de 0.75 para la secante de un ángulo? ¿Por qué?

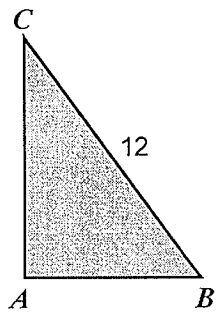
3. Si el seno de un ángulo es igual a $\frac{2}{5}$. ¿Cuánto vale la cosecante del mismo ángulo? Justifica tu respuesta dibujando un triangulo rectángulo.

4. La secante de un ángulo vale 7. ¿Cuánto vale el coseno del mismo ángulo? Justifica tu respuesta dibujando un triángulo rectángulo.

5. En el triángulo de la figura él $\cos B = \frac{3}{5}$, si la hipotenusa vale 25cm. ¿Cuánto valen los catetos?

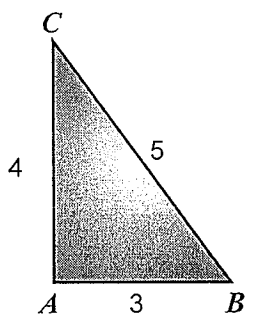


5. En el triángulo de la figura el $\cos B = \frac{4}{3}$, si la hipotenusa vale 12cm. ¿Cuánto valen los catetos?



5. En el triángulo de la figura, calcular las funciones que se te piden a continuación

$senB =$	$\cos C =$
$\tan B =$	$\cot C =$
$\sec B =$	$\csc C =$



FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS COMPLEMENTARIOS

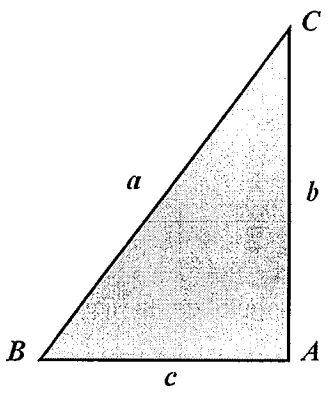
Dos ángulos son complementarios cuando entre ambos suman 90°, de manera que en un triángulo rectángulo, sus dos ángulos agudos son complementarios.

Al calcular las funciones de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es fácil observar que las funciones de un ángulo agudo son iguales que las cofunciones del ángulo complementario, es decir este es el significado del prefijo **"co"**

Funciones	cofunciones
$senB = \frac{b}{a}$	$cosC = \frac{b}{a}$
$tanB = \frac{b}{c}$	$cotC = \frac{b}{c}$
$secB = \frac{a}{c}$	$cscC = \frac{a}{c}$

Funciones	cofunciones
$senC = \frac{c}{a}$	$cosB = \frac{c}{a}$
$tanC = \frac{c}{b}$	$cotB = \frac{c}{b}$
$secC = \frac{a}{b}$	$cscB = \frac{a}{b}$

Conclusión: Las funciones de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son igual que las cofunciones de su complemento.



VALORES NATURALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Para calcular los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos, en el pasado se construyeron tablas que facilitaban los cálculos trigonométricos, pero en la actualidad con el desarrollo de las calculadoras y la tecnología han caído en desuso, y por esa razón no vamos abordar el manejo de tales tablas.

Dependiendo de la marca de tu calculadora puedes calcular el valor de una función trigonométrica directa o bien una inversa, es decir son dos los problemas fundamentales que tenemos aquí;

1. Dado un ángulo calcular sus funciones trigonométricas, o
2. Dada una función trigonométrica calcular el ángulo

EJEMPLOS

1. Calcular $sen25.37^\circ$. En tu calculadora esta es una posible secuencia para calcular este valor.

Ingresa

Presiona

Este es el resultado

2. Hallar tan $47^\circ 35'$.

Ingresa

Presiona

Este es el resultado

El ángulo de $47^\circ 35'$ lo puedes ingresar como 47.58333° si conviertes los minutos en grados de la siguiente manera

$$47^\circ 35' = 47^\circ + \left(\frac{35}{60}\right)^\circ$$

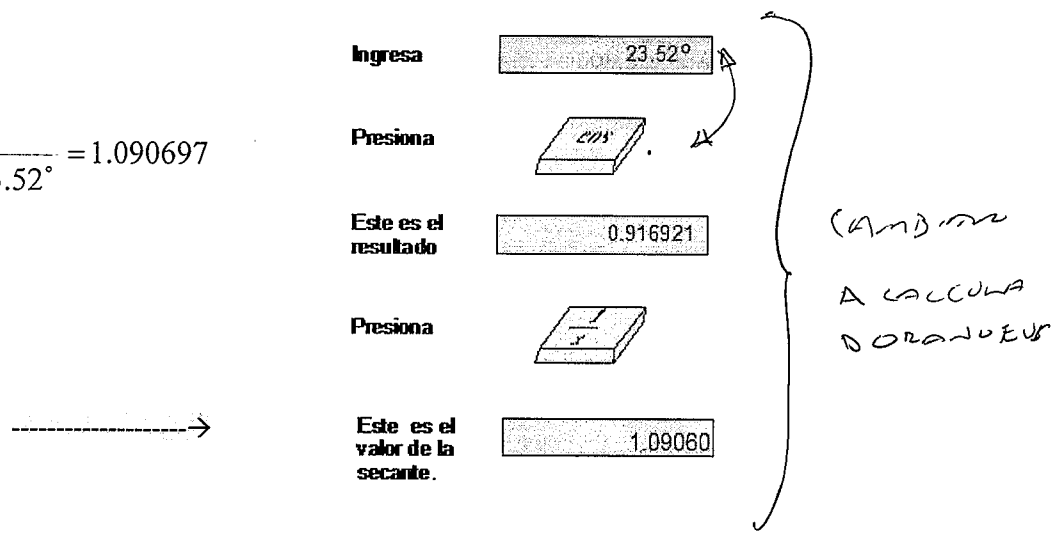
$$= 47.58333^\circ$$

3. Calcular $\sec 23.52^\circ$.

En tu calculadora podrás observar que no tiene las funciones cotangente, secante ni cosecante, por ser recíprocas de tangente, coseno y seno respectivamente del mismo ángulo y además porque no son de uso frecuente en la resolución de triángulos.

De manera que:

$$\sec 23.52^\circ = \frac{1}{\cos 23.52^\circ} = 1.090697$$



4. Dado, $senA = .83216$ calcular el valor del ángulo A.

Este es el *caso inverso* de los ejemplos anteriores, ya que ahora conocemos la función del ángulo y tenemos que determinar el valor del ángulo; aquí esta como

Ingresa 0.83216

Presiona shift

Presiona sen-1 sen

Este es el valor del ángulo. 56.3212° significa que $A = 56.3212^\circ$

EJERCICOS

1. Calcular el valor natural de cada una de las siguientes funciones.

$sen23.57^\circ =$ 0.3987	$\tan 35^\circ 40' =$ 0.7176	$\sec 23^\circ 30' =$ 1.0904
$\cot 14^\circ 17' =$ 3.9279	$\csc 72.75^\circ =$ 1.047	$sen85.25^\circ =$ 0.9908
$\tan 45^\circ =$ 1	$sen30^\circ =$ 0.5	$\cos 60^\circ =$ 0.5
$\cos 75.25^\circ =$ 0.2546	$\tan 23.57^\circ =$ 0.4362	$\cot 66.43^\circ =$ 0.4362
$sen90^\circ =$ 1	$sen0^\circ =$ 0	$sen57^\circ =$ 0.8386

2. Dado el valor de la función trigonométrica, determinar el ángulo correspondiente.

$senA = 0.5225$ $A =$ 31.5	$senx = 0.7698$ $x =$ 50.33	$senB = 0.1576$ $B =$ 9.0154
$\cos A = 0.8542$ $A =$ 31.3285	$\cos y = 0.2634$ $y =$ 74.728	$\cos C = 0.5225$ $C =$ 58.4999
$\tan A = 2.2290$ $A =$ 65.8374	$\tan x = 19.76$ $x =$ 87.1028	$\cot y = 42.75$ $y =$ 1.34

3. Concluye si hay diferencia entre $2sen30^\circ$ y $sen(2 \cdot 30^\circ)$.

51

4. ¿Es lo mismos $2\tan 30^\circ$ que $\tan 60^\circ$?

NO

5. ¿El $\cos 30^\circ$ es la mitad qué $\cos 60^\circ$?

No

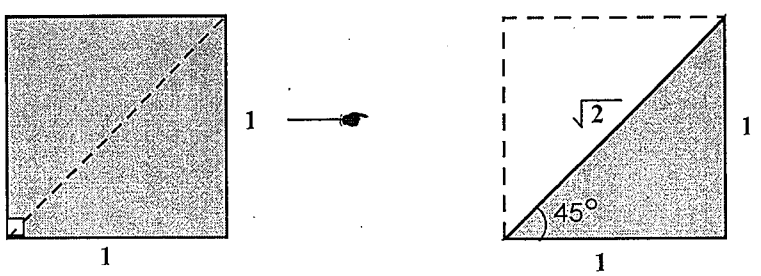
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 30°, 45° Y 60°

Para determinar el valor de las funciones de un ángulo particular como el de 45° sin necesidad de utilizar calculadora observa la siguiente secuencia gráfica.

1. Consideremos un cuadrado de lado 1

2. con una diagonal dividamos el cuadrado en dos triángulos iguales como el de la derecha.

3. Calculemos la hipotenusa con el teorema de Pitágoras



$$sen45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

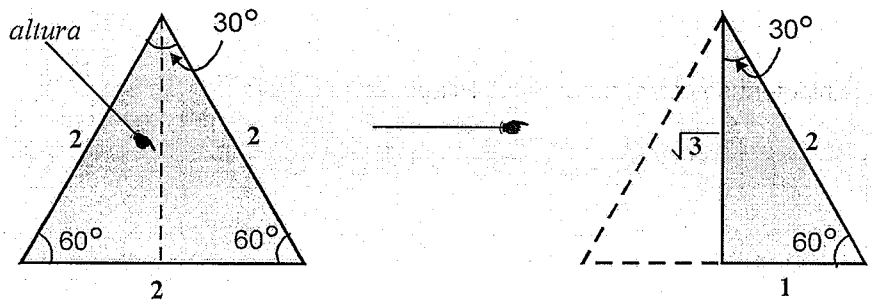
$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad \csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° pueden calcularse dibujando un triangulo equilátero de lado 2 y procediendo de manera análoga como con la que calculamos las funciones de 45°.

1. Consideremos un triángulo equilátero de lado 2.

2. Dibujemos una de las alturas del triángulo equilátero para dividirlo en dos triángulos rectángulos congruentes.

3. Calculemos el valor de dicha altura utilizando el teorema de Pitágoras.



Funciones de 30°

$$sen30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 30^\circ = 2$$

Funciones de 60°

$$sen60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

EJERCICIOS

1. Si la diagonal de un cuadrado mide $4\sqrt{2}$. ¿Cuál es el área del cuadrado?

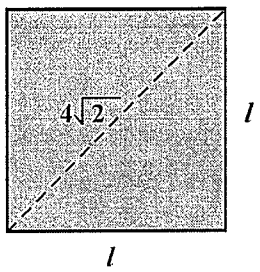
Respuesta. 16.

$l \times l$

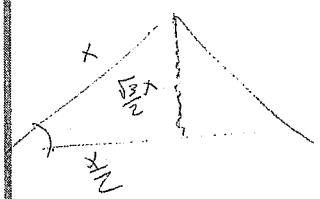
$\frac{l^2}{2} = 4\sqrt{2}$

$(4\sqrt{2})^2 = l^2 + l^2$

$2l^2 = 16(2)$ $\quad l = \sqrt{16}$ $\quad l = 4$ $\quad \therefore A = 16$



2. Demostrar que en un triángulo equilátero de lado x, su altura mide $\frac{\sqrt{3}}{2}x$



$\sen 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 60 =$

$\cos 60 = \frac{\frac{x}{2}}{x}$

$\sen 60 = \frac{h}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{x}$

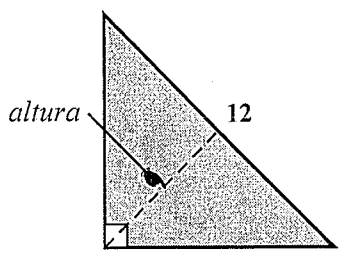
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

3. En un triángulo rectángulo e isósceles con hipotenusa 12, ¿Cuál es la longitud de la altura a la hipotenusa?

$\cos 45 =$

$\tan 45 = \frac{6}{a}$

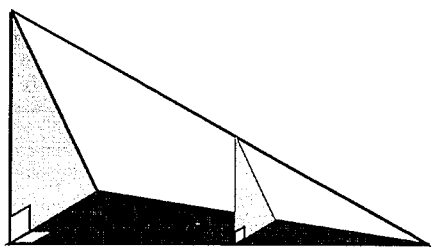
$a = \frac{6}{\tan 45} = 6$



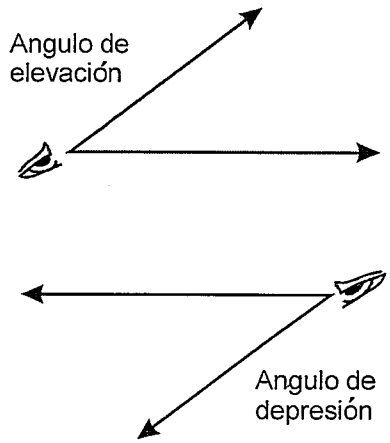
RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Finalmente la trigonometría tiene como propósito principal resolver situaciones que pueden ser modeladas por un triángulo.

Las situaciones más sencillas de modelar ocurren cuando involucran a triángulos rectángulos. Determinar las medidas de los lados y ángulos de un triángulo se conoce como la resolución del triángulo.



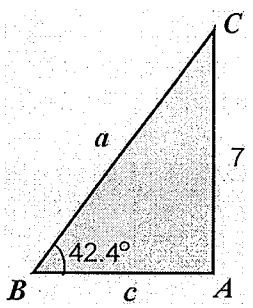
Con frecuencia en la resolución de triángulos debemos de considerar ángulos formados por la horizontal y la línea de visibilidad de un observador. Cuando ocurre que la línea de visibilidad está por encima de la horizontal, se llama ángulo de elevación y si está por debajo se llama ángulo de depresión.



EJEMPLOS

1. Resolver el triángulo rectángulo de la figura mostrada.

Solución



$\angle C = 90^\circ - 42.4^\circ = 47.6^\circ$; ángulos complementarios

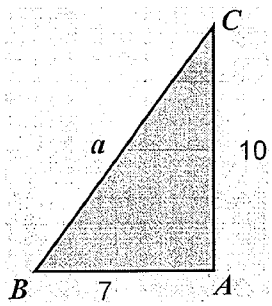
$\frac{7}{a} = sen42.4^\circ$, despejando; $a = \frac{7}{sen42.4^\circ} \approx 10.3810$

$\frac{7}{c} = \tan 42.4^\circ$, despejando; $c = \frac{7}{\tan 42.4^\circ} \approx 7.6659$

Evidentemente el cateto c podríamos haberlo obtenido a partir del teorema de Pitágoras;

$$c \approx \sqrt{(10.8)^2 - (7)^2} \approx \sqrt{58.7672} \approx 7.6659$$

2. Resolver el triángulo rectángulo de la figura mostrada.



Solución

La hipotenusa a la calculamos con el Teorema de Pitágoras;

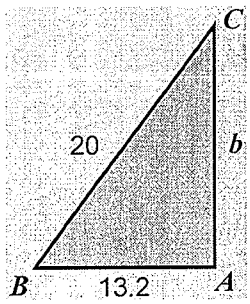
$$a = \sqrt{(10)^2 + (7)^2} = \sqrt{149} \approx 12.2065$$

$TanB = \dfrac{10}{7} \approx 1.4285$, entonces;

$$B = \tan^{-1}(1.4285) \approx 55.0079^\circ$$

$$\angle C = 90^\circ - 55.0079^\circ = 34.9921^\circ$$

3. Resolver el triángulo rectángulo de la figura mostrada.



Solución

El cateto c lo calculamos con el Teorema de Pitágoras;

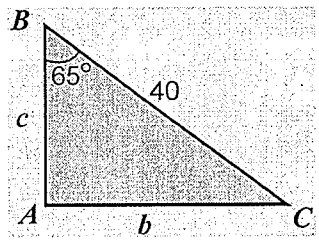
$$c \approx \sqrt{(20)^2 - (13.2)^2} \approx \sqrt{225.76} \approx 15.0253$$

$CosB = \dfrac{13.2}{20} = 0.6600$, entonces;

$$B = \cos^{-1}(0.6600) \approx 48.7001^\circ$$

$$\angle C = 90^\circ - 48.7001^\circ = 41.2998^\circ$$

4. Resolver el triángulo rectángulo de la figura mostrada.



Solución

Podemos usar la función $senB$ o $\cos B$

$sen65^\circ = \dfrac{b}{40}$, despejando $b = 40sen65^\circ = 36.25$

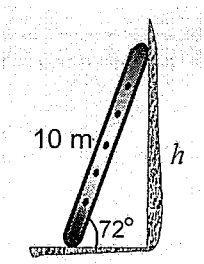
$Cos65^\circ = \dfrac{c}{40}$; despejando $c = 40\cos 65^\circ = 16.9047$

$$\angle C = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

5. Una escalera de $10\,m$ esta recargada sobre una pared. ¿Qué altura alcanza si forma con el suelo un ángulo de 72°?

Por los datos que tenemos, la sugerencia es hacer uso de la función $sen72^\circ$; tenemos que

$$\frac{h}{10} = sen72^\circ \quad \Rightarrow \quad h = 10sen72^\circ = 9.51m$$

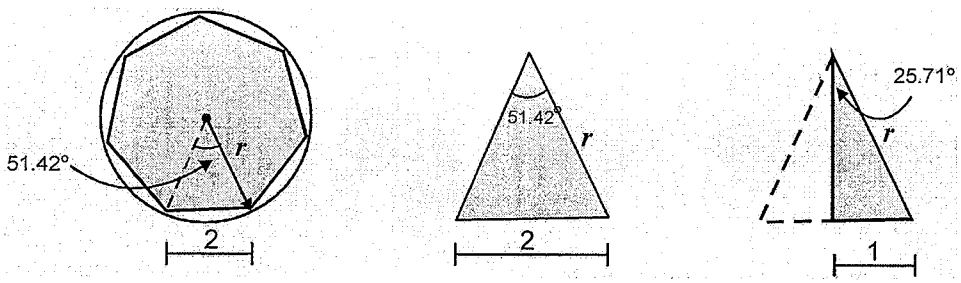


6. ¿Cuál es el radio de una circunferencia que inscribe a un heptágono regular de 2 cm de lado?

El ángulo central que interceptan dos radios de la circunferencia es $\frac{360^\circ}{7} = 51.42^\circ$ y forman junto con el lado del polígono un triángulo isósceles como se muestra abajo.

Por tanto siguiendo la secuencia gráfica de abajo,

$$\frac{1}{r} = sen25.71^\circ \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{sen25.71^\circ} = 2.3051cm$$

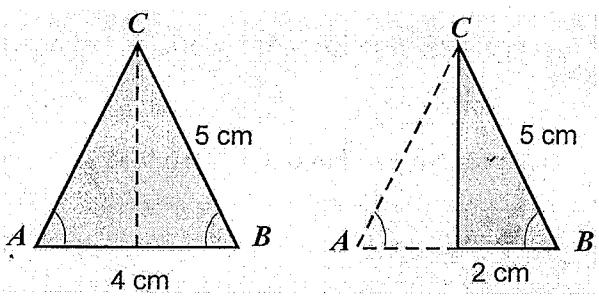


7. La base de un triángulo isósceles mide 4 cm, sí cada uno de sus lados iguales mide 5cm. Calcular el valor de los ángulos iguales.

Aquí la pertinencia es usar la razón trigonométrica

$$\cos A = \cos B = \frac{2}{5} = 0.4$$

Entonces $A = B \approx 66.4218^\circ$



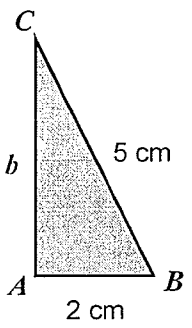
EJERCICIOS

1. Resolver el siguiente triángulo rectángulo. Es decir, calcular el lado b, y los ángulos B y C.

$\cos B = \frac{2}{5}$

$B = 66.42°$

$C = 23.57°$

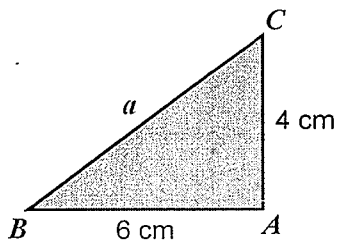


2. Resolver el siguiente triángulo rectángulo. Es decir, calcular la hipotenusa, y los ángulos B y C.

$\tan B = \frac{4}{6}$

$B = 33.69°$

$C = 56.3099°$



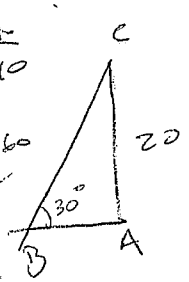
3. Un triángulo BAC es rectángulo en A. Si el cateto $b = 20$, Hallar los demás elementos del triángulo. Bosqueja la figura. Si el ángulo B=30°.

$\sin 30 = \frac{20}{h}$ $\sec 60° = \frac{a}{40}$

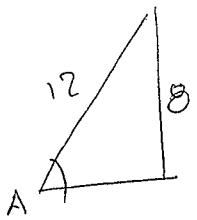
$h = 40$

$a = 40 \sec 60$

$C = 90° - 30° = 60°$ $a = 34.64$



4. Un obrero tiene una escalera de 12 metros. ¿Qué ángulo le debe hacer formar con el suelo para alcanzar una altura de 8 metros? Haz un esquema de la situación.



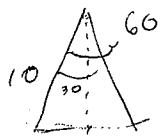
$\sin A = \frac{8}{12}$

$A = 41.81^\circ$

5. ¿Cuál es la longitud de la apotema y el área de un hexágono inscrito en una circunferencia de radio 10 cm? Dibuja el hexágono inscrito utilizando tus reglas y tu compás.

Hexagono = 6 lados

$\therefore 360^\circ/6 = 60^\circ$



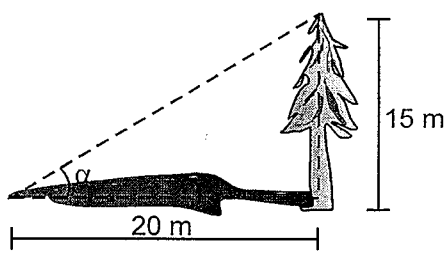
$\cos 30^\circ = \frac{ap}{10}$

apotema = 8.66

6. Un árbol de 15 metros de altura proyecta una sombra de 20 metros. ¿Cuál es el ángulo que forma el sol con el horizonte?

$\tan \alpha = \frac{15\ m}{20\ m} =$

$\alpha = 36.86^\circ$



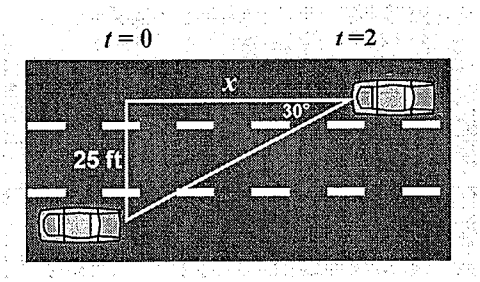
MÁS EJEMPLOS

11. Un automóvil que lleva una velocidad de $50mph$ viaja en el carril derecho de una carretera que tiene tres carriles en cada dirección. Otro auto lo rebasa a su izquierda $(\approx 25\ ft)$, y 2 segundos después se estima que el ángulo entre la dirección del movimiento y su línea de visibilidad hacia la camioneta es de aproximadamente 30°. ¿A qué velocidad está viajando el auto que rebasó?

Fácilmente se puede ver que el lado conocido se relaciona con el lado x considerando la función tangente.

$$\frac{x}{25} = \tan 60^\circ \quad \Rightarrow \quad x = 25\tan 60^\circ$$

$$x \approx 43.3012\,ft$$



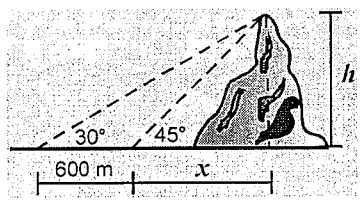
Por tanto la velocidad del auto que rebasó en esos 2 segundos con *relación al auto rebasado* es;

$$v = \frac{43.3012\,ft}{2seg} = 21.65\frac{ft}{seg}\cdot\frac{1milla}{5280\,ft}\cdot\frac{3600seg}{1hr} = 14.76mph$$

12. Desde el nivel del piso, el ángulo de elevación con respecto a un risco distante es de 30°. Al caminar 600 metros directamente hacia la base del risco, su ángulo de elevación se convierte en 45°. ¿Cuál es la altura h del risco?

Para la solución vamos hacer un esquema como el mostrado a la derecha, por tanto,

$$\frac{h}{x} = \tan 45^\circ \quad \Rightarrow \quad h = x\tan 45^\circ = x$$



También

$$\frac{h}{x+600} = \tan 30^\circ; \Rightarrow \quad h = (x+600)\tan 30^\circ$$

$$h = 0.57735x + 346.4101$$

Igualando las dos ecuaciones que resuelven h encontramos el valor de x.

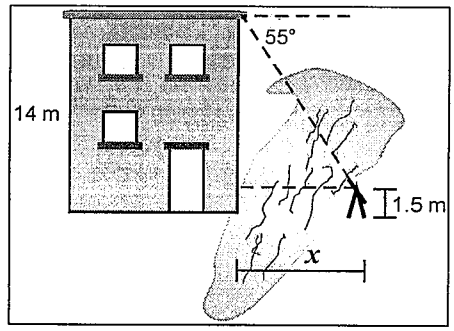
$$0.57735x + 346.4101 = x \quad \text{resolviendo esta ecuación} \quad x = \frac{346.4101}{0.42265} \approx 819.61$$

Por tanto $\boxed{h = x = 819.61m}$

13. Desde lo alto de un edificio de 14 metros, a cuyo pie pasa un río el ángulo de depresión del borde de la orilla opuesta es de 55°. ¿Cuál es el ancho del río si el aparato con que se midió el ángulo mide 1.5 metros?

$$Tan35^\circ = \frac{x}{14-1.5} = \frac{x}{12.5}$$

$$x = 12.5 \tan 35^\circ = 8.7525m$$



EJERCICIOS FINALES

10. Desde la punta B de una torre, el ángulo de depresión de la punta D de otra torre, que dista 30 metros de la primera, es de 28°. Si la torre más alta mide 62 metros, ¿cuál es la altura de la torre menor?

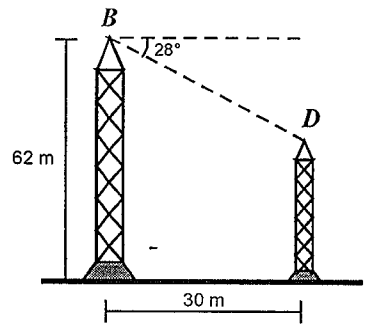
~~Sen 28° = 30~~

$\tan 28^\circ = \frac{h}{30}$

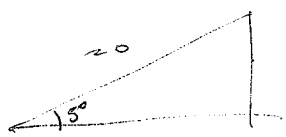
$h = 15.95^\circ m$

$62 - 15.95$

altura = 46.04m



11. Una rampa de 20 metros de largo esta inclinada 5° con respecto al nivel del piso. ¿Qué tanto se eleva la rampa sobre el nivel del piso?



$\text{Sen } 5^\circ = \frac{h}{20}$

alt. = 1.74 m

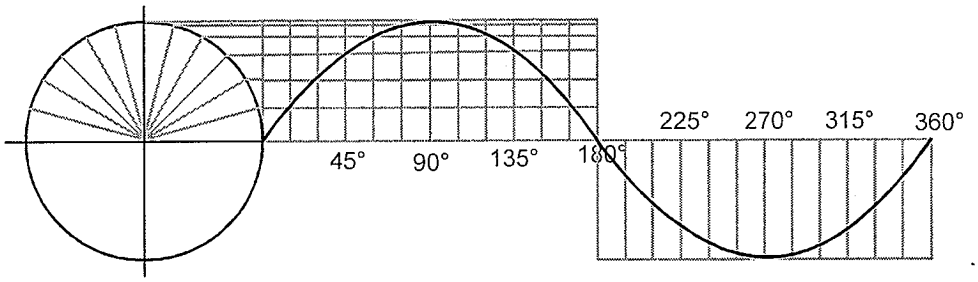
GRAFICAS DE LAS FUNCIONES SENO, COSENO Y TANGENTE

Gráfica de la función seno (senoide)

Para bosquejar la gráfica de la función seno pueden tomarse valores de ángulos de 15 en 15 grados, calcular los valores correspondientes y construir una tabla como la siguiente.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	...
$senx$	0	0.26	0.50	0.70	0.86	0.96	1	0.96	0.86	0.70	...

Los pares de valores se grafican en las coordenadas cartesianas y se traza la curva, o bien se traza un círculo trigonométrico, se dibujan radios cada 15 grados y a partir de la intersección de estos con la circunferencia se trazan horizontales como se muestra en la figura, donde se crucen con rectas verticales trazadas cada 15 grados son puntos de la curva senoide. Recuerda que el círculo trigonométrico tiene radio 1.



senoide

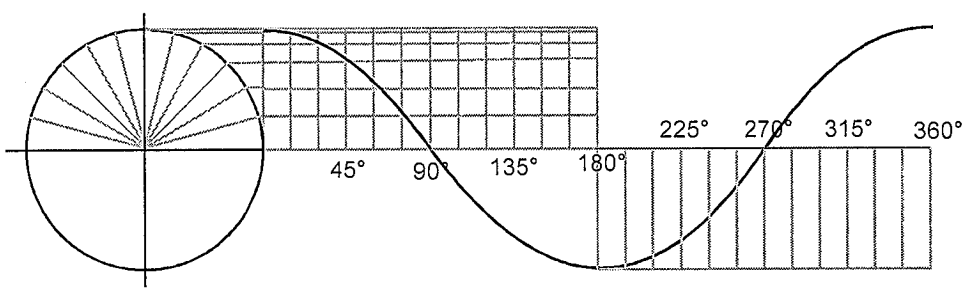
Conclusiones:

1. La curva es indefinida en ambos sentidos en el eje de las equis.
2. La gráfica se repite cada 360 grados.
3. La función es positiva en el primero y segundo cuadrantes.
4. La función crece en el primero y cuarto cuadrantes y decrece en el segundo y tercero.

Gráfica de la función coseno (cosenoide)

Para su gráfica se procede de manera análoga que la figura anterior.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	...
$cosx$	1	0.97	0.87	0.70	0.5	0.26	0	-0.26	-0.5	-0.70	...



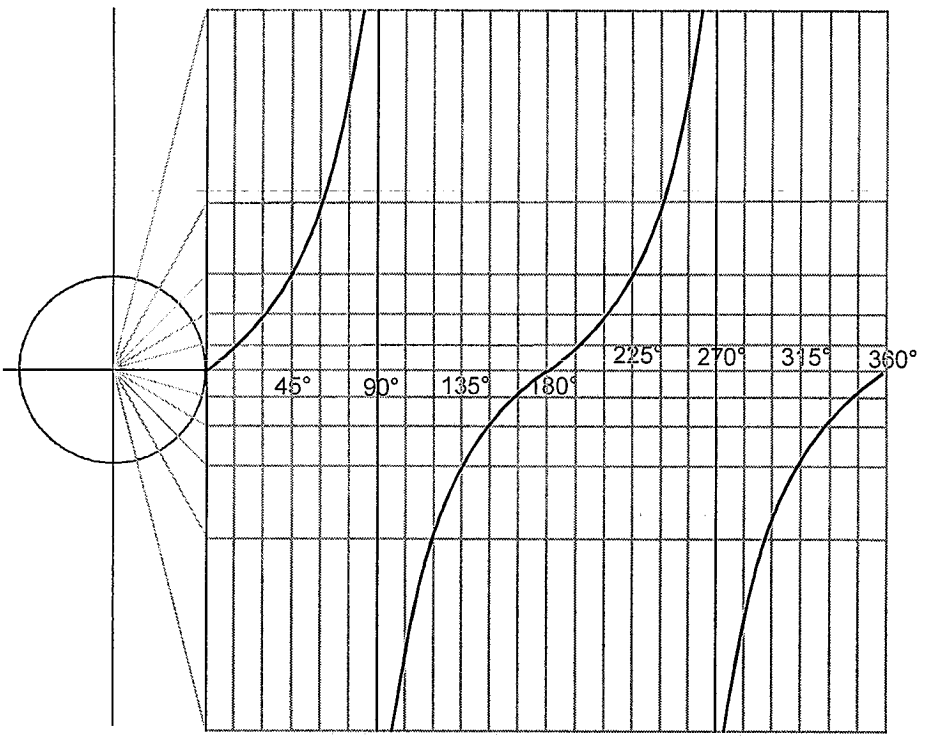
cosenoide

Conclusiones:
1. La curva es indefinida en ambos sentidos en el eje de las equis.
2. La gráfica se repite cada 360 grados.
3. La función es positiva en el primero y cuarto cuadrantes.
4. La función decrece en el primero y segundo cuadrantes y crece en el tercero y cuarto.

Gráfica de la función tangente (tangentoide)

Siguiendo el mismo procedimiento que las gráficas anteriores resulta la curva de las variaciones de la función tangente.

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	...
$tanx$	0	0.26	0.57	1	1.73	3.73	$\pm\infty$	-3.73	-1.73	-1	...



tangentoide

Conclusiones:

1. La curva es indefinida cerca de los 90 grados.
2. Se repite cada 180 grados.
3. Es positiva en el primer y tercer cuadrantes y negativa en el segundo y cuarto cuadrantes.
4. Pierde su continuidad a los 90°, 270°, 450°, etc.