

---

# ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES

Mario E. Salgado

Juan I. Yuz

Ricardo A. Rojas

Departamento de Electrónica  
Universidad Técnica Federico Santa María  
Valparaíso, CHILE

---

PRIMERA EDICIÓN CORREGIDA  
(Compilación 13 de abril de 2012).

Texto disponible bajo licencia [Creative Commons](#).



VALPARAÍSO, CHILE.



# Prefacio de la primera edición

La noción de sistema resulta sumamente poderosa para la descripción, análisis y diseño tanto en ingeniería como en otras áreas del conocimiento, principalmente porque permite describir en forma abstracta un fenómeno en base al objetivo que el observador/ingeniero requiera en cada caso particular.

En este texto abordamos el análisis de un tipo particular de sistemas, aquellos conocidos como sistemas **lineales**. Esta propiedad, si bien no es común en sistemas físicos reales, permite hacer uso de una gama de herramientas de análisis matemático, que han demostrado ser de gran utilidad, a pesar de las simplificaciones inherentes involucradas en la representación lineal de los sistemas.

La teoría de los sistemas lineales tuvo un rápido crecimiento y sostenida consolidación desde mediados del siglo veinte. Este desarrollo fue sustentado por el trabajo pionero de Bode, Routh, Nyquist, Kalman y muchos otros investigadores. Ellos construyeron, a su vez, sobre la teoría matemática existente de los siglos pasados en áreas tan diversas como, por ejemplo, el cálculo diferencial e integral de Newton, las ecuaciones diferenciales y la teoría de funciones de variables complejas.

Más adelante, el desarrollo y expansión de la tecnología digital hicieron necesaria la ampliación del campo de los sistemas lineales para incluir el análisis, la síntesis y el diseño de sistemas que operan en tiempo discreto. Nuevas herramientas matemáticas debieron entonces incorporarse al estudio de los sistemas lineales.

Un aspecto clave es no perder de vista que el interés de la Ingeniería en los sistemas lineales está ligado a la posibilidad de emplearlos como **modelos** suficientemente precisos para describir sistemas reales, cualquiera sea su naturaleza. En cualquier curso sobre sistemas lineales, el estudiante debe ser advertido, desde un comienzo, sobre el problema subyacente de fidelidad de la representación final, y el tema debe ser reiterado a lo largo del curso. También es necesario enfatizar que los sistemas reales no son lineales; sin embargo, es igualmente necesario enfatizar que la pérdida de precisión al modelarlos como sistemas lineales es usualmente compensada por el traslado del problema a un campo dotado de herramientas matemáticas poderosas. Por otro lado, es conveniente precisar que

existen sistemas reales, como aquellos que incluyen dispositivos de conmutación, que simplemente no pueden ser modelados como sistemas lineales, ya que se pierde la esencia del sistema original.

Si bien la teoría de los sistemas lineales tiene un interés en sí misma como objeto de estudio matemático, en este libro el enfoque es distinto, más orientado al estudiante de ingeniería: se trata de estudiar esta teoría como soporte para el análisis, la síntesis y el diseño de sistemas de procesamiento de señales, de sistemas de control automático, sistemas económicos, entre otros. El propósito es que el lector, sin abandonar ni menospreciar el rigor requerido por esta teoría, la conciba como una herramienta para entender, analizar y resolver problemas asociados a fenómenos y sistemas en ingeniería. Esto nos parece necesario con el fin de evitar la frecuente confusión entre los estudiantes de ingeniería, que lleva a subvertir los roles del problema y la herramienta, y centrar su atención en la formalidad y la técnica matemática más que en los conceptos y la interpretación de los resultados de la teoría de los sistemas lineales.

La organización del texto, entre otros elementos, da soporte a esa orientación al incluir un conjunto de extensos apéndices. En estos apéndices se han condensado fundamentos matemáticos, detalles técnicos y una serie de demostraciones. Esta estructura de apéndices tiene un doble propósito: primero, se proporciona fundamento detallado a muchos de los resultados presentados en el cuerpo principal, y segundo, evita interrumpir la discusión principal (hasta donde ello es posible). Pensamos también que este énfasis en los conceptos más que en la utilería matemática debe reflejarse en el esfuerzo que se pide a los estudiantes del tema. La idea es que ese esfuerzo esté orientado a la comprensión conceptual más que a la resolución manual de problemas. Por otro lado pensamos que quien estudie el tema, debe ser capaz de resolver los problemas de principio a fin. Con este objeto, nos parece fundamental el uso intensivo de paquetes de *software* para simulación, tales como SIMULINK de MATLAB . También tiene especial utilidad el uso de *software* de matemática simbólica, como MAPLE y MATHEMATICA . Respecto de este tipo de soporte, lo que se debe esperar del estudiante es, al menos, la capacidad de interpretar y de distinguir la corrección conceptual de las respuestas que obtenga con ese *software*. El libro supone que los estudiantes tienen acceso a este tipo de herramientas. También suponemos que nuestros lectores tienen una formación matemática básica previa que incluye conceptos de Cálculo Diferencial, Integral, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Álgebra Lineal.

La dificultad en enseñar una **visión conceptual** de los sistemas lineales se refleja en la diversidad de formas y estructuras de los programas de las asignaturas relacionadas, en diferentes instituciones en los distintos países. En la mayoría de los casos se separa completamente el estudio de sistemas lineales en tiempo continuo y en tiempo discreto. Aunque esto tiene ciertas ventajas, se desaprovecha la oportunidad de dar una visión unificada de conceptos tales como estabilidad, velocidad, fenómenos transitorios, y estado, entre otros. Con este fin, el texto ha sido organizado de manera que el lector pueda optar entre un enfoque simultáneo o separado de ambos tipos de sistemas. Para reforzar la visión integrada, se ha incluido un breve capítulo referido a sistemas híbridos,

en el que se estudia la interconexión de ambos tipos de sistemas.

Este libro ha sido concebido principalmente como un texto guía en la enseñanza de sistemas y señales a nivel de pregrado, como la que se requiere en los programas de diversas carreras de Ingeniería en España y Latinoamérica. Estamos conscientes que el material aquí incluido puede ser excesivo para un curso semestral; sin embargo, tiene una estructura que permite exclusiones selectivas, distintos énfasis y diferentes secuencias. Las consideraciones anteriores han sido los elementos que ha orientado la construcción del libro, y la calidad del resultado de este esfuerzo será juzgada por los lectores.

Mario E. Salgado  
Juan I. Yuz  
Ricardo A. Rojas

Valparaíso, Febrero de 2005



# Agradecimientos

Agradecemos los comentarios de las siguientes personas que nos han permitido corregir la versión original del libro:

- Juan Carlos Agüero
- Cristian Rojas
- César Silva



# Índice general

<b>Símbolos y Nomenclatura</b>	<b>XXIII</b>
<b>1. Aspectos fundamentales</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas . . . . .	1
1.2. Modelos . . . . .	4
1.3. Sistemas lineales . . . . .	5
1.4. Invariancia en el tiempo . . . . .	8
1.5. Linealización . . . . .	9
1.5.1. Sistema no lineal de tiempo continuo . . . . .	10
1.5.2. Sistema no lineal de tiempo discreto . . . . .	12
1.6. Problemas para el lector . . . . .	18
<b>2. Señales</b>	<b>21</b>
2.1. Introducción . . . . .	21
2.2. Señales de tiempo continuo . . . . .	21
2.2.1. Escalón unitario (función de Heaviside) . . . . .	21
2.2.2. Impulso unitario o delta de Dirac . . . . .	22
2.2.3. Rampa unitaria . . . . .	23
2.2.4. Exponencial . . . . .	24
2.2.5. Señales sinusoidales . . . . .	26
2.2.6. Sinusoidales con amplitud exponencial . . . . .	26
2.2.7. Potencia y energía en señales de tiempo continuo . . . . .	27
2.3. Señales de tiempo discreto . . . . .	27
2.3.1. Escalón unitario de tiempo discreto . . . . .	27
2.3.2. Impulso unitario discreto o delta de Kronecker . . . . .	28
2.3.3. Rampa unitaria de tiempo discreto . . . . .	29
2.3.4. Exponencial de tiempo discreto . . . . .	29
2.3.5. Señales sinusoidales de tiempo discreto . . . . .	30
2.3.6. Sinusoidales con amplitud exponencial . . . . .	31
2.3.7. Potencia y energía en señales de tiempo discreto . . . . .	32
2.4. Problemas para el lector . . . . .	33

<b>3. Análisis en tiempo continuo</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	35
3.2. Ecuación diferencial del sistema (EDS) . . . . .	36
3.3. La respuesta del sistema . . . . .	37
3.3.1. Componente homogénea y componente particular . . . . .	38
3.3.2. Frecuencias y modos naturales . . . . .	39
3.3.3. Modos forzantes y modos forzados . . . . .	39
3.3.4. Estabilidad . . . . .	42
3.3.5. Velocidad . . . . .	43
3.3.6. Respuesta a estado inicial y respuesta a entrada . . . . .	43
3.4. Respuesta a señales de prueba . . . . .	49
3.4.1. Respuesta a escalón unitario . . . . .	49
3.4.2. Respuesta a impulso unitario . . . . .	51
3.5. Cálculo de la respuesta vía convolución . . . . .	52
3.6. Problemas para el lector . . . . .	56
<b>4. Análisis en tiempo discreto</b>	<b>59</b>
4.1. Introducción . . . . .	59
4.2. Ecuación de recursión del sistema (ERS) . . . . .	59
4.3. La respuesta del sistema . . . . .	62
4.3.1. Componente homogénea y componente particular . . . . .	63
4.3.2. Frecuencias y modos naturales . . . . .	64
4.3.3. Modos forzantes y modos forzados . . . . .	66
4.3.4. Estabilidad . . . . .	69
4.3.5. Velocidad . . . . .	70
4.3.6. Respuesta a estado inicial y respuesta a entrada . . . . .	71
4.4. Respuesta a señales de prueba . . . . .	73
4.4.1. Respuesta a escalón unitario . . . . .	74
4.4.2. Respuesta a impulso unitario . . . . .	76
4.5. Cálculo de la respuesta vía convolución . . . . .	77
4.6. Problemas para el lector . . . . .	82
<b>5. Análisis bajo excitaciones periódicas</b>	<b>85</b>
5.1. Señales Periódicas . . . . .	85
5.2. Respuesta a entrada sinusoidal. El caso de tiempo continuo . . . . .	86
5.3. Series de Fourier para señales de tiempo continuo . . . . .	90
5.3.1. Serie de Fourier trigonométrica . . . . .	91
5.3.2. Serie de Fourier exponencial . . . . .	98
5.3.3. Parseval y la energía de las señales periódicas . . . . .	100
5.4. Respuesta a entradas sinusoidales. El caso de tiempo discreto . . . . .	101
5.5. Serie de Fourier de tiempo discreto . . . . .	104
5.6. Aplicación de las series de Fourier al análisis de sistemas lineales . . . . .	108
5.7. Problemas para el lector . . . . .	111

<b>6. Análisis bajo excitaciones arbitrarias. La transformada de Fourier</b>	<b>115</b>
6.1. La limitación de las series de Fourier . . . . .	115
6.2. La transformada de Fourier de tiempo continuo . . . . .	116
6.2.1. Parseval y la energía de las señales en tiempo continuo . .	121
6.2.2. Aplicación a sistemas lineales . . . . .	122
6.2.3. La transferencia de Fourier y la respuesta en frecuencia .	127
6.2.4. Filtraje . . . . .	131
6.2.5. Caso singular en la función de transferencia. . . . .	135
6.3. La transformada de Fourier de tiempo discreto . . . . .	137
6.3.1. Parseval y la energía de las señales de tiempo discreto . .	141
6.3.2. Aplicación a sistemas lineales . . . . .	142
6.3.3. La función de transferencia y la respuesta en frecuencia .	146
6.3.4. Filtraje . . . . .	146
6.3.5. Caso singular en la función de transferencia. El caso de los sistemas discretos . . . . .	148
6.4. La SFD, la TFD y la TFTD . . . . .	149
6.4.1. Aspectos generales . . . . .	149
6.4.2. Conexiones . . . . .	150
6.5. Problemas para el lector . . . . .	151
<b>7. Análisis bajo excitaciones arbitrarias. La transformada de Laplace</b>	<b>155</b>
7.1. Introducción . . . . .	155
7.2. Definición de la transformada . . . . .	155
7.3. Aplicación a sistemas lineales: la función de transferencia . . . .	156
7.3.1. Definición y propiedades de la función de transferencia . .	156
7.3.2. Función de transferencia en dominios de Laplace y Fourier	160
7.3.3. Función de transferencia y respuesta en frecuencia . . . .	161
7.4. Respuesta a impulso y respuesta a escalón . . . . .	163
7.5. Respuesta a condiciones iniciales y señales arbitrarias. . . . .	168
7.6. Estabilidad . . . . .	172
7.6.1. Análisis de polinomios . . . . .	173
7.6.2. Algoritmo de Routh-Hurwitz . . . . .	175
7.7. Polos, ceros y la respuesta temporal . . . . .	177
7.7.1. Polos . . . . .	178
7.7.2. Ceros . . . . .	180
7.7.3. Respuesta inversa o contrarespuesta ( <i>undershoot</i> ) . . . . .	182
7.7.4. Sistema canónico de segundo orden . . . . .	184
7.8. Relaciones entre las transformadas de Laplace y de Fourier . . . .	186
7.9. Problemas para el lector . . . . .	188

<b>8. Análisis bajo excitaciones arbitrarias. La transformada Zeta</b>	<b>193</b>
8.1. Definición de la transformada	193
8.2. Aplicación a sistemas lineales: la función de transferencia	194
8.2.1. Definición y propiedades de la función de transferencia	194
8.2.2. Función de transferencia en dominios de Fourier y Zeta	200
8.2.3. Función de transferencia y respuesta en frecuencia	202
8.3. Respuesta a impulso y respuesta a escalón.	202
8.4. Respuesta a condiciones iniciales y excitaciones arbitrarias.	205
8.5. Estabilidad	206
8.5.1. Análisis de polinomios	207
8.6. Polos, ceros y la respuesta temporal	212
8.6.1. Polos	212
8.6.2. Ceros	214
8.6.3. Respuesta inversa o contrarespuesta ( <i>undershoot</i> )	216
8.7. Relaciones entre la transformada Zeta y de Fourier	217
8.8. Problemas para el lector	220
<b>9. Representación gráfica de sistemas lineales</b>	<b>223</b>
9.1. Ideas generales	223
9.2. Diagramas de Bode	224
9.2.1. Tiempo continuo	224
9.2.2. Tiempo discreto	236
9.3. Diagramas polares	237
9.3.1. Tiempo continuo	238
9.3.2. Tiempo discreto	249
9.4. Diagramas de bloques	251
9.5. Problemas para el lector	255
<b>10. Representación en variables de estado</b>	<b>259</b>
10.1. Introducción.	259
10.2. Conceptos fundamentales	259
10.2.1. Definición de estado	259
10.2.2. Modelos básicos en variables de estado	260
10.2.3. Señales descritas en espacios de estado	262
10.3. Modelos de estado para sistemas continuos	263
10.3.1. Linealización	263
10.3.2. Modelos lineales en el espacio de estado	266
10.3.3. Transformaciones de similaridad	273
10.3.4. Espacio de estado y funciones de transferencia	274
10.4. Modelos de estado para sistemas discretos	278
10.4.1. Linealización de sistemas discretos	278
10.4.2. Modelos de estado lineales	279
10.4.3. Transformaciones de similaridad	284
10.4.4. Espacio de estado y funciones de transferencia	285
10.5. Modelos de estado para sistemas interconectados	286
10.6. Propiedades de los sistemas	288

10.6.1. Controlabilidad, Alcanzabilidad y Estabilizabilidad . . . . .	288
10.6.2. Observabilidad, Reconstructibilidad y Detectabilidad . . . . .	294
10.6.3. Descomposición Canónica . . . . .	299
10.7. Observadores . . . . .	301
10.7.1. Dinámica del observador . . . . .	301
10.7.2. Observadores y ruido de medición . . . . .	303
10.8. Problemas para el lector . . . . .	306
<b>11. Sistemas híbridos</b>	<b>313</b>
11.1. Introducción . . . . .	313
11.2. Muestreo de señales . . . . .	314
11.3. Análisis en frecuencia de señales muestreadas . . . . .	317
11.3.1. Tren de impulsos y su espectro . . . . .	317
11.3.2. Muestreo impulsivo . . . . .	318
11.4. Reconstrucción . . . . .	320
11.4.1. Reconstrucción ideal . . . . .	323
11.4.2. Retentor de orden cero . . . . .	324
11.4.3. Retentor de primer orden . . . . .	326
11.5. Sistemas híbridos. Casos relevantes . . . . .	328
11.5.1. Procesamiento digital de señales . . . . .	328
11.5.2. Discretización de sistemas de tiempo continuo . . . . .	330
11.6. Modelos de estado para sistemas muestreados . . . . .	333
11.6.1. Efecto del período de muestreo . . . . .	335
11.6.2. Sistemas muestreados y retardos . . . . .	337
11.7. Problemas para el lector . . . . .	339
<b>12. Construcción de modelos</b>	<b>341</b>
12.1. Introducción . . . . .	341
12.2. Modelos en tiempo continuo. . . . .	343
12.2.1. Teoría básica . . . . .	345
12.2.2. Modelos lineales . . . . .	349
12.3. Modelos en tiempo discreto . . . . .	352
12.3.1. Teoría básica . . . . .	354
12.3.2. Modelos lineales . . . . .	358
12.4. Problemas para el lector . . . . .	360
<b>A. Series de Taylor</b>	<b>363</b>
A.1. Serie de Taylor en una variable . . . . .	363
A.2. Serie de Taylor en dos variables . . . . .	365
A.3. El caso general . . . . .	366
A.4. Algunas reglas prácticas . . . . .	366

<b>B. Bases matemáticas para las Series de Fourier</b>	<b>369</b>
B.1. Espacios vectoriales y bases ortogonales . . . . .	369
B.2. Convergencia de las Series de Fourier . . . . .	374
B.2.1. Sucesiones y series . . . . .	374
B.2.2. Series de Fourier . . . . .	376
<b>C. La transformada de Fourier</b>	<b>385</b>
C.1. Transformada de Fourier en tiempo continuo . . . . .	385
C.1.1. Definición de la transformada . . . . .	385
C.1.2. Propiedades . . . . .	387
C.2. Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) . . . . .	400
C.2.1. Definición de la transformada . . . . .	400
C.2.2. Propiedades . . . . .	402
C.3. La transformada rápida de Fourier . . . . .	414
C.3.1. La transformada de Fourier discreta . . . . .	414
C.3.2. El algoritmo de la FFT . . . . .	415
<b>D. La transformada de Laplace</b>	<b>421</b>
D.1. Definición de la transformada . . . . .	421
D.2. Propiedades . . . . .	424
D.3. Descomposición en fracciones parciales . . . . .	439
<b>E. La transformada Zeta</b>	<b>451</b>
E.1. Definición de la transformada . . . . .	451
E.2. Propiedades . . . . .	453
<b>F. Matrices</b>	<b>465</b>
F.1. Conceptos Básicos . . . . .	465
F.2. Determinante y rango de una matriz . . . . .	466
F.3. Inversa de una matriz . . . . .	468
F.3.1. Lema de inversión matricial . . . . .	469
F.4. Autovalores y autovectores . . . . .	471
F.4.1. Diagonalización y formas de Jordan . . . . .	472
F.5. Normas de vectores y matrices . . . . .	476
F.6. Algunos tipos especiales de matrices . . . . .	478
F.6.1. Matrices positivas . . . . .	480
F.7. Valores singulares . . . . .	481
<b>Referencias</b>	<b>485</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>489</b>

# Índice de figuras

1.1. Sistema eléctrico . . . . .	2
1.2. Representación compacta de un sistema . . . . .	3
1.3. Propiedad de invariancia en el tiempo . . . . .	9
1.4. Salida del sistema no lineal (línea sólida) y salida del sistema linealizado (línea segmentada) para una onda cuadrada de amplitud creciente en la entrada (línea segmento-punteada). . . . .	16
1.5. Ganancia no lineal para el Problema 1.8 . . . . .	19
2.1. Escalón unitario o función de Heaviside. . . . .	22
2.2. Impulso unitario o delta de Dirac. . . . .	22
2.3. Aproximaciones al delta de Dirac . . . . .	23
2.4. Rampa unitaria. . . . .	24
2.5. Exponenciales creciente (izquierda) y decreciente (derecha) . . . . .	24
2.6. Exponenciales de diferentes velocidades de decaimiento . . . . .	25
2.7. Propiedad de la constante de tiempo . . . . .	25
2.8. Señales sinusoidales con amplitud disminuyendo exponencialmente (izq.) y creciendo exponencialmente (der.) . . . . .	27
2.9. Escalón unitario de tiempo discreto . . . . .	28
2.10. Impulso unitario discreto o delta de Kronecker . . . . .	28
2.11. Rampa unitaria de tiempo discreto . . . . .	29
2.12. Exponenciales de tiempo discreto, decreciente (izquierda) y creciente (derecha), $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . . . . .	30
2.13. Exponenciales de tiempo discreto, decreciente (izquierda) y creciente (derecha), $\lambda \in \mathbb{R}^-$ . . . . .	31
2.14. Señales sinusoidales de tiempo discreto con amplitud variando exponencialmente . . . . .	32
2.15. Señales compuestas . . . . .	34
3.1. Red RLC . . . . .	37
3.2. Relación entre la ubicación de las frecuencias naturales (de multiplicidad uno) y los modos naturales . . . . .	40
3.3. Red lineal con condiciones iniciales . . . . .	46
3.4. Efectos de la invariancia en el tiempo . . . . .	51
3.5. Ejemplo de descripción gráfica de la convolución . . . . .	54

3.6. Respuesta a escalón unitario . . . . .	57
3.7. Configuración de frecuencias naturales de dos sistemas . . . . .	57
3.8. Red eléctrica con amplificador operacional . . . . .	58
4.1. Relación entre la ubicación de las frecuencias naturales (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso decreciente). . . . .	67
4.2. Relación entre la ubicación de las frecuencias naturales (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso no decreciente). . . . .	68
4.3. Respuesta a escalón unitario. . . . .	83
4.4. Red resistiva. . . . .	84
5.1. Señales de entrada (línea delgada) y salida (línea gruesa) en el Ejemplo 5.1 . . . . .	89
5.2. Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden de tiempo continuo . . . . .	89
5.3. Señal cuadrada . . . . .	92
5.4. Espectro de líneas de una señal cuadrada. . . . .	94
5.5. Señal a la salida de rectificador controlado por tiristores . . . . .	94
5.6. Aproximación de la señal triangular con la primera y la tercera armónica . . . . .	96
5.7. Espectro de líneas de una señal triangular . . . . .	96
5.8. Error de representación con serie truncada . . . . .	97
5.9. Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden de tiempo discreto . . . . .	103
5.10. Respuesta en frecuencia de un sistema de tercer orden de tiempo continuo. . . . .	109
5.11. Comportamiento de un sistema con una excitación periódica (Ejemplo 5.8). . . . .	110
5.12. Tren de pulsos . . . . .	112
6.1. Señales arbitrarias . . . . .	116
6.2. La función restringida a $[a, b]$ y su reconstrucción mediante serie de Fourier. . . . .	117
6.3. Viga cargada con arena . . . . .	121
6.4. Circuito RC como sistema de primer orden. . . . .	124
6.5. Magnitud y ángulo de $H(j\omega)$ en el Ejemplo 6.5 ( $\alpha = 100$ ). . . . .	130
6.6. Sistemas pasa bajos (izquierda) y pasa altos (derecha) . . . . .	132
6.7. Respuesta a escalones de un sistema pasa bajos, $y_1(t)$ , y de un sistema pasa altos, $y_2(t)$ . . . . .	132
6.8. Sistemas pasa banda y elimina banda. . . . .	133
6.9. Respuesta a escalones de un sistema pasa banda, $y_3(t)$ , y un sistema elimina banda, $y_4(t)$ . . . . .	134
6.10. Delta de Kronecker y su transformada de Fourier . . . . .	139
6.11. Señal $y[t] = (0,8)^t \mu[t]$ y la magnitud de $Y[e^{j\theta}]$ . . . . .	140
6.12. Señal $y[t]$ y su transformada de Fourier de tiempo discreto $Y[e^{j\theta}]$ . . . . .	141
6.13. Respuesta a impulso y a escalón del ejemplo 6.14 . . . . .	145

6.14. Respuesta en frecuencia (magnitud) de un sistema de tiempo discreto. . . . .	147
7.1. Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema en Ejemplo 7.3. . . . .	164
7.2. Respuestas a impulso y a escalón en Ejemplo 7.4 . . . . .	166
7.3. Índices definidos en la respuesta a escalón . . . . .	167
7.4. Respuesta a condiciones iniciales para el ejemplo 7.5 . . . . .	169
7.5. Circuito RC . . . . .	170
7.6. Pulso de entrada y respuesta del sistema del ejemplo 7.7. . . . .	172
7.7. Respuesta a impulso de diferentes sistemas de acuerdo a la ubicación de sus polos en el plano complejo . . . . .	179
7.8. Sistema con interacción aditiva entre dos estados . . . . .	180
7.9. Efecto de la ubicación de los ceros sobre la respuesta a escalón . . . . .	182
7.10. Distintas formas de respuesta inversa . . . . .	183
7.11. Localización de los polos y respuesta a escalón unitario de un sistema canónico de segundo orden. . . . .	185
7.12. Circuito RLC . . . . .	189
8.1. Salida $y[t]$ para el Ejemplo 8.1. . . . .	197
8.2. Relaciones entre ERS, función de transferencia y respuestas a delta y a escalón. . . . .	200
8.3. Respuesta a delta Kronecker y a escalón unitario para el Ejemplo 8.7. . . . .	204
8.4. Relación entre la ubicación de los polos (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso decreciente). . . . .	214
8.5. Relación entre la ubicación de los polos (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso no decreciente). . . . .	215
8.6. Sistema discreto con interacción aditiva entre dos estados. . . . .	216
8.7. Ejemplos de distintas formas de respuesta inversa en sistemas discretos. . . . .	217
9.1. Diagrama de Bode de magnitud (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B2], con $q = -1$ . . . . .	227
9.2. Diagrama de Bode de fase (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B2], con $q = -1$ y $T > 0$ . . . . .	227
9.3. Diagrama de Bode de magnitud (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B4], con $q = -1$ y dos valores de $\xi$ . . . . .	229
9.4. Diagrama de Bode de fase (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B4], con $q = -1$ , $\omega_n > 0$ . . . . .	230
9.5. Diagrama de Bode de fase para una función tipo [B5]. . . . .	231
9.6. Diagramas de Bode de magnitud y fase (línea fina) y sus aproximaciones asintóticas (líneas gruesas) para la respuesta en frecuencia del Ejemplo 9.2 . . . . .	236
9.7. Diagrama de Bode en tiempo discreto (Ejemplo 9.3). . . . .	238

9.8. Diagrama polar. Coordenadas cartesianas (Ejemplo 9.4). . . . .	239
9.9. Diagrama polar. Coordenadas polar (Ejemplo 9.4). . . . .	240
9.10. Diagramas polares para el caso [P1]. . . . .	242
9.11. Diagrama polar de una función tipo [P4] para distintos valores de $\xi$	243
9.12. Diagrama polar de una función tipo [P6] con $T = 1$ . . . . .	245
9.13. a) Diagrama polar de una función tipo [P7] ( $T = 1$ y $\tau = 2$ ), y	
b) detalle. . . . .	246
9.14. Diagrama polar de $H(j\omega)$ para el Ejemplo 9.5. . . . .	247
9.15. a) Diagrama polar de $H(j\omega)$ para el Ejemplo 9.6, y b) detalle. . . . .	248
9.16. Interpretación gráfica de la respuesta en frecuencia $(e^{j\theta} - p_o)^{-1}$ . . . . .	249
9.17. Interpretación gráfica de la respuesta en frecuencia de $1 - z_o e^{-jt}$ . . . . .	250
9.18. Diagrama polar para el Ejemplo 9.7. . . . .	251
9.19. Sistemas a interconectar. Caracterización independiente . . . . .	252
9.20. Sistemas interconectados . . . . .	252
9.21. Diagramas de Bode de $H_a(s)$ . . . . .	255
9.22. Diagramas de Bode de $G(s)$ . . . . .	256
9.23. Diagramas de Bode de $G(s)$ . . . . .	256
9.24. Lazo realimentado . . . . .	257
9.25. Diagrama en bloques del predictor de un paso futuro. . . . .	258
10.1. Sistema masa-resorte. . . . .	261
10.2. Levitador electromagnético. . . . .	264
10.3. Respuesta homogénea del sistema masa-resorte-roce para tres valores distintos de la constante de roce viscoso $D$ . . . . .	269
10.4. Trayectorias en el espacio de estado del sistema masa-resorte-roce para tres valores distintos de la constante de roce viscoso $D$ . . . . .	270
10.5. Resonancia en el sistema masa-resorte. . . . .	272
10.6. Red eléctrica. . . . .	274
10.7. Respuesta a escalón del sistema para diferentes valores de $\eta$ . . . . .	283
10.8. Resonancia en la salida del sistema, para dos excitaciones diferentes. . . . .	284
10.9. Conexión de sistemas en serie . . . . .	287
10.10. Conexión de sistemas en paralelo . . . . .	287
10.11. Conexión de sistemas en realimentación ( <i>feedback</i> ) . . . . .	288
10.12. Descomposición canónica del modelo de estado. . . . .	300
10.13. Error de estimación del estado . . . . .	303
10.14. Característica de filtraje de los observadores . . . . .	305
10.15. Circuito electrónico para el Problema 10.10. . . . .	309
10.16. Circuito electrónico para el Problema 10.13. . . . .	310
11.1. Proceso de muestreo y cuantización. . . . .	314
11.2. Muestreo de una señal sinusoidal a diferentes frecuencias. Ejemplo 11.1 . . . . .	315
11.3. Error de reconstrucción usando interpolación cúbica. . . . .	316
11.4. Tren de impulsos y su espectro. . . . .	318
11.5. Señal muestreada mediante un tren de impulsos. . . . .	319
11.6. Espectro de la señal $f(t) = 2 \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi^2 t^2}$ muestreada cada $\Delta$ [s]. . . . .	321

11.7. Al muestrear las señales $f(t)$ y $\tilde{f}(t)$ con período $\Delta = \frac{4}{3}$ [s] se obtienen secuencias con el mismo espectro. . . . .	322
11.8. Filtrado de reconstrucción con filtro ideal (línea gruesa). . . . .	322
11.9. Reconstrucción de una señal de tiempo continuo usando retentor de orden cero. . . . .	324
11.10. Modelo para la reconstrucción de orden cero. . . . .	325
11.11. Magnitud de la respuesta en frecuencia del retentor de orden cero (línea gruesa), del filtro ideal (línea segmentada) y espectro de la señal muestreada en el Ejemplo 11.2 (línea fina). . . . .	325
11.12. Comparación de retentores de orden cero y uno. Se muestra la señal continua (línea fina) junto con la retención de orden cero (línea segmentada) y la retención de primer orden (línea gruesa), $\Delta = 1$ [s]. . . . .	326
11.13. Modelo para la reconstrucción de primer orden . . . . .	327
11.14. Magnitud de la respuesta en frecuencia del retentor de orden cero (línea segmentada) y del retentor de primer orden (línea llena). . . . .	327
11.15. Muestreo, procesamiento discreto y reconstrucción de una señal de tiempo continuo. . . . .	329
11.16. Acción de tiempo discreto sobre sistema de tiempo continuo y discretización de la respuesta. . . . .	330
11.17. Efecto del muestreo en los modos naturales . . . . .	336
11.18. Sistema térmico con retardo. . . . .	337
12.1. Señal $y(t)$ (en línea fina) y aproximación óptima (en línea gruesa). . . . .	348
12.2. Aplicación de método en línea para estimar parámetros en Ejemplo 12.6. . . . .	352
12.3. Aplicación de método en línea para estimar parámetros en Ejemplo 12.10. . . . .	359
A.1. Aproximación de primer orden para función no lineal de una variable. . . . .	364
C.1. Pulso $y_{\Delta}(t)$ y su transformada $Y_{\Delta}(j\omega)$ para $\Delta$ igual a 1, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{16}$ (Ejemplo C.1). . . . .	386
C.2. Espectro de una señal de frecuencias audibles y espectro de la señal modulada. . . . .	390
C.3. Tren de pulsos (Ejemplo C.6). . . . .	391
C.4. Amplitud de los coeficientes $A_n$ y espectro $Y(j\omega)$ . . . . .	392
C.5. Funciones y sus respectivas transformadas de Fourier de tiempo discreto (Ejemplos C.8, C.9 y C.10). . . . .	402
C.6. Señal cosenoidal y su transformada de Fourier de tiempo discreto (Ejemplo C.11). . . . .	405
C.7. Secuencia $y[t] = t(0,8)^t \mu[t]$ y la magnitud de su transformada de Fourier (Ejemplo C.13). . . . .	409
C.8. Raíces $N$ -ésimas de la unidad distribuidas sobre la circunferencia unitaria. . . . .	416

---

C.9. Número de cálculos para la transformada de Fourier discreta ( $N^2$ ) y la transformada rápida de Fourier ( $N \log_2 N$ ). . . . .	418
C.10. Primera etapa de la FFT para $N = 8$ . . . . .	418
C.11. Primera y segunda etapa de la FFT para $N = 8$ . . . . .	419
C.12. Las tres etapas de la FFT para $N = 8$ . . . . .	419
D.1. Función $y(t)$ de orden exponencial y región de convergencia de su transformada de Laplace. . . . .	422
D.2. Circuito RC . . . . .	435
D.3. Polos complejos conjugados, para $\omega_n > 0$ (Ejemplo D.9). . . . .	445
E.1. Función $f[t]$ de orden exponencial en tiempo discreto y región de convergencia de su transformada Zeta. . . . .	452

# Índice de tablas

3.1. Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta . . . . .	44
3.2. Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta del Ejemplo 3.5. . . . .	45
4.1. Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta . . . . .	71
4.2. Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta del Ejemplo 4.7. . . . .	73
5.1. Amplitud y fase de las armónicas en el Ejemplo 5.8. . . . .	109
7.1. Índices de la respuesta a escalón para el sistema modelado por (7.48) . . . . .	168
7.2. Arreglo de Routh . . . . .	175
8.1. Arreglo de Jury . . . . .	210
8.2. Arreglo de Jury. Ejemplo 8.11 . . . . .	211
8.3. Arreglo de Jury. Ejemplo 8.12 . . . . .	211
9.1. Aproximaciones asintóticas de magnitud de factores básicos . . . . .	232
9.2. Aproximaciones asintóticas de fase de factores básicos . . . . .	233
9.3. Contribución de pendientes entre puntos de quiebre. Diagrama de magnitud . . . . .	234
9.4. Contribución de pendientes entre puntos de quiebre. Diagrama de fase. . . . .	235
9.5. Diagramas de bloques y transferencias equivalentes . . . . .	254
C.1. Propiedades de la transformada de Fourier. . . . .	398
C.2. Tabla de transformadas de Fourier . . . . .	399
C.3. Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto. . . . .	412
C.4. Tabla de transformadas de Fourier de tiempo discreto. . . . .	413
D.1. Propiedades de la transformada de Laplace . . . . .	437
D.2. Transformadas de Laplace de algunas funciones simples . . . . .	438
D.3. Transformadas de Laplace inversas útiles . . . . .	449

E.1. Propiedades de la transformada Zeta . . . . .	463
E.2. Transformada Zeta de algunas funciones simples . . . . .	464

# Símbolos y Nomenclatura

$|\lambda|$  : módulo de  $\lambda \in \mathbb{C}$

$\angle \lambda$  : ángulo de  $\lambda \in \mathbb{C}$

$|H(j\omega)|_{\text{dB}}$  : magnitud de  $H(j\omega)$ , medida en *decibeles*.

$(\circ)^{-1}$  : inversa de una matriz  $(\circ)$ .

$(\circ)^\dagger$  : inversa generalizada de una matriz  $(\circ)$ .

$(\circ)^*$  : complejo conjugado de  $(\circ) \in \mathbb{C}$ .

$(\circ)^H$  : hermitiano o conjugado traspuesto del vector o matriz  $(\circ)$ .

$(\circ)^T$  : traspuesto del vector o matriz  $(\circ)$ .

$\|\circ\|$  : norma, para vectores generalmente se refiere a la norma euclídeana o  $\ell_2$ .

$\|\circ\|_1$  : norma (inducida)  $\ell_1$ .

$\|\circ\|_2$  : norma (inducida)  $\ell_2$ .

$\|\circ\|_\infty$  : norma (inducida)  $\ell_\infty$ .

$\|\circ\|_F$  : norma Fröbenius.

$\|\circ\|_p$  : norma (inducida)  $\ell_p$ .

$\langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle$  : producto interno, (producto punto o producto escalar) entre dos vectores (funciones)  $\vec{f}_1$  y  $\vec{f}_2$ .

$f_1(t) * f_2(t)$  : convolución de las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ .

$f_1[t] * f_2[t]$  : convolución de tiempo discreto de las funciones  $f_1[t]$  y  $f_2[t]$ .

$\hat{\alpha}$  : valor estimado del parámetro  $\alpha$ .

$\Gamma_c$  : matriz de controlabilidad de un sistema.

$\Gamma_o$  : matriz de observabilidad de un sistema.

$\Delta$  : período de muestreo.

$\Delta u(t), \Delta y(t)$  : variables incrementales en torno al punto de operación  $(u_Q, y_Q)$ .

$\delta(t)$  : impulso unitario o delta de Dirac.

$\delta[t]$  : impulso unitario de tiempo discreto o delta de Kronecker.

$\theta$  : frecuencia discreta.

$\kappa(\mathbf{A})$  : número de condicionamiento de una matriz  $\mathbf{A}$ .

$\mu(t)$  : escalón unitario o función de Heaviside.

$\mu[t]$  : escalón unitario de tiempo discreto.

$\xi$  : factor de amortiguamiento asociado a un par de polos complejos conjugados.

$\rho(\circ)$  : operador de Heaviside.

$\rho(\mathbf{A})$  : radio espectral de una matriz  $\mathbf{A}$ .

$\sigma(\mathbf{A})$  : espectro o conjunto de autovalores de una matriz  $\mathbf{A}$ .

$\phi(t)$  : vector de regresión.

$\omega$  : frecuencia en tiempo continuo.

$\omega_n$  : frecuencia natural no amortiguada asociada a un par de polos complejos conjugados.

$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  : 4-tupla de matrices que define la representación de estado de un sistema de tiempo continuo.

$\{\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{D}_d\}$  : 4-tupla de matrices que define la representación de estado de un sistema de tiempo discreto.

$\mathbf{A}_d^t$  : matriz de transición de un sistema de tiempo discreto.

$\mathcal{B}$  : base de un espacio vectorial.

$\mathbb{C}$  : conjunto de los números complejos.

$\angle(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$  : ángulo entre dos vectores.

$d(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$  : distancia entre dos vectores.

e.t.o.c. : *en todo otro caso*.

$e^{\mathbf{A}t}$  : matriz de transición de un sistema de tiempo continuo.

EDS : Ecuación Diferencial del Sistema.

ERS : Ecuación Recursiva del Sistema.

$\mathcal{F}\{f(t)\}$  : transformada de Fourier de la función  $f(t)$ .

$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$  : transformada de Fourier inversa de la función  $F(j\omega)$ .

$\mathcal{F}_d\{f[t]\}$  : transformada de Fourier de tiempo discreto de la función  $f[t]$ .

$\mathcal{F}_d^{-1}\{F[e^{j\theta}]\}$  : transformada de Fourier de tiempo discreto inversa de la función  $F[e^{j\theta}]$ .

FFT : transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*).

$f(t)$  : señal definida en tiempo continuo,  $t \in \mathbb{R}$ .

$f[t]$ ,  $f[k]$  : señal definida en tiempo discreto,  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$g(t)$  : respuesta de un sistema a un escalón unitario  $\mu(t)$ .

$g[t]$  : respuesta de un sistema a un escalón unitario de tiempo discreto  $\mu[t]$ .

$H[e^{j\theta}]$  : función de transferencia o respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo discreto.

$H(j\omega)$  : función de transferencia o respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo continuo.

$h(t)$  : respuesta de un sistema a un impulso unitario  $\delta(t)$ .

$h[t]$  : respuesta de un sistema a un delta de Kronecker  $\delta[t]$ .

$\Im\{\lambda\}$  : parte imaginaria de  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$K(\omega)$  : respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo continuo.

$K[\theta]$  : respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo discreto.

$\mathcal{L}\{y(t)\}$  : transformada de Laplace de  $y(t)$ .

$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$  : transformada de Laplace inversa de  $Y(s)$ .

$\log_{10}(\cdot)$  : logaritmo en base 10 de  $(\cdot)$ .

$\mathcal{M}$  : clase de modelos.

$M_p$  : *overshoot* o sobre-respuesta de la respuesta a escalón de un sistema.

$M_u$  : *undershoot* o máxima contra-respuesta de la respuesta a escalón de un sistema.

$\mathbb{N}$  : conjunto de los números naturales (incluyendo el cero).

$O(o)$  : función de orden  $o$ .

$p_{\mathbf{A}}(\lambda)$  : polinomio característico de una matriz  $\mathbf{A}$ .

$q\langle o \rangle$  : operador de adelanto temporal unitario.

$\mathbb{R}$  : conjunto de los números reales.

$\Re\{\lambda\}$  : parte real de  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$r(t)$  : rampa unitaria.

$r[t]$  : rampa unitaria de tiempo discreto.

$\mathcal{S}$  : sistema

SFD : Serie de Fourier Discreta.

SPI : Semi Plano Izquierdo.

SPD : Semi Plano Derecho.

$\mathbf{T}\langle \circ, \circ \rangle$  : operador.

TFD : Transformada de Fourier Discreta.

TFTD : Transformada de Fourier de Tiempo Discreto.

$t$  : argumento temporal de una señal.

$t_r$  : *rise time* o tiempo de subida de la respuesta a escalón de un sistema.

$t_s$  : *settling time* o tiempo de asentamiento de la respuesta a escalón de un sistema.

$u(t)$  : excitaciones o entradas de un sistema.

$(u_Q, y_Q)$  : punto de operación (o de equilibrio) de un sistema.

$\mathcal{V}$  : espacio vectorial.

$\vec{v}$  o  $\mathbf{v}$  : vector perteneciente a un espacio vectorial  $\mathcal{V}$ .

$\mathbf{W}_N$  : matriz de Fourier

$\mathbf{x}(t), \mathbf{x}[t]$  : vector de estado de un sistema.

$\mathbf{x}_f(t), \mathbf{x}_f[t]$  : componente forzada del estado de un sistema.

$\mathbf{x}_h(t), \mathbf{x}_h[t]$  : componente homogénea del estado de un sistema.

$\mathbf{x}_p(t), \mathbf{x}_p[t]$  : componente particular del estado de un sistema.

$\mathbf{x}_u(t), \mathbf{x}_u[t]$  : componente no forzada del estado de un sistema.

$y(t)$  : salidas o respuestas de un sistema.

$y_\infty$  : valor estacionario de la respuesta (a escalón) de un sistema.

$y_d[k]$  : secuencia de tiempo discreto que contiene las muestras de la señal  $y(t)$  en los instantes  $t = k\Delta$ , es decir,  $y_d[k] = y(k\Delta)$ .



$y_h(t), y_h[t]$  : componente homogénea de la respuesta de un sistema.

$y_p(t), y_p[t]$  : componente particular de la respuesta de un sistema.

$y_u(t), y_u[t]$  : respuesta a entrada de un sistema.

$y_x(t), y_x[t]$  : respuesta a estado inicial de un sistema.

$\mathbb{Z}$  : conjunto de los números enteros.

$\mathbb{Z}^+$  : conjunto de los números enteros positivos.

$\mathbb{Z}_0^+$  : conjunto de los números enteros no negativos.

$\mathcal{Z}\{f[t]\}$  : transformada Zeta de la función  $f[t]$ .

$\mathcal{Z}^{-1}\{F[z]\}$  : transformada Zeta inversa de  $F[z]$ .



# Capítulo 1

## Aspectos fundamentales

### 1.1. Sistemas

La entidad básica considerada a lo largo del texto es el **sistema**. Como una manera de uniformar el lenguaje a utilizar, usaremos la siguiente definición:

**Definición 1.1.** *Un sistema es un ente organizado, resultante de la interconexión de elementos básicos, que según el juicio de un observador, tiene una finalidad y carácter determinado.*

□□□

Esta definición es vaga a propósito, de modo que ella permita describir situaciones tan disímiles como sea posible. Es así como la definición de arriba incluye casos como los de una red eléctrica, un motor hidráulico, un organismo vivo y la economía de un país, etc. También es relevante destacar que un mismo sistema físico puede tener interés diferente para distintos observadores; por ejemplo, un amplificador electrónico puede ser estudiado como un sistema eléctrico o como un sistema térmico. De esta forma la noción de sistema resulta un tanto abstracta, pero por lo mismo sumamente poderosa. En este texto se usa a veces la palabra **proceso**, para denotar la misma idea.

Nuestra tarea guarda relación con el comportamiento de los sistemas en el tiempo, el cual depende de:

- los elementos que lo forman y su interconexión, descritos mediante un **modelo matemático**;
- los estímulos, **entradas** o excitaciones aplicados al sistema;
- la historia del sistema, condensada en un conjunto de **condiciones iniciales**;
- la variable independiente **tiempo** (cuando los elementos del sistema y/o la interconexión de ellos cambian a medida que el tiempo transcurre).

Las entradas al sistema son **señales** o funciones temporales a través de las cuales el sistema recibe información y/o energía. Estos estímulos contribuyen a generar cambios en algunas o en todas las variables del proceso; estas últimas también son señales puesto que pueden ser descritas como funciones del tiempo. Las señales del proceso elegidas para observar el comportamiento del sistema se conocen como **respuestas**.

Las respuestas de un sistema pueden depender también de la información y/o energía existentes (almacenadas) en el sistema en el instante en que el comportamiento del sistema empieza a ser observado. Los sistemas con esta característica inercial se denominan genéricamente **sistemas dinámicos**. Ejemplos de mecanismos inerciales en sistemas son:

- la velocidad inicial de un motor
- el valor inicial de una variable en un computador
- la temperatura inicial de una masa
- la tensión inicial en un condensador.

Supongamos que deseamos conocer las respuestas en un sistema dado, a partir de un instante inicial  $t_o$ . Entonces será suficiente conocer ciertas variables (estado) del sistema en  $t = t_o$ , y las excitaciones  $\forall t \geq t_o$ .

Para ilustrar estas ideas analizaremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.1.** Consideremos la red eléctrica de la Figura 1.1.

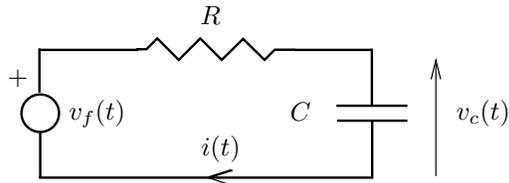


Figura 1.1: Sistema eléctrico

Esta red es un sistema eléctrico formado por la interconexión de un resistor y un condensador (los elementos). Hay una entrada al sistema determinada por la tensión aplicada a través de la fuente independiente de tensión. Como salida o respuesta se puede elegir cualquier señal eléctrica, como por ejemplo, la potencia disipada en el resistor, la corriente en el circuito, la tensión en el condensador, etc.

En la Figura 1.1 se han indicado dos señales,  $i(t)$  y  $v_c(t)$ , que han sido elegidas como respuestas del sistema. Para determinar el valor de estas señales  $\forall t \geq 0$ , necesitamos conocer  $v_f(t) \forall t \geq t_o$  y  $v_c(0)$ . □□□

Para representar un sistema en forma compacta usaremos el diagrama de la Figura 1.2. En esa figura se ha usado la siguiente notación:

- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  : vector que reúne todas las excitaciones del sistema,
- $x(t_o) \in \mathbb{R}^n$  : vector que describe el estado del sistema al tiempo  $t_o$ ,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  : vector que reúne las señales escogidas como salidas.

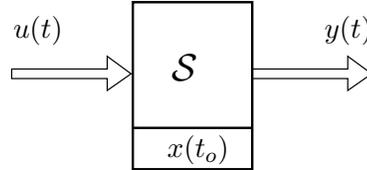


Figura 1.2: Representación compacta de un sistema

Para representar genéricamente al sistema usaremos la notación:

$$y(t) = \mathbf{T}\langle x(t_o), u(t) \rangle \quad \forall t \geq t_o \quad (1.1)$$

En (1.1),  $\mathbf{T}\langle \circ, \circ \rangle$  es un *operador* que describe formalmente la dependencia que la **salida**  $y(t)$  tiene del **estado inicial**,  $x(t_o)$ , y de la **entrada**  $u(t)$ . Este operador puede ser variante en el tiempo.

**Ejemplo 1.2.** En el Ejemplo 1.1 se tiene que:

$$v_f(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \quad (1.2)$$

cuya solución es<sup>1</sup>:

$$v_c(t) = v_c(t_o)e^{-\frac{t-t_o}{RC}} + \int_{t_o}^t \frac{e^{-\frac{t-\eta}{RC}}}{RC} v_f(\eta) d\eta \quad (1.3)$$

Entonces, si hacemos la asociación  $y(t) = v_c(t)$ ,  $u(t) = v_f(t)$  y  $x(t_o) = v_c(t_o)$ , la ecuación (1.3) puede ser identificada con (1.1), es decir,

$$v_c(t) = \mathbf{T}\langle v_c(t_o), v_f(t) \rangle \quad \forall t \geq t_o \quad (1.4)$$

□□□

Las definiciones precedentes se aplican también a los sistemas de tiempo discreto, es decir, cuando el tiempo toma valores en un conjunto numerable  $(t_0, t_1, t_2, \dots)$ . En este tipo de sistemas, la variable independiente temporal se suele denominar  $t$ , y para enfatizar la naturaleza distinta de las señales de tiempo discreto, usaremos paréntesis cuadrados, es decir,  $f[t]$  describirá una señal función de la variable temporal discreta.

Para ilustrar este tipo de sistemas consideremos el siguiente ejemplo.

<sup>1</sup>Tal como se demostrará en el Capítulo 3.

**Ejemplo 1.3.** Una cuenta de ahorro tiene un saldo inicial  $s[t_0] = s_o$ , y recibe un interés igual a  $\rho$  % mensual. Si en el mes  $t$ -ésimo ( $t = t_0, t_0 + 1, \dots$ ) se hace un depósito igual a  $d[t]$ , entonces el saldo  $s[t]$  puede ser descrito por:

$$s[t] = s[t-1] \left(1 + \frac{\rho}{100}\right) + d[t] \quad \forall t > t_0 \quad (1.5)$$

y sujeto a  $s[t_0] = s_o$ . En este sistema, la entrada es  $d[t]$ , la salida es  $s[t]$ , y el estado inicial es  $s[t_0]$ . La ecuación (1.5) tiene como solución:

$$s[t] = s_o \alpha^{t-t_0} + \sum_{\ell=t_0+1}^t \alpha^{t-\ell} d[\ell] \quad \forall t > t_0 \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) puede ser asociada con una estructura análoga a la de (1.1), es decir:

$$y[t] = \mathbf{T}\langle x[t_0], u[t] \rangle \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.7)$$

□□□

Existe una clase (idealizada) de sistemas en los cuales no hay elementos almacenadores de energía, ni algún otro mecanismo que capture los efectos del pasado. Estos sistemas se conocen como sistemas algebraicos o instantáneos. Ejemplos clásicos de estos sistemas son las redes eléctricas resistivas. Para ellos la representación (1.1) se reduce a:

$$y(t) = \mathbf{T}\langle u(t) \rangle \quad \text{o} \quad y[t] = \mathbf{T}\langle u[t] \rangle \quad (1.8)$$

En estricto rigor, todos los sistemas reales son sistemas dinámicos. Sin embargo, puede ocurrir que para un observador, la escala de tiempo es tal que, desde el punto de vista práctico, los fenómenos ocurren en forma instantánea, es decir, no hay efectos inerciales. En esos casos, el sistema se representa a través de un modelo algebraico.

## 1.2. Modelos

Cuando se enfrenta el problema de analizar un sistema, naturalmente no trabajamos con el sistema real, sino que con una representación de ese sistema. Esa representación o **modelo**, captura aspectos esenciales del sistema. Por definición, un modelo es una representación **aproximada** de la realidad, y su grado de fidelidad depende de muchos factores, siendo uno de ellos el propósito del modelo.

En la teoría de sistemas los modelos juegan un rol fundamental, pues son imprescindibles para el análisis, la síntesis y el diseño. En particular, el principal objeto de contar con una representación de un sistema es el poder *predecir* y *analizar* el comportamiento del sistema en el tiempo.

Naturalmente existen diferentes formas de describir un sistema dado, dando lugar a diferentes modelos, según sea el aspecto del sistema que interesa describir

con mayor énfasis. Por ejemplo, si consideramos un motor eléctrico, podríamos estar interesados en él como un sistema de conversión electro-mecánica, un sistema térmico, un sistema mecánico sujeto a vibraciones, o bien, estudiar el comportamiento de los materiales que lo conforman. En segundo lugar, no existe un único modelo para un sistema, ya que al modelar siempre existe alguna simplificación implícita de la realidad, la cual, en la mayor parte de los casos, resulta demasiado compleja para describir en todos sus aspectos.

De esta forma, una decisión fundamental a la hora de **modelar** un sistema es definir el *propósito*, es decir, definir aquellos aspectos esenciales que queremos capturar.

La teoría y herramientas existentes para modelar de sistemas son muy diversas, y en ellas se combinan leyes de la física, la química, la termodinámica, además de teoría de señales, procesamiento de datos, matemáticas y herramientas numéricas. De hecho, un modelo generalmente no se obtiene de una sola vez, sino que se construye en un proceso iterativo, que considera la calidad de los resultados obtenidos con él en las diferentes etapas, por ejemplo, para hacer control sobre un sistema o predecir su comportamiento. La construcción de modelos es, en sí misma, una disciplina rica en conceptos y técnicas. Algunas de esas técnicas son tratadas con detalle en el Capítulo 12.

A lo largo del texto, supondremos, excepto en el capítulo mencionado, que ya se cuenta con un modelo que describe el sistema y, en consecuencia, la teoría que aquí se desarrolla se aplica al modelo del sistema bajo estudio. El que las conclusiones que así se deriven sean válidas para el sistema mismo dependerá de la fidelidad con que el modelo representa a ese sistema para el propósito definido. En muchos casos hablaremos del modelo y del sistema (o proceso) como sinónimos, en otros será necesario hacer la diferencia.

### 1.3. Sistemas lineales

Los sistemas lineales son un subconjunto del universo de los sistemas. Su importancia radica en la conjunción de dos elementos:

- muchos sistemas pueden representarse por modelos lineales de razonable fidelidad; y
- existen poderosas herramientas para analizar y sintetizar este tipo de sistemas.

La naturaleza de esta conjunción se irá apreciando a medida que progreseemos en el tema. No obstante ello, se puede adquirir una visión temprana de estas razones en las definiciones que siguen.

**Definición 1.2.** *Consideremos un sistema  $\mathcal{S}$ , como se describe en la Figura 1.2*

y la ecuación (1.1). Supongamos además que el sistema cumple con:

$$y_{1x}(t) = \mathbf{T}\langle x_1(t_o), 0 \rangle \quad \forall t \geq t_o \quad (1.9)$$

$$y_{1u}(t) = \mathbf{T}\langle 0, u_1(t) \rangle \quad \forall t \geq t_o \quad (1.10)$$

$$y_{2x}(t) = \mathbf{T}\langle x_2(t_o), 0 \rangle \quad \forall t \geq t_o \quad (1.11)$$

$$y_{2u}(t) = \mathbf{T}\langle 0, u_2(t) \rangle \quad \forall t \geq t_o \quad (1.12)$$

donde  $x_1(t_o)$  y  $x_2(t_o)$ , son dos vectores de estado inicial arbitrarios, y  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  son dos vectores de entrada arbitrarios.

Entonces el sistema es lineal si y sólo si:

$$y(t) = \mathbf{T}\langle \alpha_1 x_1(t_o) + \alpha_2 x_2(t_o), \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t) \rangle \quad \forall t \geq t_o \quad (1.13)$$

$$= \alpha_1 \mathbf{T}\langle x_1(t_o), 0 \rangle + \alpha_2 \mathbf{T}\langle x_2(t_o), 0 \rangle + \beta_1 \mathbf{T}\langle 0, u_1(t) \rangle + \beta_2 \mathbf{T}\langle 0, u_2(t) \rangle \quad (1.14)$$

$$= \alpha_1 y_{1x}(t) + \alpha_2 y_{2x}(t) + \beta_1 y_{1u}(t) + \beta_2 y_{2u}(t) \quad (1.15)$$

para cualquier conjunto de constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

□□□

En la definición precedente se han combinado las dos propiedades claves que definen los sistemas lineales: **superposición** y **homogeneidad**.

La propiedad de superposición encierra la idea que la salida del sistema se puede calcular separando los efectos de componentes del estado y/o componentes de la salida, y luego sumando (superponiendo) las respuestas a cada uno de esos componentes. Note que existen tres formas en que se puede presentar la superposición:

- superposición de la entrada y el estado inicial, es decir

$$\mathbf{T}\langle x(t_o), u(t) \rangle = \mathbf{T}\langle x(t_o), 0 \rangle + \mathbf{T}\langle 0, u(t) \rangle \quad (1.16)$$

- superposición de componentes del estado inicial, es decir

$$\mathbf{T}\langle x_1(t_o) + x_2(t_o), 0 \rangle = \mathbf{T}\langle x_1(t_o), 0 \rangle + \mathbf{T}\langle x_2(t_o), 0 \rangle \quad (1.17)$$

- superposición de componentes de la entrada, es decir

$$\mathbf{T}\langle 0, u_1(t) + u_2(t) \rangle = \mathbf{T}\langle 0, u_1(t) \rangle + \mathbf{T}\langle 0, u_2(t) \rangle \quad (1.18)$$

Por su parte, la idea de homogeneidad se expresa en que la proporcionalidad en la entrada y/o el estado se propaga a la salida sin alteración, es decir

$$\mathbf{T}\langle \alpha x_o, 0 \rangle = \alpha \mathbf{T}\langle x_o, 0 \rangle \quad (1.19)$$

$$\mathbf{T}\langle 0, \beta u(t) \rangle = \beta \mathbf{T}\langle 0, u(t) \rangle \quad (1.20)$$

La ecuación (1.19) describe la homogeneidad respecto del estado inicial, mientras que la ecuación (1.20) describe la homogeneidad respecto de la entrada.

Para los sistemas algebraicos las propiedades de homogeneidad y superposición se aplican sólo a la entrada del sistema, es decir:

$$y(t) = \mathbf{T}\langle\beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t)\rangle = \beta_1 \mathbf{T}\langle u_1(t)\rangle + \beta_2 \mathbf{T}\langle u_2(t)\rangle \quad (1.21)$$

En resumen, podemos afirmar que la propiedad de linealidad nos permite calcular el efecto de una combinación lineal de entradas y condiciones iniciales como la combinación lineal de sus efectos individuales.

Algunos ejemplos que ilustran las definiciones anteriores, son expuestos a continuación.

**Ejemplo 1.4.** *Considere un sistema algebraico cuya relación entrada-salida está dada por:*

$$y(t) = \mathbf{T}\langle u(t)\rangle = 2|u(t)| \quad (1.22)$$

*El sistema es lineal si y sólo si la condición (1.21) se cumple para toda elección de las constantes  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Es fácil observar que si, por ejemplo, elegimos  $\beta_1 = -1$  y  $\beta_2 = 0$ , tal condición no se cumple, ya que:*

$$y(t) = \mathbf{T}\langle -u_1(t)\rangle = 2|u_1(t)| \neq -2|u_1(t)| = -\mathbf{T}\langle u_1(t)\rangle \quad (1.23)$$

*En consecuencia, el sistema (1.22) no es lineal.*

□□□

**Ejemplo 1.5.** *Sea un sistema cuya relación entrada-salida está descrita por:*

$$\frac{dy(t)}{dt} = (u(t))^n \quad \text{sujeito a } y(t_o) = x_o \quad (1.24)$$

*Entonces, el estado inicial  $x(t_o)$  es  $x_o$  y la respuesta resulta:*

$$y(t) = \mathbf{T}\langle x_o, u(t)\rangle = x_o + \int_{t_o}^t (u(\eta))^n d\eta \quad \forall t \geq t_o \quad (1.25)$$

*Note que, de la ecuación (1.25), se ve que el efecto de la entrada y el efecto de la condición inicial se pueden **superponer**, ya que:*

$$y(t) = y_x(t) + y_u(t) \quad \begin{cases} y_x(t) &= \mathbf{T}\langle 0, u(t)\rangle = \int_{t_o}^t (u(\eta))^n d\eta \\ y_u(t) &= \mathbf{T}\langle x_o, 0\rangle = x_o \end{cases} \quad (1.26)$$

*Consideremos ahora el caso del estado inicial  $x(t_o) = x_o = \alpha_1 x_1(t_o) + \alpha_2 x_2(t_o)$ , con  $u(t) = 0$ ; entonces la respuesta  $y(t) = y_x(t)$  está dada por:*

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t_o) + \alpha_2 x_2(t_o) = \alpha_1 \mathbf{T}\langle x_1(t_o), 0\rangle + \alpha_2 \mathbf{T}\langle x_2(t_o), 0\rangle \quad (1.27)$$

*De la ecuación (1.27) se comprueba que el sistema tiene la propiedad de superposición de las componentes del estado. Naturalmente que tiene además la propiedad de homogeneidad del estado.*

Finalmente analizamos el caso donde  $x_1(t_o) = x_2(t_o) = y(t_o) = 0$ , y  $u(t) = \beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t)$ , la respuesta  $y(t) = y_u(t)$  está entonces dada por:

$$y(t) = \int_{t_o}^t (\beta_1 u_1(\eta) + \beta_2 u_2(\eta))^n d\eta \quad \forall t \geq t_o \quad (1.28)$$

De esta ecuación se puede ver que la propiedad de superposición de las componentes de la entrada se cumple si y sólo si  $n = 1$ . Igual condición, necesaria y suficiente, se aplica para la homogeneidad de la entrada.

Resumiendo, el sistema del ejemplo tiene las siguientes características:

- tiene la propiedad de superposición del estado y de la entrada;
- tiene la propiedad de superposición y homogeneidad del estado;
- tiene la propiedad de superposición y homogeneidad de la entrada **si y sólo si**  $n = 1$ .

En consecuencia, el sistema del ejemplo es lineal **si y sólo si**  $n = 1$ .

□□□

El lector debe tener claro que la propiedad de linealidad (o no linealidad) de un sistema dado, no es necesariamente una propiedad intrínseca de ese sistema, sino que puede depender de la elección de la variable de salida, y/o de la variable de entrada. Para visualizar esto, supongamos que en la ecuación (1.24) definimos como entrada la señal  $\tilde{u}(t) \triangleq (u(t))^n$ . Entonces es fácil demostrar que el sistema con entrada  $\tilde{u}(t)$  y salida  $y(t)$  es **lineal**.

Se puede construir un segundo ejemplo a partir de la red eléctrica de la Figura 1.1 en la página 2. Supongamos que escogemos como salida la potencia  $p(t)$  disipada en el resistor. Entonces, el modelo de entrada-salida resulta dado por:

$$v_f(t) = \sqrt{p(t)R} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{p(\tau)}{R}} d\tau \quad (1.29)$$

donde hemos usado la ley de Joule  $p(t) = R(i(t))^2$ .

La discusión precedente nos motiva a introducir una nota de cautela en esta materia

La linealidad o no linealidad de un sistema debe entenderse como la linealidad o no linealidad del modelo específico que relaciona la entrada y la salida particulares elegidas en el sistema.

## 1.4. Invariancia en el tiempo

Otra propiedad de interés es la de invariancia en el tiempo. Un sistema es invariante en el tiempo cuando las propiedades del sistema no cambian en el tiempo, es decir, cuando se cumple la situación de la Figura 1.3, para cualquier



Figura 1.3: Propiedad de invariancia en el tiempo

valor del desplazamiento  $\tau$ . En palabras, la Figura 1.3 dice que si retardamos la entrada (y las condiciones iniciales), la respuesta es la misma que antes, pero retardada en la misma cantidad.

En rigor, no existen los sistemas invariantes en el tiempo, excepto en su expresión matemática pura. Sin embargo, es frecuente que la variación que experimenta un sistema dado con el transcurso del tiempo sea tan lenta, que se considera despreciable para todo efecto práctico.

Otro aspecto a observar es que la invariancia en el tiempo (al igual que la linealidad) no es necesariamente una propiedad intrínseca de un sistema. Consideremos el caso de un sistema con entrada  $u(t) \in \mathbb{R}$  y salida  $y(t) \in \mathbb{R}$ , donde  $y(t) = 4u(t) - f(t)$ , y donde  $f(t)$  es una función (no constante) del tiempo. Entonces este sistema es **variante en t**. Sin embargo, si redefinimos el mismo sistema de modo que la entrada es ahora el vector  $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}^2$ , dado por  $\tilde{u}(t) = [u(t) \ f(t)]^T$  y mantenemos la salida  $y(t) \in \mathbb{R}$ , entonces  $y(t) = \alpha \tilde{u}(t)$ , donde  $\alpha$  es un vector fila constante dado por  $\alpha = [4 \ -1]$ . El sistema así definido es ahora **invariante en t**.

La propiedad de invariancia en el tiempo, en conjunto con la propiedad de linealidad, son las que permiten aplicar una serie de poderosas herramientas de análisis, síntesis y diseño de sistemas.

## 1.5. Linealización

Como ya hemos mencionado, los sistemas reales suelen incluir características no lineales. Sin embargo, muchos de ellos pueden ser descritos con razonable precisión por modelos lineales, al menos dentro de ciertos rangos en que el sistema funciona, lo cual permite aplicar una amplia gama de herramientas matemáticas.

Desde un punto de vista práctico, para obtener estos modelos lineales es común comenzar con un modelo no lineal y, a partir de éste, construir una aproximación lineal en la vecindad de un **punto de operación** elegido. Este enfoque constituye una herramienta clave para el modelado lineal en diversos campos, por ejemplo, en la Electrónica analógica y en el Control Automático.

La estrategia de linealización puede ser aplicada de igual forma a modelos de tiempo continuo y a modelos de tiempo discreto, a modelos en variables

de estado (Capítulo 10) y a modelos de entrada-salida (ecuaciones recursivas y ecuaciones diferenciales de orden superior).

Antes de intentar la formulación de un procedimiento general de linealización, motivaremos el tema con el estudio de dos casos. Ambos casos se frasearán de idéntica forma, con las obvias adaptaciones, para que el lector pueda apreciar que el tema de linealización trasciende la naturaleza de la descripción temporal.

### 1.5.1. Sistema no lineal de tiempo continuo

Considere un sistema con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , donde el modelo de entrada-salida está dado por:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (0, 2 + y(t)) \frac{dy(t)}{dt} + (y(t))^3 = \left( 2 \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right)^3 \quad (1.30)$$

La idea es construir un modelo (ecuación diferencial) lineal donde las señales involucradas sean:

$$\Delta u(t) \triangleq u(t) - u_Q \quad (1.31)$$

$$\Delta y(t) \triangleq y(t) - y_Q \quad (1.32)$$

en que la entrada incremental  $\Delta u(t)$  y la salida incremental  $\Delta y(t)$  representan las variaciones de las señales  $u(t)$  e  $y(t)$  en torno al punto de operación  $(u_Q, y_Q)$ .

La ecuación (1.30) puede re-escribirse, término a término, como:

$$g_a(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = g_b(x_4(t), x_5(t)) \quad (1.33)$$

donde  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ ,  $x_3(t) = \ddot{y}(t)$ ,  $x_4(t) = u(t)$  y  $x_5(t) = \dot{u}(t)$ . De esta forma:

$$g_a(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = x_3(t) + (0, 2 + x_1(t))x_2(t) + (x_1(t))^3 \quad (1.34)$$

$$g_b(x_4(t), x_5(t)) = (2x_5(t) + x_4(t))^3 \quad (1.35)$$

Luego hacemos la expansión en serie de Taylor (ver Apéndice A) de  $g_a$  y  $g_b$  para, finalmente, igualar las aproximaciones de primer orden de ambas funciones. Esto lleva a:

$$\begin{aligned} & g_a(x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}) + (3(x_{1Q})^2 + x_{2Q})(x_1(t) - x_{1Q}) \\ & \quad + (0, 2 + x_{1Q})(x_2(t) - x_{2Q}) + (x_3(t) - x_{3Q}) \\ & = g_b(x_{4Q}, x_{5Q}) + 3(2x_{5Q} + x_{4Q})^2(x_4(t) - x_{4Q}) \\ & \quad + 6(2x_{5Q} + x_{4Q})(x_5(t) - x_{5Q}) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Usando las definiciones anteriores tenemos que:

$$x_1(t) - x_{1Q} = \Delta y(t) \quad (1.37)$$

$$x_2(t) - x_{2Q} = \Delta \dot{y}(t) = \frac{d \Delta y(t)}{dt} - x_{2Q} \quad (1.38)$$

$$x_3(t) - x_{3Q} = \Delta \ddot{y}(t) = \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} - x_{3Q} \quad (1.39)$$

$$x_4(t) - x_{4Q} = \Delta u(t) \quad (1.40)$$

$$x_5(t) - x_{5Q} = \Delta \dot{u}(t) = \frac{d \Delta u(t)}{dt} - x_{5Q} \quad (1.41)$$

Para lograr el objetivo deseado, es decir, una ecuación diferencial en  $\Delta u(t)$  y  $\Delta x_i(t)$ , es necesario que el conjunto de valores  $(x_{1Q}, x_{2Q}, \dots, x_{5Q})$  que define el punto de operación satisfaga:

$$g_a(x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}) = g_b(x_{4Q}, x_{5Q}) \quad (1.42)$$

con lo cual,  $g_a(x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q})$  y  $g_b(x_{4Q}, x_{5Q})$  se compensan en la ecuación (1.36).

En esta etapa de nuestro análisis es oportuno hacer las siguientes observaciones:

- (i) Cada derivada debe ser asociada a una variable  $x_i$ .
- (ii) El punto de operación es arbitrario; pero para llegar a un modelo linealizado, debe satisfacer la ecuación no lineal original. Para este caso, un ejemplo de punto de operación es  $x_{1Q} = 2$ ,  $x_{2Q} = 1$ ,  $x_{3Q} = -9$ ,  $x_{4Q} = 3$  y  $x_{5Q} = -1$ .
- (iii) Es necesario elegir un punto de operación para el que las derivadas de  $y(t)$  y de  $u(t)$ , respecto del tiempo, sean iguales a cero. Este punto de operación se conoce como punto de operación en equilibrio o, más brevemente, **punto de equilibrio**. La idea es que si un sistema está en un punto de equilibrio, el sistema se mantiene operando en ese punto ya que las derivadas de  $y(t)$  y de  $u(t)$  son cero. La elección del punto de equilibrio se hace considerando el punto en que el sistema a analizar estará operando. Para este caso, existen infinitos puntos de equilibrio y todos ellos satisfacen  $x_{1Q} = x_{4Q}$ ,  $x_{2Q} = 0$ ,  $x_{3Q} = 0$  y  $x_{5Q} = 0$ . Con esto, las ecuaciones (1.37)-(1.41) se transforman en:

$$x_1(t) - x_{1Q} = \Delta y(t) \quad (1.43)$$

$$x_2(t) - x_{2Q} = \Delta \dot{y}(t) = \frac{d \Delta y(t)}{dt} \quad (1.44)$$

$$x_3(t) - x_{3Q} = \Delta \ddot{y}(t) = \frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} \quad (1.45)$$

$$x_4(t) - x_{4Q} = \Delta u(t) \quad (1.46)$$

$$x_5(t) - x_{5Q} = \Delta \dot{u}(t) = \frac{d \Delta u(t)}{dt} \quad (1.47)$$

El modelo lineal para el caso estudiado tiene entonces la forma:

$$\frac{d^2 \Delta y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d \Delta y(t)}{dt} + a_0 \Delta y(t) = b_1 \frac{d \Delta u(t)}{dt} + b_0 \Delta u(t) \quad (1.48)$$

- (iv) Cuando el modelo no lineal está descrito por dos o más ecuaciones, las coordenadas del punto de operación deben satisfacer al conjunto de ecuaciones simultáneas.
- (v) Un punto de operación en equilibrio se calcula a partir del modelo algebraico (tal vez no lineal) que resulta de hacer cero todas las derivadas en el modelo dinámico no lineal.
- (vi) La linealización puede hacerse sobre la función compuesta  $g \triangleq g_a - g_b = 0$ .

□□□

### 1.5.2. Sistema no lineal de tiempo discreto

Considere un sistema de tiempo discreto con entrada  $u[t]$  y salida  $y[t]$ , donde el modelo de entrada-salida es la ecuación recursiva:

$$y[t] + 0,5y[t-1]y[t-2] + 0,1u[t](y[t-2])^2 = (u[t-1])^3 \quad (1.49)$$

La idea es construir un modelo (ecuación recursiva) lineal en que las señales involucradas sean:

$$\Delta u[t] \triangleq u[t] - u_Q \quad (1.50)$$

$$\Delta y[t] \triangleq y[t] - y_Q \quad (1.51)$$

en que la entrada incremental  $\Delta u[t]$  y la salida incremental  $\Delta y[t]$  representan las variaciones de las variables  $u[t]$  e  $y[t]$  en torno al punto de operación  $(u_Q, y_Q)$ .

La ecuación (1.30) puede re-escribirse, miembro a miembro, como:

$$g_c(x_1[t], x_2[t], x_3[t], x_4[t]) = g_d(x_5[t]) \quad (1.52)$$

donde  $x_1[t] = y[t]$ ,  $x_2[t] = y[t-1]$ ,  $x_3[t] = y[t-2]$ ,  $x_4[t] = u[t]$  y  $x_5[t] = u[t-1]$ . Así:

$$g_c(x_1[t], x_2[t], x_3[t], x_4[t]) = x_1[t] + 0,5x_2[t]x_3[t] + 0,1x_4[t](x_3[t])^2 \quad (1.53)$$

$$g_d(x_5[t]) = (x_5[t])^3 \quad (1.54)$$

Luego hacemos la expansión en serie de Taylor (ver Apéndice A) de  $g_c$  y  $g_d$  para, finalmente, igualar las aproximaciones de primer orden de ambas funciones. Esto lleva a:

$$\begin{aligned} & g_c(x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}) + (x_1[t] - x_{1Q}) \\ & \quad + 0,5x_{2Q}(x_3[t] - x_{3Q}) + 0,5x_{3Q}(x_2[t] - x_{2Q}) \\ & \quad + 0,2x_{4Q}x_{3Q}(x_3[t] - x_{3Q}) + 0,1(x_{3Q})^2(x_4[t] - x_{4Q}) \\ & = g_d(x_{5Q}) + 3(x_{5Q})^2(x_5[t] - x_{5Q}) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Usando las definiciones anteriores y la notación  $\Delta y[t - \ell] = y[t - \ell] - x_{1Q}$  y  $\Delta u[t - j] = u[t - j] - x_{4Q}$ , tenemos que:

$$x_1[t] - x_{1Q} = \Delta y[t] \quad (1.56)$$

$$x_2[t] - x_{2Q} = \Delta y[t - 1] + x_{1Q} - x_{2Q} \quad (1.57)$$

$$x_3[t] - x_{3Q} = \Delta y[t - 2] + x_{1Q} - x_{3Q} \quad (1.58)$$

$$x_4[t] - x_{4Q} = \Delta u[t] \quad (1.59)$$

$$x_5[t] - x_{5Q} = \Delta u[t - 1] + x_{4Q} - x_{5Q} \quad (1.60)$$

Para lograr el objetivo deseado, es decir, una ecuación recursiva en  $\Delta u[t]$  y  $\Delta y[t]$ , es necesario que el punto de operación  $(x_{1Q}, x_{2Q}, \dots, x_{5Q})$  satisfaga:

$$g_c(x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}) = g_d(x_{5Q}) \quad (1.61)$$

con lo cual,  $g_c(x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q})$  y  $g_d(x_{5Q})$  se compensan en (1.55).

En esta etapa de nuestro análisis es oportuno hacer las siguientes observaciones:

- (i) Cada señal retardada debe ser asociada a una variable  $x_i$ .
- (ii) El punto de operación es arbitrario; pero para llegar a un modelo linealizado, debe satisfacer la ecuación no lineal original. Para este caso, un ejemplo de punto de operación es  $x_{1Q} = -2$ ,  $x_{2Q} = 1$ ,  $x_{3Q} = 2$ ,  $x_{4Q} = 5$  y  $x_{5Q} = 1$ .
- (iii) Es necesario elegir un punto de operación en que las señales son constantes, es decir,  $u[t] = u_Q$  e  $y[t] = y_Q$ , para todo instante  $t$ , lo cual implica también que todas las diferencias son cero. Este punto de operación se conoce como punto de operación en equilibrio o, más brevemente, **punto de equilibrio**. La idea es que si un sistema está en un punto de equilibrio, el sistema se mantiene operando en ese punto ya que las diferencias de  $y[t]$  y de  $u[t]$  son cero. La elección del punto de equilibrio se hace considerando el punto en que el sistema a analizar estará operando. Para este caso, existen infinitos puntos de equilibrio y todos ellos satisfacen  $x_{1Q} = x_{2Q} = x_{3Q} = y_Q$ ,  $x_{4Q} = x_{5Q} = u_Q$ , e

$$y_Q + 0, 5y_Q^2 + 0, 1u_Q y_Q^2 = u_Q^3 \quad (1.62)$$

El modelo lineal tiene entonces la forma

$$\Delta y[t] + c_1 \Delta y[t - 1] + c_0 \Delta y[t - 2] = d_1 \Delta u[t] + d_0 \Delta u[t - 1] \quad (1.63)$$

- (iv) Cuando el modelo no lineal está descrito por dos o más ecuaciones, las coordenadas del punto de operación deben satisfacer al conjunto de ecuaciones simultáneas.

- (v) Un punto de operación en equilibrio se calcula a partir del modelo algebraico que resulta de hacer cero todas las diferencias en el modelo dinámico no lineal, es decir, cada una de las señales involucradas es reemplazada por una constante a calcular, con independencia del retardo que ella exhiba.
- (vi) La linealización puede hacerse sobre la función compuesta  $g \triangleq g_c - g_d = 0$ .

□□□

El análisis de los casos precedentes muestra que, con independencia de la naturaleza temporal de los sistemas (continuo o discreto), la linealización de sus modelos no lineales tiene ciertos pasos básicos. En primer lugar, restringiremos la linealización a la construcción de modelos lineales en torno a puntos de equilibrio. Observamos que cuando trabajamos en un punto de equilibrio, todos los valores de ese punto  $x_{1Q}, x_{2Q}, \dots$ , se pueden expresar en función del par  $(u_Q, y_Q)$ ; por ello diremos que el punto de operación en equilibrio queda definido por ese par.

Supongamos que el sistema con entrada  $u(\circ)$  y salida  $y(\circ)$  es descrito por

$$f\langle u(\circ), y(\circ) \rangle = 0 \quad (1.64)$$

donde  $f\langle \circ \rangle$  es un operador no lineal y, posiblemente, dinámico.

También suponemos que

- (i) existe, al menos un par de **valores constantes reales**  $(u_Q, y_Q)$  tales que,

$$f\langle u_Q, y_Q \rangle = 0 \quad (1.65)$$

Cada uno de estos pares define un *punto de operación en equilibrio*.

- (ii)  $f\langle u(\circ), y(\circ) \rangle$  es infinitamente diferenciable, con respecto a  $u$ , con respecto a  $y$ , y con respecto a las derivadas (o valores retardados) de ambos, en el punto de operación de interés.

Si expresamos  $u(\circ)$  y  $y(\circ)$  como

$$u(\circ) = u_Q + \Delta u(\circ) \quad (1.66)$$

$$y(\circ) = y_Q + \Delta y(\circ) \quad (1.67)$$

entonces podemos expandir el lado izquierdo de la ecuación (1.64) en una serie de Taylor, en torno al punto de operación  $(u_Q, y_Q)$ . Si en esa expansión tomamos sólo los términos de primer orden, entonces el resultado es un modelo lineal, una ecuación diferencial o una ecuación recursiva, en las variables  $\Delta u(\circ)$  y  $\Delta y(\circ)$ .

**Nota 1.1.** *El procedimiento de linealización en el caso de un sistema discreto se desarrolla sin dificultad porque las derivadas parciales de la expansión en serie de Taylor se realizan con respecto a las variables de entrada y de salida y **no con respecto de la variable discretas tiempo**.*

**Nota 1.2.** El procedimiento de linealización presentado anteriormente genera un modelo que es lineal en las componentes **incrementales** de las entradas y las salidas en torno a un punto de operación elegido (i.e. se trata de un **modelo a pequeña señal**).

Ilustramos esto con algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.6.** Considere un sistema de tiempo continuo descrito por el modelo

$$f(u(t), y(t)) = \frac{dy(t)}{dt} + \sqrt{y(t)} - \frac{(u(t))^2}{3} = 0 \quad (1.68)$$

Suponga que la entrada  $u(t)$  varía alrededor de  $u = 2$ . Encuentre un punto de operación con  $u_Q = 2$  y un modelo linealizado en torno a él.

**Solución**

(i) El punto de operación es calculado de (1.68) con  $u_Q = 2$  y tomando  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ . Esto lleva a

$$\sqrt{y_Q} - \frac{(u_Q)^2}{3} = 0 \quad \implies y_Q = \frac{16}{9} \quad (1.69)$$

(ii) El modelo linealizado es entonces construido a partir de la expansión de (1.68) en serie de Taylor para obtener:

$$\frac{d\Delta y(t)}{dt} + \frac{1}{2\sqrt{y_Q}} \Delta y(t) - \frac{2u_Q}{3} \Delta u(t) = 0 \quad (1.70)$$

Cuando se usan los valores numéricos que definen el punto de operación, se obtiene el modelo linealizado dado por:

$$\frac{d\Delta y(t)}{dt} + \frac{3}{8} \Delta y(t) - \frac{4}{3} \Delta u(t) = 0 \quad (1.71)$$

□□□

La idea fundamental que se deduce del proceso de linealización es que las propiedades del modelo lineal para valores pequeños de sus variables incrementales, permiten inferir el comportamiento del sistema original en las cercanías del punto de operación.

Para comparar efectivamente la calidad de la aproximación de un modelo linealizado, es necesario poder simular ambos modelos, el original (no-lineal) y el obtenido (lineal). Para ello, herramientas como SIMULINK son extraordinariamente poderosas. A modo de ejemplo, se construye un esquema SIMULINK para simular el modelo no lineal del Ejemplo 1.6, dado por:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \sqrt{y(t)} = \frac{(u(t))^2}{3} \quad (1.72)$$

o, en forma más conveniente para construir el esquema SIMULINK :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\sqrt{y(t)} + \frac{(u(t))^2}{3} \quad (1.73)$$

Para apreciar la calidad de la aproximación consideramos el sistema original y su modelo linealizado y desarrollamos una simulación. En esta simulación, la entrada a ambos sistemas es una constante  $u_Q$  igual a 2 más una secuencia de pulsos de amplitud creciente. Los resultados se muestran en la Figura 1.4. Podemos ver ahí que el error de linealización crece a medida que el sistema es llevado lejos del punto de operación, en torno al cual se calculó el modelo linealizado.

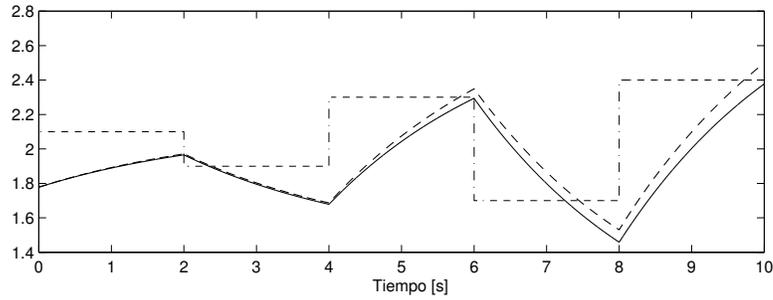


Figura 1.4: Salida del sistema no lineal (línea sólida) y salida del sistema linealizado (línea segmentada) para una onda cuadrada de amplitud creciente en la entrada (línea segmento-punteada).

**Ejemplo 1.7.** Las características de un sistema no lineal de tiempo discreto, con entrada  $u[t]$  y salida  $y[t]$ , son descritas exactamente por

$$f(u[t], y[t]) = y[t] - 0,7y[t-1] + 0,12(1 + 0,1u[t])y[t-2] - 2 + \text{sen}(u[t-1]) = 0 \quad (1.74)$$

Construya un modelo linealizado en torno al punto de operación definido por  $u_Q = 0$ .

**Solución**

(i) Para calcular  $y_Q$  aplicamos (1.65), de donde se obtiene

$$y_Q - 0,7y_Q + 0,12y_Q = 2 \implies y_Q = 4,762 \quad (1.75)$$

(ii) El modelo linealizado es ahora construido de (1.74), llevando a

$$\Delta y[t] - 0,7\Delta y[t-1] + 0,12(1 + 0,1u_Q)\Delta y[t-2] + 0,12y_Q(\Delta u[t]) + \cos(u_Q)\Delta u[t-1] = 0 \quad (1.76)$$

Entonces, usando los valores numéricos que definen el punto de operación, se obtiene un modelo linealizado dado por:

$$\Delta y[t] - 0,7\Delta y[t - 1] + 0,12\Delta y[t - 2] = -0,571\Delta u[t] + \Delta u[t - 1] \quad (1.77)$$

□□□

**Nota 1.3.** Los paquetes computacionales modernos incluyen comandos especiales para calcular modelos linealizados en torno a puntos de operación definidos por el usuario (pre-calculados). En el caso de SIMULINK, los comandos apropiados son `linmod` (para sistemas de tiempo continuo) y `dlinmod` (para sistemas de tiempo discreto e híbridos).

**Nota 1.4.** Como hemos mencionado, los modelos linealizados son sólo modelos aproximados y, por tanto, deben ser considerados con la precaución apropiada (como deberían serlo en realidad todos los modelos). Cuando se realiza la linealización de un modelo, el siguiente término no nulo de la expansión en serie de Taylor puede ser utilizado como una medida del error asociado al modelado.

Los modelos lineales pueden ser obtenidos linealizando un modelo no lineal en torno a un punto de operación. En muchas aplicaciones, los modelos lineales proveen suficiente información para estudiar la operación del sistema (no lineal) original y para sintetizar sistemas con suficiente precisión. Sin embargo, se requiere desarrollar una metodología para tratar los inevitables errores de modelado que resultan de la linealización.

Una observación más general sobre el tema de la linealización se relaciona con el hecho que este concepto se puede extender, de modo que la linealización se hace, no en torno a un punto de operación, sino que a una **trayectoria de operación**, es decir, en torno a una solución de interés ( $u_Q(t), y_Q(t)$ ) del modelo no lineal.

## 1.6. Problemas para el lector

**Problema 1.1.** Considere un sistema cuyo modelo de comportamiento está dado por:

$$y(t) = mu(t) + b \quad (1.78)$$

Determine las condiciones que deben satisfacer las constantes  $m$  y  $b$  de modo que el sistema con entrada  $u(t)$  y respuesta  $y(t)$  sea lineal.

**Problema 1.2.** El área de un rectángulo es  $A = xy$ , donde  $x$  e  $y$  representan las longitudes de sus lados.

**1.2.1** Obtenga una expresión linealizada para  $A$  en torno al punto de operación  $x_Q = 2$ ,  $y_Q = 5$ .

**1.2.2** Obtenga y describa geoméricamente el error cometido al usar el modelo lineal para calcular el área de un rectángulo con lados  $x = 3$  e  $y = 6$ .

**Problema 1.3.** Sea un sistema **lineal algebraico** de dimensión  $2 \times 2$ , es decir, con dos entradas y dos salidas. Se realizan algunos experimentos y se llega a:

$$y(t) = [2 \ -1]^T = \mathbf{T}\langle [1 \ -1]^T \rangle \quad (1.79)$$

$$y(t) = [3 \ 4]^T = \mathbf{T}\langle [1 \ -2]^T \rangle \quad (1.80)$$

Determine la respuesta del sistema cuando la entrada es  $u(t) = [1 \ 1]^T$

**Problema 1.4.** Considere un sistema con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , relacionados por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + (2 + 0,1(y(t))^2)y(t) = 2u(t) \quad (1.81)$$

**1.4.1** Determine los modelos linealizados para un punto de operación definido por  $y_Q = 0,1$ .

**1.4.2** Repita el punto anterior para  $y_Q = 3$ . Compare con el resultado anterior.

**Problema 1.5.** En un sistema con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , la relación entrada-salida está dada por

$$y(t)\frac{dy(t)}{dt} + 3(y(t))^2 = 2(u(t))^{\frac{1}{3}} \quad (1.82)$$

Redefina, si es posible, la entrada y/o la salida de modo que el modelo en las salidas redefinidas sea lineal.

**Problema 1.6.** Considere la función no lineal dada por

$$y(t) = \begin{cases} u(t) & \forall |u(t)| \leq 1 \\ \text{signo}\{u(t)\} & \forall |u(t)| > 1 \end{cases} \quad (1.83)$$

Discuta la linealización de esta función en distintos punto de operación.

**Problema 1.7.** En los sistemas tributarios modernos existe un tasa progresiva, es así como a mayor ingreso, más alto es el **porcentaje** de impuesto a pagar. Analice el sistema desde el punto de vista de la linealidad

**Problema 1.8.** Un sistema no lineal tiene un modelo dado por

$$\frac{dy(t)}{dt} + f(y)y(t) = 2u(t) \quad (1.84)$$

Donde la función  $f(y)$  aparece en la Figura 1.5.

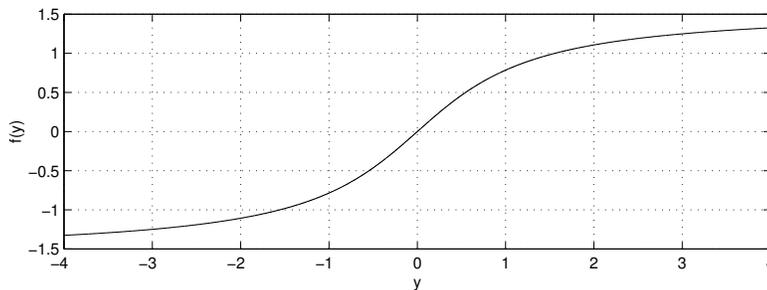


Figura 1.5: Ganancia no lineal para el Problema 1.8

Construya modelos linealizados para los puntos de operación determinados por  $y_Q = -3$ ,  $y_Q = 0$  e  $y_Q = 1$ .

**Problema 1.9.** Determine si el siguiente sistema es o no lineal

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2ty(t) = 2u(t) \quad (1.85)$$

**Problema 1.10.** Construya, si es posible, modelos lineales para los sistemas no lineales cuyos modelos se indican, con las condiciones de operación especificadas (en todos los puntos de operación resultantes)

$$y[t] - 0,5(y[t-1])^3 = u[t-5] \quad y_Q = 2 \quad (1.86)$$

$$y[t] - 0,2y[t-1]y[t-2] + 0,4y[t-3] = \frac{u[t-1]}{1 + 0,2(u[t-2])^2} \quad u_Q = 1 \quad (1.87)$$

**Problema 1.11.** *Considere el siguiente modelo no lineal*

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 0,1x_1(t)x_2(t) + u(t) \quad (1.88)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) (x_1(t))^2 \quad (1.89)$$

$$y(t) = x_1(t) + (1 + x_2(t))^2 \quad (1.90)$$

*Construya un modelo lineal en torno al punto de operación definido por  $u_Q = 1$ .*

---

**Problema 1.12.** . **Sistema predador-presa** (Lotka-Volterra). *Considere el sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales, que describe la dinámica de una población de conejos ( $c(t) > 0$ ) y de zorros ( $z(t) > 0$ ):*

$$\frac{dc(t)}{dt} = \alpha c(t) + \beta c(t)z(t) \quad (1.91)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\gamma z(t) + \delta c(t)z(t) \quad (1.92)$$

*en que los parámetros  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son positivos.*

**1.12.1** *Determine todos los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones.*

**1.12.2** *Obtenga el sistema linealizado en torno a cada uno de los puntos de equilibrio anteriores.*

**1.12.3** *Estudie y compare el tipo de soluciones del sistema linealizado en cada uno de los puntos de equilibrio.*

**1.12.4** *Elija algún valor para los parámetros, y simule el sistema original y el sistema linealizado en torno a cada punto de equilibrio, representando la solución en el plano  $(c(t), z(t))$ .*

---

## Capítulo 2

# Señales

### 2.1. Introducción

El comportamiento de los sistemas puede evaluarse observando las señales correspondientes a las variables de entrada del sistema, variables de salida e incluso a variables intermedias del mismo. Más aún, el comportamiento de los sistemas puede estudiarse, y así suele hacerse, observando su respuesta cuando se inyectan al sistema determinadas señales de prueba.

El análisis de señales es un aspecto esencial de la teoría de sistemas lineales, no sólo por su valor experimental, sino también por el uso de la propiedad de linealidad, la cual permite construir modelos en base a la respuesta del sistema a ciertas señales de prueba. En rigor, las señales reales son muy complejas, y para estudiar sus propiedades y su efecto sobre los sistemas reales, también conviene aplicar el concepto de modelo. La idea, en este libro, es aplicar modelos de señales a modelos de sistemas lineales.

### 2.2. Señales de tiempo continuo

En el caso de los sistemas de tiempo continuo, existen varios modelos de señales básicas que juegan un rol fundamental en la teoría de los sistemas lineales. Ellas y sus propiedades de mayor interés se presentan a continuación.

#### 2.2.1. Escalón unitario (función de Heaviside)

El escalón unitario en el instante  $t_o$  se define como:

$$\mu(t - t_o) \triangleq \begin{cases} 1 & \forall t \geq t_o \\ 0 & \forall t < t_o \end{cases} \quad (2.1)$$

y se representa en la Figura 2.1.

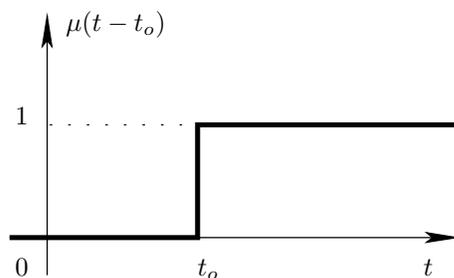


Figura 2.1: Escalón unitario o función de Heaviside.

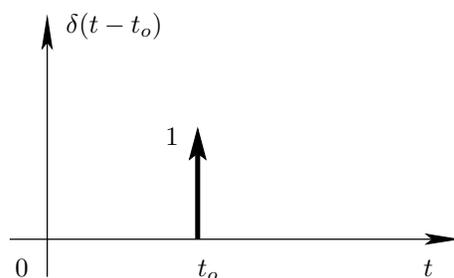


Figura 2.2: Impulso unitario o delta de Dirac.

### 2.2.2. Impulso unitario o delta de Dirac

El impulso unitario o delta de Dirac es una señal peculiar. En estricto rigor no es una función temporal, sino que es lo que se conoce en matemática como *distribución* o *función generalizada*. Se representa por  $\delta(\circ)$  y satisface:

$$\delta(t - t_o) = 0 \quad \forall t \neq t_o \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) dt = 1 \quad (2.2)$$

y se representa gráficamente como muestra la Figura 2.2.

Como se puede observar, esta señal no es físicamente realizable, y se debe entender como una idealización de determinadas situaciones. Algunas de ellas se pueden apreciar en la Figura 2.3.

Las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  de la Figura 2.3 cumplen con:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) dt = 1 \quad \forall \epsilon \quad (2.3)$$

Además:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_1(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_2(t) = 0 \quad \forall t \neq t_o \quad (2.4)$$

Una propiedad clave del delta de Dirac está descrita en el siguiente lema.



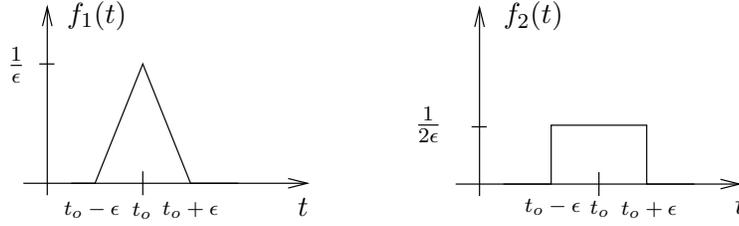


Figura 2.3: Aproximaciones al delta de Dirac

**Lema 2.1.** *Considere una función cualquiera  $f(t)$ , entonces:*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (2.5)$$

□□□

La demostración del lema anterior se basa en la definición del delta de Dirac, y en otra propiedad de interés, según la cual, si  $f(t)$  es continua en  $t = t_o$ , entonces se cumple que

$$f(t)\delta(t - t_o) = f(t_o)\delta(t - t_o) \quad (2.6)$$

El Lema 2.1 establece que toda señal puede ser expresada como una operación lineal sobre el impulso  $\delta(t - \tau)$  para  $-\infty < \tau < \infty$ . Veremos más adelante que esta propiedad será la base para calcular la respuesta de un sistema lineal ante cualquier señal, a partir de la respuesta teórica de ese sistema a un impulso unitario.

### 2.2.3. Rampa unitaria

La rampa unitaria se define como:

$$r(t - t_o) = \begin{cases} t - t_o & \forall t \geq t_o \\ 0 & \forall t < t_o \end{cases} \quad (2.7)$$

y se muestra en la Figura 2.4.

El delta de Dirac, el escalón unitario y la rampa unitaria pertenecen a una secuencia de funciones, donde cada una se puede obtener como la derivada de la siguiente, es decir:

$$\delta(t - t_o) = \frac{d\mu(t - t_o)}{dt} = \frac{d^2r(t - t_o)}{dt^2} \quad (2.8)$$

o, equivalentemente, a través de la integral de la anterior, es decir:

$$r(t - t_o) = \int_{-\infty}^t \mu(\tau - t_o) d\tau = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\nu - t_o) d\nu d\tau \quad (2.9)$$

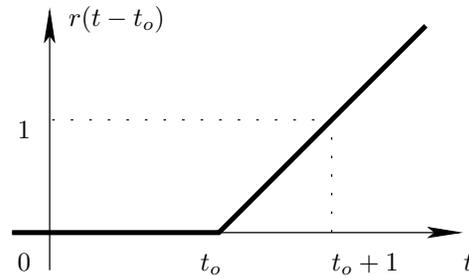


Figura 2.4: Rampa unitaria.

Al interpretar el impulso de Dirac como la derivada del escalón unitario, hemos asignado un valor a la derivada de una discontinuidad finita. Esta asignación tiene gran valor experimental, pero como el escalón no es una función diferenciable, su manejo suele provocar dificultades matemáticas que deben tratarse caso a caso.

### 2.2.4. Exponencial

La función exponencial es definida genéricamente como:

$$f(t) = e^{\alpha t} \quad (2.10)$$

donde  $\alpha = \sigma + j\omega$ , con  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, cuando  $\omega \neq 0$ , la exponencial es una función compleja ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ), y sólo tiene sentido físico cuando se combina con su señal compleja conjugada,  $f(t)^* = e^{\alpha^* t}$ , en cuyo caso la relación de Euler (2.14) permite obtener una senoide de amplitud modulada exponencialmente, situación que se analiza por separado más adelante.

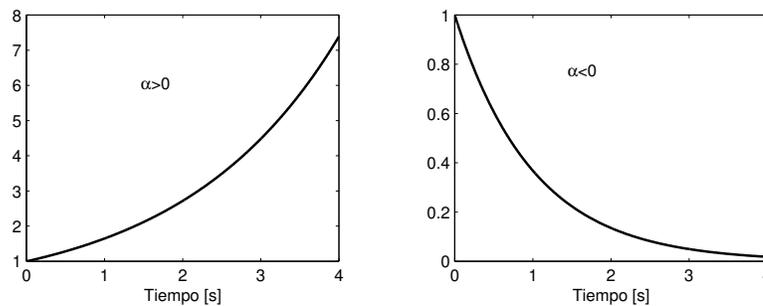


Figura 2.5: Exponenciales creciente (izquierda) y decreciente (derecha)

Para el caso  $\alpha \in \mathbb{R}$  distinguimos dos situaciones, como se ilustra en la Figura 2.5, para  $t \geq 0$ . Cuando  $\alpha > 0$  tenemos una exponencial creciente. Esta señal

está asociada a los sistemas inestables, concepto que se explicará más adelante. Cuando  $\alpha < 0$ , estamos en presencia de una exponencial decreciente. Esta forma exponencial es de enorme importancia en la teoría de sistemas lineales, ya que permite la descripción de una amplia gama de fenómenos, por ejemplo, la descarga de un condensador a través de un resistor y el decaimiento de sustancias radiactivas, entre otros.

Naturalmente que el caso especial  $\alpha = 0$  corresponde a la función constante.

Para las exponenciales decrecientes se suele definir un parámetro adicional: la constante de tiempo  $\tau$  definida como:

$$\tau = \frac{1}{|\sigma|} \quad (2.11)$$

La constante de tiempo es una medida de la **velocidad de decaimiento de la exponencial**, tal como se ilustra en la Figura 2.6, para  $t \geq 0$ .

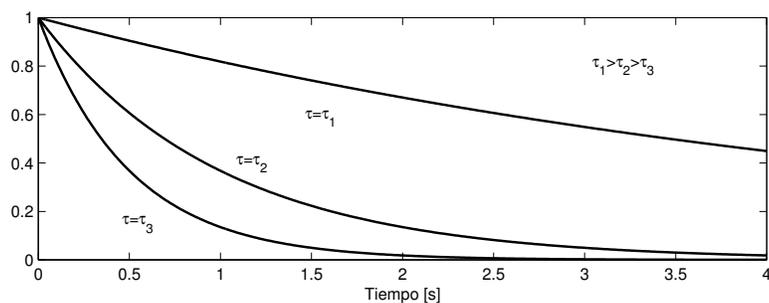


Figura 2.6: Exponenciales de diferentes velocidades de decaimiento

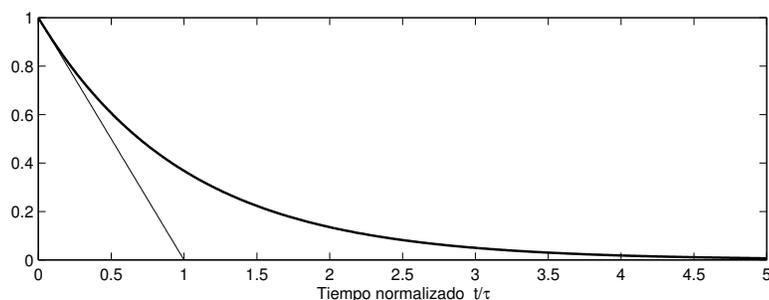


Figura 2.7: Propiedad de la constante de tiempo

Una propiedad interesante de la exponencial se muestra en la Figura 2.7, donde se observa que la tangente a la curva, trazada en  $t = 0$  intercepta la

asíntota de la exponencial (el eje temporal) exactamente en  $t = \tau$ , lo cual puede ser verificado analíticamente por el lector.

### 2.2.5. Señales sinusoidales

La señal fundamental en todo tipo de oscilaciones periódicas es la función sinusoidal, que se describe en forma genérica por:

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \quad (2.12)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $\omega$  es la frecuencia angular (en [rad/s]) y  $\beta$  es el desfase o ángulo de fase.

El período,  $T$  [s], y la frecuencia,  $f$  [Hz], de la senoide están dados por:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.13)$$

Un representación equivalente para las señales sinusoidales se puede obtener a partir de la fórmula de Euler:

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = A \frac{e^{j(\omega t + \beta)} - e^{-j(\omega t + \beta)}}{2j} \quad (2.14)$$

De esta ecuación se puede apreciar la interpretación que usualmente se da a la exponencial imaginaria  $e^{j\omega t}$ , ya que<sup>1</sup>:

$$\operatorname{sen}(\omega t) = \Im\{e^{j\omega t}\}, \quad \operatorname{cos}(\omega t) = \Re\{e^{j\omega t}\} \quad (2.15)$$

### 2.2.6. Sinusoidales con amplitud exponencial

Otra de las señales que aparece frecuentemente en la descripción del comportamiento natural de los sistemas es la sinusoidal cuya amplitud varía exponencialmente en el tiempo, es decir, de la forma:

$$f(t) = Ae^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t + \beta) \quad (2.16)$$

Naturalmente, cuando  $\sigma = 0$ , la señal se reduce a una senoide pura. Los casos  $\sigma < 0$  (senoide amortiguada exponencialmente) y  $\sigma > 0$  (senoide creciente exponencialmente) se muestran en la Figura 2.8, para  $t \geq 0$ .

Para estas funciones, la relación de Euler lleva a:

$$Ae^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = A \frac{e^{(\sigma + j\omega)t + j\beta} - e^{(\sigma - j\omega)t - j\beta}}{2j} \quad (2.17)$$

<sup>1</sup> $\Im\{\circ\}$  representa la *parte imaginaria* ◦

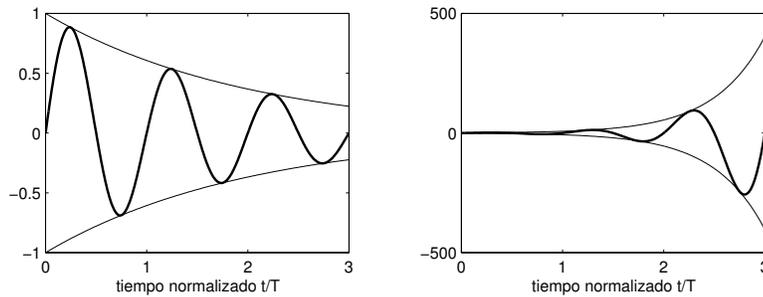


Figura 2.8: Señales sinusoidales con amplitud disminuyendo exponencialmente (izq.) y creciendo exponencialmente (der.)

### 2.2.7. Potencia y energía en señales de tiempo continuo

En muchos casos se puede asignar significado físico a una señal  $f(t)$ . En esos casos, se suele asociar potencia y energía a la señal, en la forma:

$$\text{potencia: } p(t) = f(t)^2$$

$$\text{energía: } w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$$

Si, por ejemplo,  $f(t)$  es la corriente eléctrica, que fluye en una resistencia de valor  $R = 1 \text{ } [\Omega]$ , entonces  $p(t)$  es la potencia instantánea disipada en la resistencia, y  $w(t)$  es la energía total disipada en ella.

## 2.3. Señales de tiempo discreto

En el caso de las señales de tiempo discreto, existen contrapartes directas de las señales para tiempo continuo, con algunas sutiles, pero significativas diferencias. La primera diferencia evidente es que la variable independiente está definida sobre el conjunto de los números enteros,  $\mathbb{Z}$ . Otras diferencias aparecerán más adelante.

### 2.3.1. Escalón unitario de tiempo discreto

El escalón unitario en el instante  $t_o$  se define como:

$$\mu[t - t_o] \triangleq \begin{cases} 1 & \forall t \geq t_o \\ 0 & \forall t < t_o \end{cases} \quad (2.18)$$

y se representa en la Figura 2.9.

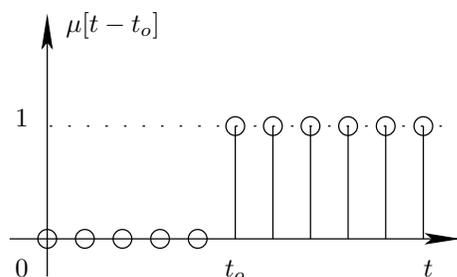


Figura 2.9: Escalón unitario de tiempo discreto

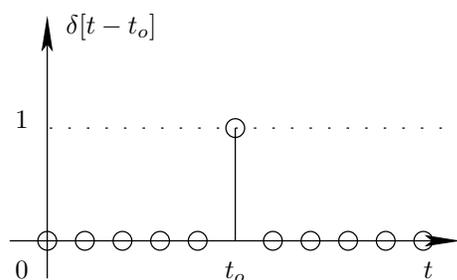


Figura 2.10: Impulso unitario discreto o delta de Kronecker

### 2.3.2. Impulso unitario discreto o delta de Kronecker

El impulso unitario discreto o delta de Kronecker se define como:

$$\delta[t - t_o] \triangleq \begin{cases} 0 & \forall t \neq t_o \\ 1 & t = t_o \end{cases} \quad (2.19)$$

y se representa en la Figura 2.10.

Una propiedad clave del delta de Kronecker, análoga a la del delta de Dirac (lema 2.1), está descrita en el siguiente lema.

**Lema 2.2.** *Considere una función cualquiera  $f[t]$ , entonces:*

$$f[t] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]\delta[t - i] \quad (2.20)$$

□□□

La demostración del lema anterior se basa en la definición del delta de Kronecker, y en otra propiedad de interés, según la cual se cumple que:

$$f[t]\delta[t - \ell] = f[\ell]\delta[t - \ell] \quad (2.21)$$

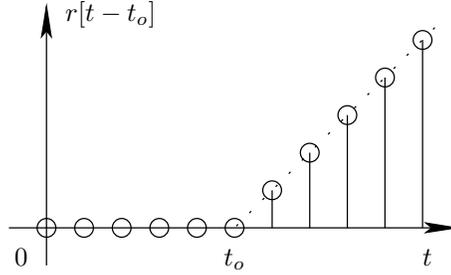


Figura 2.11: Rampa unitaria de tiempo discreto

El Lema 2.2 establece que toda señal puede ser expresada como una operación lineal sobre un tren de deltas de Kronecker. Veremos más adelante que esta propiedad será la base para calcular la respuesta de un sistema lineal de tiempo discreto a partir de su respuesta a un impulso unitario.

### 2.3.3. Rampa unitaria de tiempo discreto

La rampa unitaria se define como:

$$r[t - t_o] \triangleq \begin{cases} t - t_o & \forall t \geq t_o \\ 0 & \forall t < t_o \end{cases} \quad (2.22)$$

y se representa en la Figura 2.11.

De manera similar a las señales de tiempo continuo, el delta de Kronecker, el escalón unitario y la rampa unitaria pertenecen a una secuencia de funciones, donde cada una se puede obtener como la primera diferencia del miembro que le sigue, es decir:

$$\delta[t - t_o] = \mu[t - t_o] - \mu[t - t_o - 1]; \quad \mu[t - t_o] = r[t - t_o + 1] - r[t - t_o] \quad (2.23)$$

o a través de la acumulación de la que precede, es decir

$$r[t - t_o] = \sum_{i=t_o+1}^{\infty} \mu[t - i]; \quad \mu[t - t_o] = \sum_{i=t_o}^{\infty} \delta[t - i] \quad (2.24)$$

### 2.3.4. Exponencial de tiempo discreto

La función exponencial es definida genéricamente como:

$$f[t] = \lambda^t \quad (2.25)$$

donde  $\lambda$  es, en general, un número complejo. Sin embargo, cuando  $\Im\{\lambda\} \neq 0$ , la exponencial es una señal compleja ( $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ), y sólo tiene sentido físico

cuando se combina con  $(\lambda^*)^t$ , en cuyo caso se llega, a través de la relación de Euler, a una senoide de amplitud modulada exponencialmente, situación que se analiza por separado más adelante.

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  distinguimos cuatro casos, como se ilustra en la Figuras 2.12 y 2.13, para  $t \geq 0$ .

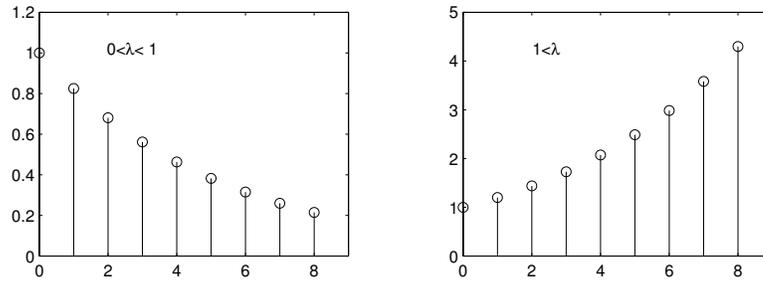


Figura 2.12: Exponenciales de tiempo discreto, decreciente (izquierda) y creciente (derecha),  $\lambda \in \mathbb{R}^+$

En la Figura 2.12, se observa el caso cuando  $\lambda$  es positivo, a la izquierda aparece un ejemplo para  $0 < \lambda < 1$  y a la derecha, aparece un ejemplo para  $\lambda > 1$ . Cuando  $\lambda > 1$  tenemos una exponencial creciente. Esta señal aparece asociada a los sistemas inestables de tiempo discreto, como se explicará más adelante. Por su parte, cuando  $0 < \lambda < 1$ , estamos en presencia de una exponencial decreciente. Esta forma exponencial es de enorme importancia en la teoría de sistemas, ya que interviene con frecuencia en la descripción del comportamiento natural de una amplia gama de sistemas.

En la Figura 2.13, se observa el caso cuando  $\lambda$  es negativo, a la izquierda aparece el sub-caso  $0 > \lambda > -1$  y a la derecha, aparece el sub-caso  $\lambda < -1$ .

Naturalmente que el caso especial  $\lambda = 1$  corresponde a la función constante, y el caso  $\lambda = -1$  puede identificarse como una señal sinusoidal, las cuales se revisan a continuación.

### 2.3.5. Señales sinusoidales de tiempo discreto

Al igual que en el caso de tiempo continuo, en sistemas lineales de tiempo discreto, la señal fundamental en oscilaciones periódicas es la función sinusoidal, cuya forma genérica es:

$$f[t] = A \operatorname{sen}(\theta t + \beta) \quad (2.26)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $\theta$  es la frecuencia angular normalizada (en [rad]) y  $\beta$  es desfase o ángulo de fase. Note que la unidad de la frecuencia es [rad], y en el Capítulo 11 veremos la relación entre ésta y la frecuencia angular en tiempo continuo, la que se mide en [rad/s].

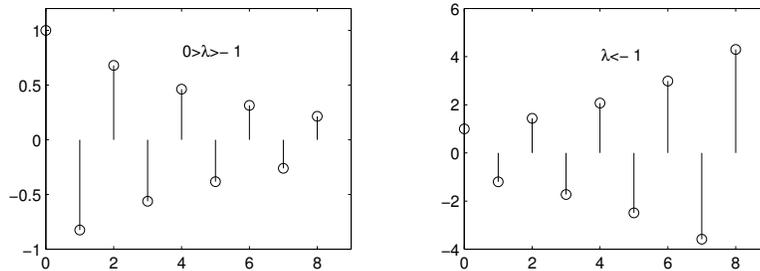


Figura 2.13: Exponenciales de tiempo discreto, decreciente (izquierda) y creciente (derecha),  $\lambda \in \mathbb{R}^-$

Una importante diferencia con las sinusoides de tiempo continuo, es que una senoide de tiempo discreto puede ser **aperiódica** en  $t$ .

**Lema 2.3.** Una senoide de tiempo discreto es periódica si sólo si existen números naturales  $p$  y  $N$ , tales que:

$$\theta = 2\pi \frac{p}{N} \quad (2.27)$$

**Demostración**

Una senoide discreta  $\text{sen}(\theta t)$  es periódica si y sólo si existe un número natural  $N$  tal que, para todo  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{sen}(\theta t) = \text{sen}(\theta(t + N)) = \text{sen}(\theta t) \cos(\theta N) + \cos(\theta t) \text{sen}(\theta N) \quad (2.28)$$

Para que esta igualdad se cumpla para todo  $t \in \mathbb{N}$ , es necesario y suficiente que  $\cos(\theta N) = 1$  ( $\iff \text{sen}(\theta N) = 0$ ). Esto se cumple si y sólo si existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que se cumple (2.27).

□□□

De acuerdo a este lema, las sinusoidales de tiempo discreto:  $\text{sen}(t/7)$ ,  $\cos(2t)$ ,  $\text{sen}(e t)$  son todas señales **aperiódicas**.

Un representación equivalente para las señales sinusoidales se puede obtener a partir de la fórmula de Euler:

$$A \text{sen}(\theta t + \beta) = A \frac{e^{j(\theta t + \beta)} - e^{-j(\theta t + \beta)}}{2j} \quad (2.29)$$

### 2.3.6. Sinusoidales con amplitud exponencial

La senoide con amplitud modulada exponencialmente interviene frecuentemente describiendo el comportamiento natural de los sistemas de tiempo discreto. Esta señal aparece cuando  $\lambda \in \mathbb{C}$ , lo cual significa que podemos expresar

$\lambda$  en la forma polar:

$$\lambda = \rho e^{j\theta} = |\lambda| e^{j\angle\lambda} \quad (2.30)$$

y, de esta forma, tenemos que:

$$\lambda^t = \rho^t e^{j\theta t} = \rho^t \cos(t\theta) + j\rho^t \sin(t\theta) \quad (2.31)$$

Consideremos entonces la señal:

$$f[t] = A\rho^t \sin(\theta t + \beta) \quad (2.32)$$

Naturalmente, cuando  $\rho = 1$ , la señal se reduce a una senoide pura. Los casos  $0 < \rho < 1$  (senoide amortiguada exponencialmente) y  $\rho > 1$  (senoide creciente exponencialmente) se muestran en la Figura 2.14, .

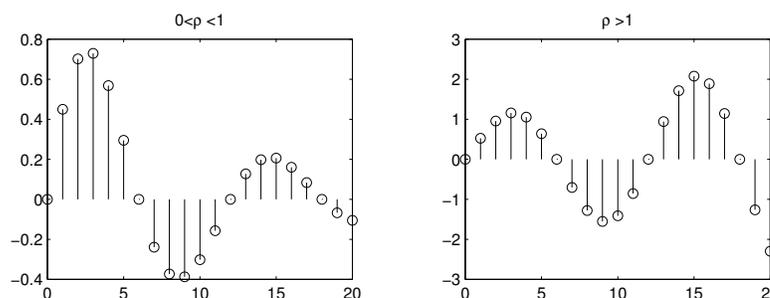


Figura 2.14: Señales sinusoidales de tiempo discreto con amplitud variando exponencialmente

### 2.3.7. Potencia y energía en señales de tiempo discreto

Como una extensión de las interpretaciones en la subsección §2.2.7, también se suele asociar potencia y energía a señales de tiempo discreto. Si la señal es  $f[t]$ , definida  $\forall t \in \mathbb{Z}$ , entonces:

$$\text{potencia: } p[t] = f[t]^2$$

$$\text{energía: } w[t] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} f[t]^2 dt$$

## 2.4. Problemas para el lector

**Problema 2.1.** Dibuje los gráficos de las siguientes señales:

$$f_1(t) = |\operatorname{sen}(2t)|; \quad f_2(t) = \mu(-3t + 2) \quad (2.33)$$

$$f_3(t) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{t}; \quad f_4(t) = r(-4t - 2) \quad (2.34)$$

**Problema 2.2** (Señal de amplitud modulada). Suponga que la señal  $f(t) = \cos(10\pi t)$  es multiplicada por otra señal  $g(t)$ . Dibuje el gráfico del producto  $f(t)g(t)$ , para dos casos distintos:  $g(t) = 0,2 \operatorname{sen}(\pi t)$  y  $g(t) = \operatorname{signo}(\operatorname{sen}(\pi t))$

**Problema 2.3** (Pulsos de ancho modulado). Supongamos se tiene la secuencia de pulsos:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu(t - 3i) - \mu(t - 1 - g(t) - 3i)) \quad (2.35)$$

Construya un gráfico de la señal  $f(t)$  para  $g(t) = 0,5 \operatorname{sen}(0,1\pi t)$ .

**Problema 2.4.** Considere la función:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\alpha(t - 2))}{t - 2} \quad (2.36)$$

Dibuje  $f(t)$  (use MATLAB) para diferentes valores de  $\alpha$ . Comente sus resultados

**Problema 2.5.** Suponga que se aplica el Lema 2.2 usando una aproximación para  $\delta(t)$  dada por:

$$\delta(t) \approx \frac{\mu(t + 0,5\epsilon) - \mu(t - 0,5\epsilon)}{\epsilon} \quad (2.37)$$

¿Cuál es el error que se comete?

**Problema 2.6.** Determine (y grafique) una expresión analítica, usando deltas de Dirac si es necesario, para la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f_1(t) = 2\mu(t - 2) - \mu(t - 4) \quad (2.38)$$

$$f_2(t) = \operatorname{sen}\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) \mu\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.39)$$

$$f_3(t) = r\left(\frac{2t - 4}{3}\right) \quad (2.40)$$

$$f_4(t) = (r(t) - 2r(t - 2)) \mu(-t + 4) \quad (2.41)$$

**Problema 2.7.** Considere los gráficos de la Figura 2.15.

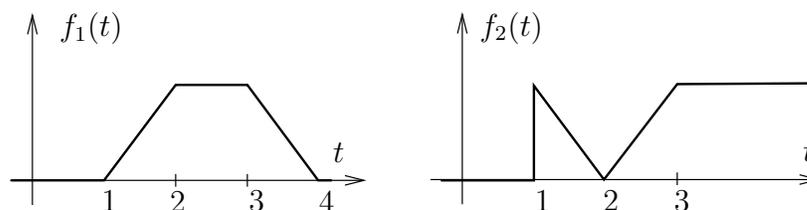


Figura 2.15: Señales compuestas

**2.7.1** Encuentre la expresión analítica para cada una de las señales (use las señales básicas definidas en este capítulo).

**2.7.2** Determine una expresión analítica para la integral de cada señal en el intervalo  $[0, t]$ .

**Problema 2.8.** Grafique las siguientes señales de tiempo discreto:

$$f_1[t] = \mu[t - 2] - 3\mu[t - 5] \quad (2.42)$$

$$f_2[t] = (0,8)^t \cos(0,25t) \quad (2.43)$$

$$f_3[t] = 1 - \text{sen}(t\pi/8) \quad (2.44)$$

**Problema 2.9.** Considere la secuencia de números  $\{2; 1; 2; 1; 2; 1; 2; 1; 2; 1, \dots\}$ . Si asocia esa secuencia a una señal de tiempo discreto, encuentre una expresión analítica que describa la secuencia, en término de las funciones básicas definidas en este capítulo.

## Capítulo 3

# Análisis en tiempo continuo

### 3.1. Introducción

La herramienta fundamental para describir los cambios de una variable en el dominio del tiempo continuo es la derivada, por tanto, el modelo matemático básico para los sistemas en tiempo continuo es la ecuación diferencial del sistema, EDS, la cual relaciona la entrada del sistema,  $u(t)$ , con la salida,  $y(t)$ . En el caso de modelos linealizados (Capítulo 1), debe entenderse que nos referimos a la entrada incremental  $\Delta u(t)$  y salida incremental  $\Delta y(t)$ .

Como ya hemos destacado, cuando se dispone de un buen modelo lineal para un sistema, se puede utilizar numerosas y poderosas herramientas de análisis, síntesis y diseño. Por ejemplo, para resolver una EDS respecto de una entrada particular y condiciones iniciales específicas, los métodos operacionalmente más eficientes pertenecen probablemente al dominio del tiempo. Aprovechando tales métodos de resolución en el tiempo presentaremos en este capítulo las soluciones generales para tiempo continuo, suponiendo que el lector tiene la preparación matemática previa necesaria para utilizar esos métodos de resolución sin necesidad de demostración.

El estudio de las propiedades de las soluciones de una EDS nos permitirá introducir indicadores de propiedades fundamentales para los sistemas dinámicos lineales tales como su *comportamiento natural*, *estabilidad*, *velocidad relativa*, *ganancia* y otras. La aplicación de los indicadores descritos en este capítulo y en el siguiente, para el caso de sistemas de tiempo discreto, es más eficiente en el dominio de la frecuencia. Éste y otros temas se abordarán en capítulos posteriores a través de las transformaciones de Fourier, de Laplace y Zeta.

### 3.2. Ecuación diferencial del sistema (EDS)

La forma general de la EDS, para un sistema lineal e invariante en el tiempo, es

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) \\ = b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2} u(t)}{dt^{n-2}} + \dots + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

La solución a esta ecuación debe cumplir además con las restricciones que imponen las condiciones iniciales (estado inicial).

En algunos casos, conviene usar una notación compacta, tipo operador, para denotar la operación derivada. Con este propósito, introducimos el operador de Heaviside,  $\rho \langle \circ \rangle$  definido por

$$\rho \langle f(t) \rangle = \rho f(t) \triangleq \frac{d f(t)}{dt} \quad (3.2)$$

$$\rho^n \langle f(t) \rangle = \rho^n f(t) = \rho \langle \rho^{n-1} \langle f(t) \rangle \rangle = \frac{d^n f(t)}{dt^n} \quad (3.3)$$

El operador de Heaviside representa la derivada de una función y tiene un inverso asociado, definido por la integral

$$\rho^{-1} \langle f(t) \rangle = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

Usando este operador, el modelo (3.1) puede ser escrito como

$$\rho^n y(t) + a_{n-1} \rho^{n-1} y(t) + \dots + a_0 y(t) = b_n \rho^n u(t) + b_{n-1} \rho^{n-1} u(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (3.5)$$

Para ilustrar la forma en que se llega a la EDS desarrollamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.** Considere la red eléctrica de la Figura 3.1, donde todos los componentes son lineales.

Aplicando las leyes de Kirchoff y las relaciones terminales de las componentes eléctricas se llega a:

$$v_f(t) = R_1 i(t) + v(t) \quad (3.6)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2} \quad (3.7)$$

Derivando ambos miembros de las ecuaciones (3.6) y (3.7) se obtiene:

$$\frac{dv_f(t)}{dt} = R_1 \frac{di(t)}{dt} + \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.8)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} v(t) + C \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_2} \frac{dv(t)}{dt} \quad (3.9)$$

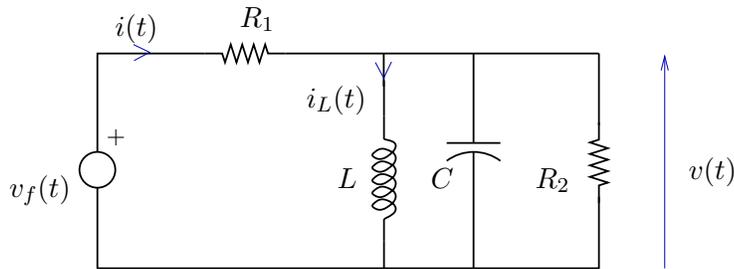


Figura 3.1: Red RLC

Combinando las ecuaciones (3.8) y (3.9) se obtiene finalmente:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{R_1 C} \frac{dv_f(t)}{dt} \quad (3.10)$$

Este modelo tiene la estructura de la ecuación (3.1), en que  $u(t) = v_f(t)$ ,  $y(t) = v(t)$ ,  $n = 2$ , y los valores de los parámetros son:

$$a_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}; \quad a_0 = \frac{1}{LC}; \quad b_2 = 0; \quad b_1 = \frac{1}{R_1 C}; \quad b_0 = 0 \quad (3.11)$$

Además, la solución  $v(t)$  debe ser tal que satisfaga las condiciones iniciales impuestas por la tensión inicial en el condensador, y la corriente inicial en el inductor.

□□□

En forma resumida, podemos afirmar que:

La EDS es un modelo dinámico del sistema que describe una restricción fundamental sobre ciertas combinaciones de la entrada, la salida y algunas derivadas de ambas señales.

### 3.3. La respuesta del sistema

La solución de la EDS condensa aspectos fundamentales del comportamiento temporal del sistema. Una aproximación intuitiva a esta conexión sugiere que la excitación no sólo fuerza determinada conducta en la respuesta, sino que en ese proceso revela aspectos claves de la naturaleza del sistema. Esta percepción justifica el observar con detención la solución de la EDS y algunas formas en que ella puede ser descompuesta para su mejor comprensión.

### 3.3.1. Componente homogénea y componente particular

Una primera forma de estudiar la respuesta del sistema es descomponerla de modo de identificar aquella parte que captura la naturaleza del sistema, componente **natural u homogénea**, y la otra, que captura la naturaleza específica de la excitación, componente **particular o forzada**.

La componente homogénea,  $y_h(t)$ , satisface la ecuación diferencial homogénea asociada a (3.1), es decir:

$$\rho^n y_h(t) + a_{n-1} \rho^{n-1} y_h(t) + \dots + a_0 y_h(t) = 0 \quad (3.12)$$

Note que esta ecuación tiene un número infinito de soluciones, las que pueden describirse genéricamente como una familia. Los miembros de esta familia se diferencian por los valores numéricos específicos que se pueden escoger para un conjunto de  $n$  constantes indeterminadas.

Por su parte, la componente o solución particular,  $y_p(t)$ , es una función específica del tiempo, independiente de las condiciones iniciales, que satisface la ecuación (3.1).

La solución completa  $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$  queda totalmente determinada al usar las condiciones iniciales, **aplicadas a la respuesta completa**,  $y(t)$ , para calcular las constantes indeterminadas presentes en  $y_h(t)$ .

Antes de proseguir con el análisis consideraremos un ejemplo.

**Ejemplo 3.2.** *Suponga que la EDS de un sistema está dada por:*

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4u(t) \quad (3.13)$$

y que la respuesta  $y(t)$  debe satisfacer la condición inicial  $y(0) = -0,5$ . Se desea calcular la respuesta del sistema para  $t \geq 0$  cuando  $u(t) = 1$ .

**y<sub>h</sub>(t)**

La componente homogénea debe cumplir con:

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + 2y_h(t) = 0 \quad (3.14)$$

Esta ecuación es satisfecha por  $y_h(t) = Ce^{-2t}$ , para cualquier valor de la constante  $C$ .

**y<sub>p</sub>(t)**

La componente particular  $y_p(t)$  es una función, independiente de las condiciones iniciales, que debe satisfacer (3.13) con  $u(t) = 1$ . Una solución simple es  $y_p(t) = 2, \forall t \geq 0$ .

De esta forma, la solución completa es:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-2t} + 2 \quad (3.15)$$

y la constante  $C$  se calcula de modo que  $y(0)$  satisfaga la condición inicial  $y(0) = -0,5$ . Por lo tanto, se obtiene  $C = -2,5$  e  $y(t) = -2,5e^{-2t} + 2$

□□□

### 3.3.2. Frecuencias y modos naturales

La componente natural u homogénea,  $y_h(t)$  depende sólo de la **ecuación característica** asociada a (3.1), dada por:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.16)$$

Si las soluciones de (3.16) son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  con *multiplicidad*  $n_1, n_2, \dots, n_p$  respectivamente, tal que  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ , entonces la forma general de  $y_h(t)$  es:

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} C_{ki} t^{i-1} e^{\lambda_k t} \quad (3.17)$$

donde los  $C_{ki}$  son constantes arbitrarias (constantes indeterminadas) que generan los grados de libertad necesarios para que la **respuesta completa** satisfaga las condiciones iniciales.

Los valores de  $\lambda$  que satisfacen (3.16) son conocidos como autovalores, valores propios<sup>1</sup>, valores característicos o **frecuencias naturales** del sistema. Dado que los coeficientes de la ecuación característica asociada a la EDS son reales, todos los valores característicos son reales, o bien aparecen en pares complejos conjugados.

A su vez, cada una de las funciones temporales, asociadas a  $\lambda_k$ , de la forma:

$$t^{i-1} e^{\lambda_k t} \quad (3.18)$$

que aparecen en (3.17) se denomina **modo natural** del sistema.

Los modos naturales se asocian unívocamente a las frecuencias naturales, y la forma temporal de los primeros depende de la multiplicidad y la ubicación de los segundos en el plano complejo. En la Figura 3.2 se aprecia un mapa general de modos naturales, suponiendo multiplicidad uno para cada frecuencia natural. En esa figura se asocia una señal (modo natural) a cada frecuencia natural, excepto en el caso de frecuencias complejas, en que se considera el par de complejos conjugados.

### 3.3.3. Modos forzantes y modos forzados

La componente particular de la respuesta,  $y_p(t)$ , es una función estrechamente ligada a la entrada,  $u(t)$ . Un caso simple, en que podemos apreciar esta relación, es cuando  $u(t)$  puede describirse como una combinación lineal de funciones de la forma  $e^{\beta_i t}$ , es decir:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\ell} B_i e^{\beta_i t} \quad (3.19)$$

donde los  $\beta_i$ 's son distintos y ninguno de ellos coincide con alguna frecuencia natural. Cada una de las funciones  $e^{\beta_i t}$  recibe el nombre de **modo forzante**.

<sup>1</sup>Esta denominación resultará natural para modelos en variables de estado (Capítulo 10)

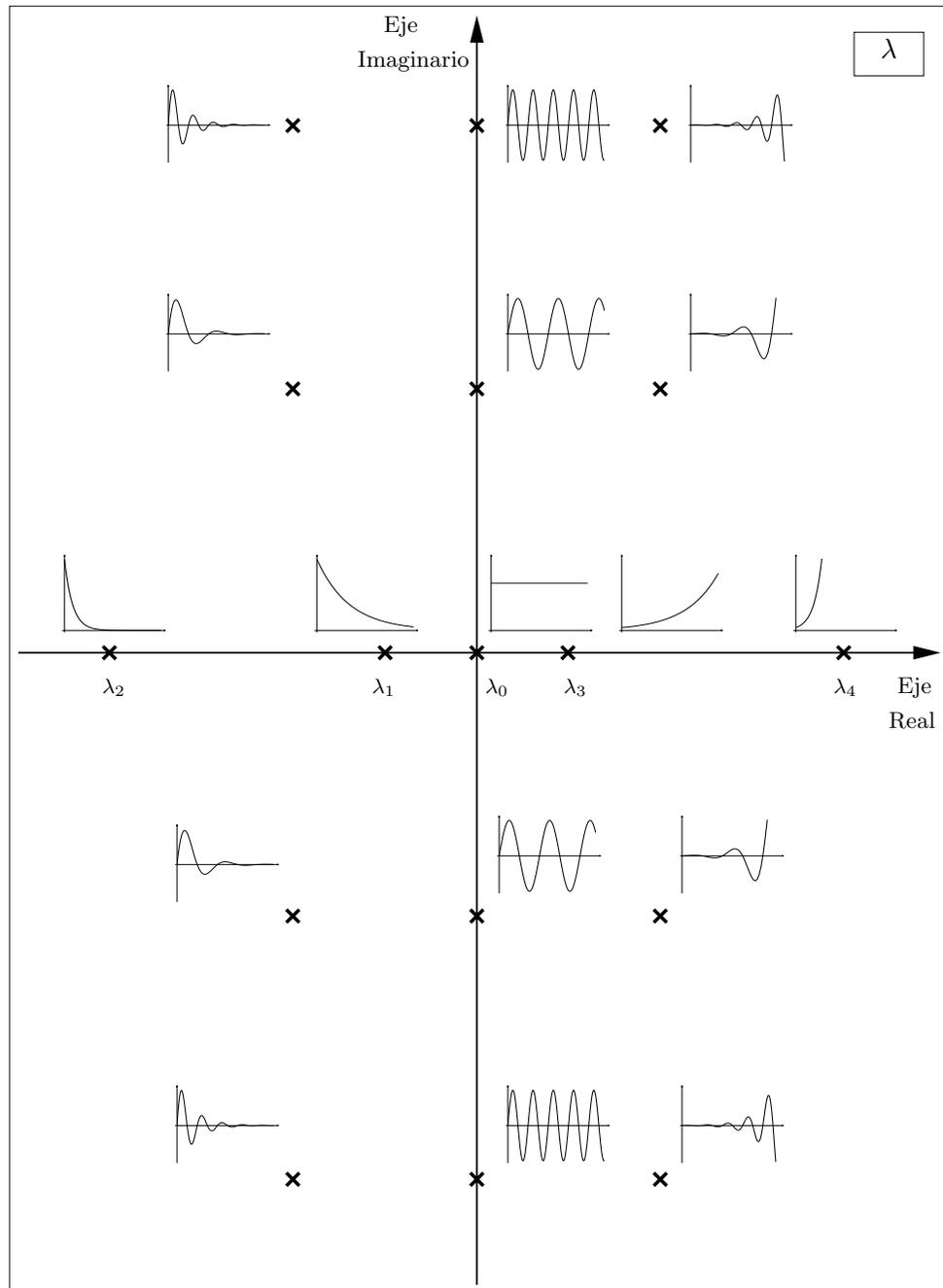


Figura 3.2: Relación entre la ubicación de las frecuencias naturales (de multiplicidad uno) y los modos naturales

Se puede verificar, usando la linealidad del sistema, que la solución particular,  $y_p(t)$ , está dada por:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{\ell} y_{pi}(t) \quad , \quad \text{en que} \quad y_{pi}(t) = K_i B_i e^{\beta_i t} \quad (3.20)$$

y donde cada uno de los coeficientes es:

$$K_i = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} b_k (\beta_i)^k}{\sum_{l=0}^n a_l (\beta_i)^l} \quad (3.21)$$

La respuesta  $y_p(t)$  contiene **modos forzados**. Bajo la suposición anterior, relativa a que ningún  $\beta'_i$ s coincide con las frecuencias naturales, cada uno de los modos forzados coincide con uno de los modos forzantes.

Observe que podemos identificar a  $K_i$  con una **ganancia** asociada al modo forzante  $i$ -ésimo. Cuando el modo forzante es una constante, es decir,  $e^{\beta t} = 1$ , se habla de la **ganancia a continua**.

Para facilitar la comprensión del concepto de ganancia a modos, consideremos un ejemplo.

**Ejemplo 3.3.** *La EDS de un sistema lineal es:*

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = 2u(t); \quad \text{entonces} \quad a_1 = 1; \quad a_0 = 3; \quad b_0 = 2 \quad (3.22)$$

Supongamos que la entrada es  $u(t) = 5 + 4 \cos(\pi t + \pi/4)$ , entonces podemos expresarla como:

$$u(t) = \sum_{i=1}^3 B_i e^{\beta_i t} = 5e^{\beta_1 t} + (2e^{j\frac{\pi}{4}}) e^{\beta_2 t} + (2e^{-j\frac{\pi}{4}}) e^{\beta_3 t} \quad (3.23)$$

donde  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = j\pi$  y  $\beta_3 = -j\pi$ , es decir, hay tres modos forzantes presentes. Las ganancias están dadas por (3.21), y para este caso particular:

$$K_1 = \frac{b_0}{\beta_1 + a_0} = \frac{2}{3} \quad (3.24)$$

$$K_2 = \frac{b_0}{\beta_2 + a_0} = \frac{2}{j\pi + 3} = 0,3180 - j0,3330 = 0,4604e^{-j0,8084} \quad (3.25)$$

$$K_3 = \frac{b_0}{\beta_3 + a_0} = \frac{2}{-j\pi + 3} = 0,3180 + j0,3330 = 0,4604e^{j0,8084} \quad (3.26)$$

□□□

El tratamiento general de la solución particular, incluyendo la coincidencia entre frecuencias naturales y frecuencias forzantes, será pospuesto para capítulos futuros; pero en el intertanto podemos establecer un hecho trascendente:

Los sistemas lineales exhiben ganancias distintas para modos forzantes distintos, y esta capacidad de discriminación es la base para el análisis y diseño de sistemas de procesamiento de señales y para otras aplicaciones.

### 3.3.4. Estabilidad

Como ya hemos mencionado, los modos naturales describen aspectos esenciales de un sistema lineal. En primer lugar, los modos naturales guardan estrecha relación con la idea de **estabilidad**. Intuitivamente podemos definir un sistema lineal (o, mejor dicho, un modelo lineal) como estable si todas las variables (señales) del sistema permanecen acotadas ante cualquier excitación acotada y para cualquier estado inicial acotado. Si consideramos sólo el efecto de condiciones iniciales, resulta que la estabilidad requiere que los modos naturales sean todos acotados. Sin embargo, veremos que la estabilidad de un sistema requiere que todos los modos naturales decaigan en el tiempo.

Como cada modo natural depende de una frecuencia natural, son éstas, es decir, las raíces de la ecuación característica del sistema, las que determinan la estabilidad del sistema. Consideremos el caso de un modo natural de la forma genérica:

$$y_{h1}(t) = Ce^{\lambda t}; \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.27)$$

Sea  $\lambda = \sigma + j\omega_o$ , entonces

$$y_{h1}(t) = Ce^{\lambda t} = Ce^{\sigma t}e^{j\omega_o t} = Ce^{\sigma t}(\cos(\omega_o t) + j \operatorname{sen}(\omega_o t)) \quad (3.28)$$

De la expresión anterior se observa que  $y_{h1}(t)$  decae a medida que el tiempo transcurre si y sólo si  $e^{\lambda t}$  decae, y esto ocurre si y sólo si  $\sigma < 0$ . Esto se ve reflejado claramente en la Figura 3.2.

La observación del párrafo precedente se puede resumir formalmente en la definición de la llamada estabilidad asintótica:

Un modelo lineal e invariante en el tiempo es **estable** si y sólo si todos sus modos naturales decaen asintóticamente a cero, es decir, si y sólo si todas sus frecuencias naturales tienen parte real estrictamente menor que cero. Si una o más de las frecuencias naturales del modelo tienen parte real mayor o igual que cero, diremos que el modelo es **inestable**.

Definimos, en consecuencia, la **región de estabilidad** en el plano complejo, para sistemas continuos en el tiempo, como el semiplano izquierdo (SPI) **abierto**, es decir excluyendo el eje imaginario. La necesidad de esta exclusión se demostrará más adelante. Sin embargo, el ejemplo siguiente permite apreciar el origen de las dificultades cuando una frecuencia natural está en el eje imaginario.

**Ejemplo 3.4.** *Sea un sistema cuya EDS está dada por:*

$$\frac{dy}{dt} = 2u(t) \quad (3.29)$$

*Entonces el sistema tiene sólo una frecuencia natural, y ella está ubicada en  $\lambda = 0$ , esto significa que el modo natural que aparecerá en la respuesta del sistema es  $e^{\lambda t} = 1$ . Así, la respuesta homogénea es  $y_h(t) = C_1$ . Supongamos que*

la entrada es una constante  $\forall t \geq 0$ , digamos  $u(t) = U_o$ , entonces la componente particular de la respuesta es  $y_p(t) = U_o t$ . De esa forma la respuesta completa es  $y(t) = C_1 + U_o t$  donde  $C_1$  debe calcularse para satisfacer la condición inicial.

Debemos notar que este ejemplo pone en evidencia que, aunque la entrada es una simple constante, la salida del sistema crece en forma ilimitada a medida que transcurre el tiempo. El sistema es, por tanto, inestable.

□□□

### 3.3.5. Velocidad

Un segundo aspecto de interés en relación con las frecuencias y modos naturales guarda relación con la velocidad con que evolucionan las variables de los sistemas.

Dentro de la clase de sistemas estables, podemos distinguir diferencias notables, no sólo por la distinta naturaleza de los valores propios, sino por las **velocidades** relativas con que decaen sus modos naturales. Por ejemplo, consideremos dos sistemas con las componentes homogéneas que se indican:

$$\text{Sistema 1} \quad y_{h1}(t) = C_{11}e^{-2t} + C_{12}e^{-5t} \quad (3.30)$$

$$\text{Sistema 2} \quad y_{h2}(t) = C_{21}e^{-3t} + C_{22}e^{-7t} \quad (3.31)$$

Vemos que  $y_{h1}(t)$  está dominada por el modo natural  $e^{-2t}$  porque esta señal decae más lentamente que el otro modo natural  $e^{-5t}$ . Por su parte,  $y_{h2}(t)$  está dominada por el modo natural  $e^{-3t}$ , el que decae más lentamente que el modo  $e^{-7t}$ . Así diremos que el Sistema 1 tiene una **frecuencia natural dominante** igual a  $-2$ , con un **modo natural dominante**  $e^{-2t}$ . A su vez, el Sistema 2 tiene una frecuencia natural dominante igual a  $-3$ , con un modo natural dominante  $e^{-3t}$ . Al comparar ambos sistemas podemos concluir, en primera aproximación, que el Sistema 1 es más *lento* que el Sistema 2, porque su modo dominante decae más lentamente.

En general, si  $\lambda = -|\sigma| + j\omega_o$ , el modo natural tiene la forma:

$$e^{\lambda t} = e^{-|\sigma|t} (\cos(\omega_o t) + j \text{sen}(\omega_o t)) \quad (3.32)$$

De esta ecuación se observa que este modo decae más rápidamente cuanto más grande es  $|\sigma|$ . Así, los sistemas son más rápidos cuanto más alejados del eje imaginario están sus frecuencias naturales dominantes.

### 3.3.6. Respuesta a estado inicial y respuesta a entrada

Una forma alternativa de descomponer la respuesta de un sistema es considerar por separado la componente de la respuesta debida a las condiciones iniciales o estado inicial,  $y_x(t)$ , y la componente de la respuesta debida a la entrada,  $y_u(t)$ , es decir:

$$y(t) = \mathbf{T}\langle x_o, u(t) \rangle = \underbrace{\mathbf{T}\langle x_o, 0 \rangle}_{y_x(t)} + \underbrace{\mathbf{T}\langle 0, u(t) \rangle}_{y_u(t)} \quad (3.33)$$

En consecuencia,  $y_x(t)$  satisface:

$$\rho^n y_x(t) + a_{n-1} \rho^{n-1} y_x(t) + \dots + a_0 y_x(t) = 0 \quad (3.34)$$

**sujeta a las condiciones iniciales definidas en el vector  $x_o$ .** Esto significa que  $y_x(t)$  es una combinación lineal de modos naturales, en donde las constantes dependen de las condiciones iniciales (las que deben ser satisfechas por la **solución completa** de la EDS).

A su vez, la respuesta a entrada,  $y_u(t)$ , es una solución de la EDS con condiciones iniciales iguales a cero, es decir, satisface:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y_u(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y_u(t) \\ = b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2} u(t)}{dt^{n-2}} + \dots + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

**sujeta a condiciones iniciales cero.** Para poder cumplir con esta restricción,  $y_u(t)$  debe contener, además de los modos forzados, una combinación lineal de modos naturales cuyas constantes son calculadas de modo que se cumpla aquella restricción.

La Tabla 3.1 muestra como se distribuyen los diferentes modos en cada una de las componentes de la respuesta del sistema (homogénea-particular y estado inicial-entrada).

	$y_h(t)$	$y_p(t)$	$y_x(t)$	$y_u(t)$
modos naturales	✓		✓	✓
modos forzados		✓		✓

Tabla 3.1: Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta

Es además importante el notar que:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = y_x(t) + y_u(t) \quad (3.36)$$

Sin embargo, por lo general,  $y_h(t) \neq y_x(t)$  e  $y_p(t) \neq y_u(t)$ .

Afianzamos estas ideas retomando el Ejemplo 3.2, en el que ilustramos la descomposición de la respuesta del sistema en sus componente homogénea y particular.

**Ejemplo 3.5.** *Suponga que la EDS está dada por:*

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4u(t) \quad (3.37)$$

*y que la respuesta  $y(t)$  debe satisfacer la condición inicial  $y(0) = -0,5$ .*

*Se desea calcular la respuesta del sistema para  $u(t) = 1$  para  $t \geq 0$ .*

	$y_h(t)$	$y_p(t)$	$y_x(t)$	$y_u(t)$
modos naturales	$-2, 5e^{-2t}$		$-0, 5e^{-2t}$	$-2e^{-2t}$
modos forzados		2		2

Tabla 3.2: Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta del Ejemplo 3.5.

$\mathbf{y}_x(t)$

La respuesta a estado inicial debe cumplir con:

$$\frac{dy_x(t)}{dt} + 2y_x(t) = 0 \quad (3.38)$$

y con  $y_x(0) = -0,5$  Esta ecuación es satisfecha por  $y_x(t) = Ce^{-2t}$ , con  $C = -0,5$

$\mathbf{y}_u(t)$

La respuesta a entrada,  $y_u(t)$ , es una solución para (3.37) con  $u(t) = 1$ , y sujeta a  $y_u(0) = 0$ .

De esta forma, la solución completa es:

$$y_u(t) = y_{uh}(t) + y_{up}(t) \quad (3.39)$$

donde  $y_{uh}(t)$  es una solución de la ecuación homogénea, es decir  $y_{uh}(t) = C_u e^{-2t}$ , e  $y_{up}(t)$  es la solución particular  $y_{up}(t) = 2$ .  $C_u$  se calcula de modo de obtener  $y_u(0) = 0$ , lo cual conduce a  $C_u = -2$ .

Finalmente

$$y_x(t) = -0,5e^{-2t} \quad (3.40)$$

$$y_u(t) = -2e^{-2t} + 2 \quad (3.41)$$

$$y(t) = y_x(t) + y_u(t) = -2,5e^{-2t} + 2 \quad (3.42)$$

De esta forma, podemos ahora completar la Tabla 3.1 para el caso de las soluciones obtenidas para este ejemplo. Esto se muestra en la Tabla 3.2.

□□□

Las dos descomposiciones de la respuesta del sistema obtenidas permiten observar dicha respuesta desde dos perspectivas diferentes:

- En la descomposición *componente homogénea – componente particular* se observa la estructura de la respuesta. En efecto, en esa partición queda en evidencia la presencia de dos tipos de modos: modos naturales (incluidos en la componente homogénea) y modos forzados (incluidos en la componente particular).

- En la descomposición *respuesta a estado inicial* – *respuesta a entrada* se separan los efectos de las dos causantes de que el sistema tenga una respuesta no nula: las condiciones iniciales y las excitaciones o entradas aplicadas.

Note que aunque las condiciones iniciales sean iguales a cero, aún así, los modos naturales se encuentran presentes en la respuesta (en este caso sólo aparece la componente debida a la entrada,  $y_u(t)$ ).

Para completar esta sección consideraremos un ejemplo donde estos conceptos adquieren un significado más concreto.

**Ejemplo 3.6.** En el circuito de la Figura 3.3 las componentes (escaladas, por simplicidad) tienen los siguientes valores:

$$R_1 = 2[\Omega]; \quad R_2 = 1[\Omega]; \quad L = 1[H]; \quad C = 0,5[F] \quad (3.43)$$

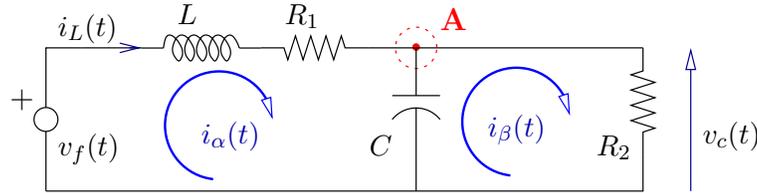


Figura 3.3: Red lineal con condiciones iniciales

En esta red, la entrada es  $v_f(t)$ , la salida ha sido elegida como  $v_c(t)$  y el estado inicial es descrito por  $x_o = [i_L(0) \ v_c(0)]^T$ . Entonces usando el operador de Heaviside (y su inverso) tenemos que las ecuaciones de mallas llevan a:

$$Z \cdot I = E \quad (3.44)$$

donde:

$$Z \triangleq \begin{bmatrix} R_1 + L\rho + \frac{1}{C}\rho^{-1} & -\frac{1}{C}\rho^{-1} \\ -\frac{1}{C}\rho^{-1} & \frac{1}{C}\rho^{-1} + R_2 \end{bmatrix}; \quad I \triangleq \begin{bmatrix} i_\alpha(t) \\ i_\beta(t) \end{bmatrix}; \quad E \triangleq \begin{bmatrix} v_f(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Esto se puede resolver usando el siguiente código:

```
MAPLE
>with(linalg);
>Z:=array(1..2,1..2,[[2+rho+2/rho,-2/rho],[-2/rho,2/rho+1]]);
>Zi:=inverse(Z);
```

De donde resulta:

$$Z^{-1} = \frac{1}{\rho^2 + 4\rho + 6} \begin{bmatrix} \rho + 2 & 2 \\ 2 & \rho^2 + 2\rho + 2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Resolviendo para  $i_\beta(t)$  se obtiene:

$$(\rho^2 + 4\rho + 6)i_\beta(t) = (\rho + 2)v_f(t) \quad (3.47)$$

Dado que  $v_c(t) = 1 \cdot i_\beta(t)$ , la EDS es:

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{d v_c(t)}{dt} + 6 v_c(t) = \frac{d v_f(t)}{dt} + 2 v_f(t) \quad (3.48)$$

Supongamos que las condiciones iniciales son  $v_c(0) = 5$  [V],  $i_L(0) = 3$  [A] y supongamos además que  $v_f(t) = 10$  [V]. Primero observamos que, al aplicar LCK en el nodo A, se cumple

$$\dot{v}_c(0) = \frac{1}{C} \left( i_L(0) - \frac{v_c(0)}{R_2} \right) = -4$$
 [V] (3.49)

La solución total se puede entonces calcular usando el siguiente código:

```
MAPLE
>v_f(t):=10:
>eds:=diff(v_c(t),t,t)+4*diff(v_c(t),t)+6*v_c(t)-diff(v_f(t),t)
-2*v_f(t)=0;
>dsolve({eds,v_c(0)=5,D(v_c)(0)=-4},v_c(t));
```

que entrega como resultado:

$$v_c(t) = \frac{10}{3} + \frac{5}{3}e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{3}\sqrt{2}e^{-2t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \quad (3.50)$$

Así, las distintas componentes de la respuesta  $v_c(t)$  tienen los siguientes valores e interpretaciones:

- (a) La componente particular,  $v_{cp}(t)$  es aquella parte de  $v_f(t)$  que contiene sólo los modos forzados por la excitación constante, es decir, es la componente continua de  $v_c(t)$ , en este caso  $v_{cp}(t) = 10/3$  [V]. Note que esta componente se puede calcular usando un divisor de tensiones, y que la ganancia a modo constante de la red es igual a  $1/3$ .
- (b) La componente homogénea,  $v_{ch}(t)$ , es la parte de la respuesta que contiene todos los modos naturales, en este caso:

$$v_{ch}(t) = \frac{5}{3}e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{3}\sqrt{2}e^{-2t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \quad (3.51)$$

- (c) La componente a estado inicial,  $v_{cx}(t)$ , corresponde al valor que tendría  $v_c(t)$  debido sólo a la corriente inicial en el inductor y a la tensión inicial en el condensador, es decir con la fuente de tensión cortocircuitada. Esta componente se puede calcular con el siguiente código:

```
MAPLE
>v_f(t):=0:
>eds:=diff(v_c(t),t,t)+4*diff(v_c(t),t)+6*v_c(t)-diff(v_f(t),t)
-2*v_f(t)=0;
>dsolve({eds,v_c(0)=5,D(v_c)(0)=-4},v_c(t));
```

que entrega como resultado:

$$v_{cx} = 5e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) + 3\sqrt{2}e^{-2t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \quad (3.52)$$

- (d) La componente a entrada,  $v_{cu}(t)$ , corresponde a la tensión en el condensador cuando se aplica la fuente de tensión a la red **inicialmente relajada**. Esta componente se puede calcular con el siguiente código:

```
MAPLE
>v_f(t):=10:
>eds:=diff(v_c(t),t,t)+4*diff(v_c(t),t)+6*v_c(t)-diff(v_f(t),t)
-2*v_f(t)=0;
>dsolve({eds,v_c(0)=0,D(v_c)(0)=0},v_c(t));
```

de donde se obtiene:

$$v_{cu}(t) = \frac{10}{3} - \frac{10}{3}e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{10}{3}\sqrt{2}e^{-2t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t) \quad (3.53)$$

□□□

Se puede agregar que la respuesta de un sistema también se suele descomponer en una **respuesta transitoria** (o transiente) y una **respuesta estacionaria** (o en estado estacionario). La respuesta estacionaria corresponde a la respuesta del sistema cuando ha transcurrido mucho tiempo desde el instante inicial. Por su parte la respuesta transitoria es aquella parte de la respuesta que se extingue con el tiempo; esta componente se puede interpretar como el descriptor de la evolución de las condiciones iniciales hacia el estado final.

En el Ejemplo 3.6 en la página 46, la respuesta estacionaria está dada por el modo forzado constante, mientras que la respuesta transitoria está formada por los modos naturales (sinusoidales amortiguadas).

La separación en componentes estacionaria y transitoria es transversal a la idea de modos naturales y modos forzados, es decir, no ocurrirá siempre que la respuesta estacionaria incluya sólo modos forzados, e incluso es posible que la respuesta estacionaria esté formada exclusivamente por modos naturales. Por ejemplo, el lector puede verificar que si un sistema tiene modos naturales sinusoidales y la entrada es una exponencial decreciente, entonces la respuesta estacionaria contendrá los modos naturales sinusoidales y la respuesta transitoria incluirá el modo forzado por la exponencial.

### 3.4. Respuesta a señales de prueba

Una forma de estudiar, y comparar en forma estandarizada el comportamiento de un sistema es determinar su respuesta para excitaciones de prueba. Entre esas señales de prueba se consideran usualmente: el escalón unitario, el impulso unitario y la señal sinusoidal. En esta sección nos concentraremos en las dos primeras, pues la respuesta ante señales sinusoidales será materia de estudio en el Capítulo 5).

#### 3.4.1. Respuesta a escalón unitario

Considere la ecuación (3.1) en la página 36. Entonces la respuesta,  $g(t)$ , a un escalón unitario y **condiciones iniciales iguales a cero**, es decir  $g(t) = T\langle 0, \mu(t) \rangle$ , se puede obtener de la siguiente forma:

**Paso 1** Determine la solución general de la ecuación:

$$\frac{d^n g_o(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} g_o(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 g_o(t) = \mu(t) = 1 \forall t \geq 0 \quad (3.54)$$

Note que  $g_o(t) = T_o\langle 0, \mu(t) \rangle$  contiene una parte natural u homogénea (combinación lineal de modos naturales de la forma (3.17)) y una componente particular o forzada. Para el caso  $a_0 \neq 0$ ,  $g_o(t)$  tiene la forma:

$$g_o(t) = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} C_{ki} t^{i-1} e^{\lambda_k t} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.55)$$

En el caso más general, si  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ ,  $a_p \neq 0$  entonces  $g_o(t)$  tiene la forma:

$$g_o(t) = \frac{1}{p! a_p} t^p + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} C_{ki} t^{i-1} e^{\lambda_k t} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.56)$$

**Paso 2** Calcule las constantes  $C_{ki}$  usando la restricción de las condiciones iniciales iguales a cero, es decir, usando el hecho que:

$$\rho^\ell g_o(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.57)$$

**Paso 3** Calcule las primeras  $n - 1$  derivadas de  $g_o(t)$ . Note que, como las condiciones iniciales son cero, esas derivadas son continuas en  $t = 0$ .

**Paso 4** Calcule  $g(t)$ , usando las propiedades de linealidad, a través de la expresión

$$g(t) = T\langle 0, \mu(t) \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} b_i T_o\langle 0, \rho^i \mu(t) \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \rho^i g_o(t) \mu(t) \quad (3.58)$$

□□□

El procedimiento anterior es ilustrado con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.7.** Consideremos un sistema con la EDS:

$$\rho^2 y(t) + 5\rho y(t) + 4y(t) = -\rho u(t) + 2u(t) \quad (3.59)$$

Entonces las frecuencias naturales son soluciones de  $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ , es decir  $\lambda_1 = -4$  y  $\lambda_2 = -1$ . Luego seguimos los pasos bosquejados previamente:

**Paso 1** Calculamos la solución general de:

$$\rho^2 g_o(t) + 5\rho g_o(t) + 4g_o(t) = 1 \quad (3.60)$$

que resulta ser  $g_o(t) = \frac{1}{4} + C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}$ . Este resultado se puede obtener con el siguiente código:

```
MAPLE
>eds:=Diff(Diff(go(t),t),t)+ 5*Diff(go(t),t)+4*go(t)-1;
>dsolve(eds);
```

**Paso 2** Para este ejemplo, ya que  $n = 1$ , se necesita calcular sólo la primera derivada de  $g_o(t)$ , la que está dada por:

$$\rho \langle g_o(t) \rangle = -4C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-t} \quad (3.61)$$

**Paso 3** Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se calculan a partir de las condiciones iniciales (iguales a cero), es decir:

$$g_o(0) = 0 = \frac{1}{4} + C_1 + C_2 \quad (3.62)$$

$$\rho \langle g_o(t) \rangle|_{t=0} = 0 = -4C_1 - C_2 \quad (3.63)$$

de donde  $C_1 = \frac{1}{12}$  y  $C_2 = -\frac{1}{3}$ . Nuevamente, este resultado se puede obtener a través del siguiente código:



MAPLE

```
>eds:=Diff(Diff(go(t),t),t)+ 5*Diff(go(t),t)+4*go(t)-1;
>dsolve({eds, go(0)=0,D(go)(0)=0},go(t));
```

**Paso 4** La respuesta a escalón unitario está entonces dada por:

$$g(t) = 2g_o(t) - \rho \langle g_o(t) \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4t} - e^{-t} \quad (3.64)$$

□□□

### 3.4.2. Respuesta a impulso unitario

Considere la ecuación (3.1) en la página (3.1). Entonces la respuesta a un impulso unitario,  $\delta(t)$ , y condiciones iniciales iguales a cero, se puede obtener a partir de la respuesta a escalón unitario. Esta estrategia se basa en que el sistema representado por la EDS (3.1) es lineal e invariante en el tiempo, pues sus coeficientes son constantes y el argumento de las funciones es  $t$ . De esta forma se tiene la situación descrita en la figura 3.4.

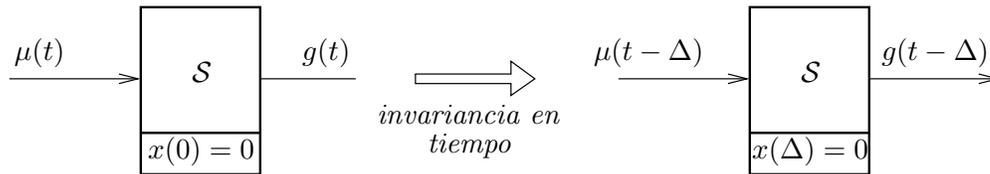


Figura 3.4: Efectos de la invariancia en el tiempo

Por lo tanto, usando linealidad:

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(t - \Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}\langle 0, \mu(t) \rangle - \mathbf{T}\langle 0, \mu(t - \Delta) \rangle}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{T}\langle 0, \frac{\mu(t) - \mu(t - \Delta)}{\Delta} \rangle = \mathbf{T}\langle 0, \delta(t) \rangle = h(t) \quad (3.65) \end{aligned}$$

Entonces,  $h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$  es la respuesta del sistema a un impulso unitario con condiciones iniciales iguales a cero.

Aunque en algunos textos se propone calcular  $h(t)$  usando una estrategia similar a la seguida para el cálculo de la respuesta a escalón unitario, en general ello no es aconsejable dada la especial naturaleza del delta Dirac. En efecto, ésta no es, en rigor, una función y no es diferenciable, por lo cual ocurren situaciones paradójicas. Por último, desde el punto de vista meramente instrumental es mucho más simple calcular la respuesta a impulso usando la transformación de Laplace, como se verá en el Capítulo 7.

**Ejemplo 3.8.** Consideremos el mismo sistema descrito por (3.59), entonces podemos calcular  $h(t)$  derivando la respuesta a escalón unitario en (3.64). Así se obtiene

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = -2e^{-4t} + e^{-t} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.66)$$

□□□

Es importante anotar que las condiciones iniciales de un sistema son valores conocidos para  $t = t_o^-$ , pero las señales pueden ser **discontinuas** en  $t = t_o$ . Esto es lo que ocurre en el Ejemplo 3.8, donde:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} h(t) = 0 \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = -1 \quad (3.67)$$

En una perspectiva más general, podemos observar que dada la relación entre la respuesta a impulso y la respuesta a escalón, y considerando que esta última contiene una combinación lineal de los modos naturales del sistema y una constante, entonces  $h(t)$  **contiene sólo modos naturales**. Conceptualmente, es ésta la característica que confiere especial importancia a las respuestas a escalón e impulso. En rigor, la respuesta a excitaciones más complejas también contiene una combinación de modos naturales (a través de la componente homogénea de la respuesta), sin embargo, la presencia de estos modos se ve oscurecida por la componente particular o forzada de la respuesta.

Veremos, en la siguiente sección una utilidad inmediata de estas consideraciones.

### 3.5. Cálculo de la respuesta vía convolución

Supongamos que se conoce la respuesta a impulso,  $h(t)$ , de un sistema lineal e invariante en el tiempo, con condiciones iniciales iguales a cero. Entonces el siguiente lema proporciona un resultado crucial en la teoría de los sistemas lineales.

**Lema 3.1.** Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo. Sea además  $h(t)$  la respuesta de ese sistema a un impulso unitario en la entrada, con condiciones iniciales iguales a cero. Entonces, la respuesta  $y(t)$  del mismo sistema a una excitación causal<sup>2</sup> arbitraria,  $f(t)$ , con condiciones iniciales iguales a cero, está dada por:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau) d\tau \quad \forall t \geq 0 \quad (3.68)$$

#### **Demostración**

Sea  $i \in \mathbb{N}$  y sea  $\Delta$  un incremento temporal, entonces, usando la propiedad de invariancia en el tiempo, tenemos que:

$$h(t - i\Delta) = \mathbf{T}\langle 0, \delta(t - i\Delta) \rangle \quad (3.69)$$

<sup>2</sup>Una señal  $f(t)$  es causal si  $f(t) = 0 \forall t < 0$

Luego, usando homogeneidad,

$$f(i\Delta)h(t - i\Delta)\Delta = \mathbf{T}\langle 0, f(i\Delta)\delta(t - i\Delta)\Delta \rangle \quad (3.70)$$

Aplicando ahora superposición ( $i = 0, 1, \dots$ ) y haciendo  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $i\Delta$  se convierte en una variable continua  $\tau$ , así se llega a:

$$\int_0^\infty f(\tau)h(t - \tau)d\tau = \mathbf{T}\langle 0, \int_0^\infty f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rangle \quad (3.71)$$

Finalmente, usando el Lema 2.1 y el hecho que  $h(t - \tau) = 0 \forall \tau > t$  (por causalidad), se obtiene:

$$y(t) = \mathbf{T}\langle 0, f(t) \rangle = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.72)$$

□□□

Observando la ecuación (3.72),  $y(t)$  se puede interpretar como una suma ponderada (por  $f(\tau)$ ) de respuestas a impulso  $h(t - \tau)$ . Note además que la ecuación (3.68) también se puede escribir como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^\infty f(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^\infty f(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad \forall t \geq 0 \quad (3.73)$$

Las integrales que aparecen en la ecuación (3.73) son una expresión de la **convolución** de dos funciones temporales. La definición genérica es:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^\infty f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^\infty f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau \quad (3.74)$$

Además de la propiedad de conmutatividad en (3.74), la convolución tiene la propiedad de distributividad, es decir:

$$f_1 * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (3.75)$$

El uso de convolución para la determinación de la respuesta de un sistema lineal tiene importancia conceptual y numérica, sin embargo, no es, en general, un procedimiento analíticamente simple. Para apreciar esto último, desarrollaremos un ejemplo.

**Ejemplo 3.9.** *Un sistema lineal tiene una respuesta a impulso unitario, con condiciones iguales a cero, dada por  $h(t) = e^{-2t}\mu(t)$ . Nos interesa determinar, usando convolución, la respuesta a un pulso  $u(t) = \mu(t) - \mu(t - 1)$ .*

De acuerdo al Lema 3.1 la respuesta del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-2\tau}\mu(\tau)(\mu(t - \tau) - \mu(t - 1 - \tau))d\tau \end{aligned} \quad (3.76)$$

La integración se puede separar en tres intervalos, que a su vez se muestran en la Figura 3.5:

$$u(t) * h(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 u(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0 & t < 0 \\ \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) & 0 \leq t < 1 \\ \int_0^1 u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}(e^{-2(t-1)} - e^{-2t}) & 1 \leq t \end{cases} \quad (3.77)$$

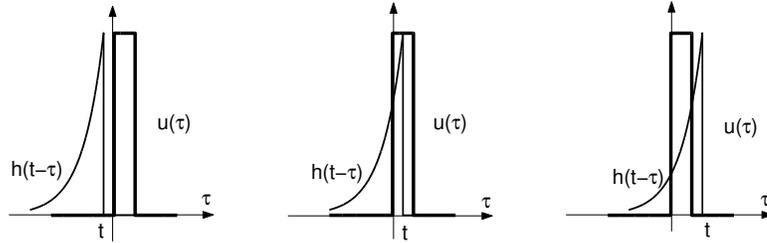


Figura 3.5: Ejemplo de descripción gráfica de la convolución

□□□

Como se puede apreciar, el cálculo mismo de la convolución es complejo. En realidad la importancia de ella se debe a que, por un lado, condensa la esencia de la linealidad de los sistemas lineales (e invariantes en el tiempo), y por otro, establece un nexo fundamental con el análisis mediante las transformadas de Fourier y de Laplace (Capítulos 6 y 7, respectivamente).

De igual forma, la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo se puede calcular a partir de la respuesta a escalón, como se demuestra en el siguiente lema.

**Lema 3.2.** *Sea una sistema lineal e invariante en el tiempo. Suponga que la respuesta de ese sistema a un escalón unitario de entrada, con condiciones iniciales iguales a cero, es  $g(t)$ . Entonces la respuesta del sistema, bajo condiciones iniciales iguales a cero, a una excitación  $u(t)$  está dada por:*

$$y(t) = g(t) * \frac{du(t)}{dt} \quad (3.78)$$

### Demostración

La demostración sigue la misma línea que el lema anterior. En primer lugar, tenemos que la señal de entrada  $u(t)$  puede ser expresada aproximadamente

como la suma de escalones de altura diferencial, es decir<sup>3</sup>:

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{u((i+1)\Delta) - u(i\Delta)}{\Delta} \mu(t - i\Delta)\Delta \quad (3.79)$$

donde  $\tilde{u}(t)$  tiende a  $u(t)$  cuando  $\Delta$  tiende a cero. Por otro lado:

$$g(t - i\Delta) = \mathbf{T}\{0, \mu(t - i\Delta)\} \quad (3.80)$$

Así, si el sistema es excitado con  $\tilde{u}(t)$  entonces, por linealidad e invariancia, se obtiene que la respuesta,  $\tilde{y}(t)$ , está dada por:

$$\tilde{y}(t) \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{u((i+1)\Delta) - u(i\Delta)}{\Delta} g(t - i\Delta)\Delta \quad (3.81)$$

Si finalmente hacemos tender  $\Delta$  a cero, el producto  $i\Delta$  se convierte en una variable continua  $\tau$  y tenemos que:

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du(\tau)}{d\tau} g(t - \tau) d\tau \quad (3.82)$$

Esta ecuación corresponde al resultado deseado. Note que el límite superior puede ser reducido a  $\tau = t$ , ya que suponemos que el sistema es causal, por lo cual  $g(t - \tau)$  es cero  $\forall \tau > t$ . Adicionalmente, si  $u(t)$  es causal, el límite inferior puede ser reemplazado por cero.

□□□

<sup>3</sup>Note que el límite superior de la suma es  $\infty$  aunque los sumandos para  $i > t/\Delta$  son cero, debido a la presencia del escalón  $\mu(t - i\Delta)$ .

### 3.6. Problemas para el lector

**Problema 3.1.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales que se indican

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 0 \quad y(0) = -1 \quad (3.83)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} + 10y(t) = 0 \quad y(0) = -1; \quad \dot{y}(0) = 2 \quad (3.84)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y(t) = 0 \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 1 \quad (3.85)$$

**Problema 3.2.** La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un escalón unitario (con condiciones iguales a cero) está dada por

$$g(t) = 1 - e^{-t} + te^{-t} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.86)$$

**3.2.1** Determine la EDS.

**3.2.2** Calcule la respuesta del mismo sistema a un impulso unitario.

**Problema 3.3.** Determine los modos asociados a las siguientes conjuntos de frecuencias naturales

Sistema 1	$\lambda_1 = -2$	$\lambda_2 = -2$	$\lambda_3 = -2$
Sistema 2	$\lambda_1 = 3$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_3 = 0$
Sistema 3	$\lambda_1 = -1$	$\lambda_2 = -1 + j2$	$\lambda_3 = -1 - j2$

**Problema 3.4.** La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un impulso unitario es  $h(t) = e^{-2t}\mu(t)$ . Usando convolución calcule la respuesta del sistema a una entrada  $u(t) = e^{-3t}\mu(t)$

**Problema 3.5.** La ecuación característica de un sistema está dada por

$$\lambda^2 + a\lambda + 4 = 0 \quad (3.87)$$

**3.5.1** Determine el rango de valores de  $a$  que hacen estable al sistema.

**3.5.2** Dentro de ese rango determine el valor de  $a$  de modo que el sistema sea lo más rápido posible.

**Problema 3.6.** Suponga que la respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario con condiciones iniciales iguales a cero es una señal  $g(t)$ , que se muestra en la Figura 3.6.

**3.6.1** ¿Es el sistema estable ?

**3.6.2** Estime los modos naturales del sistema

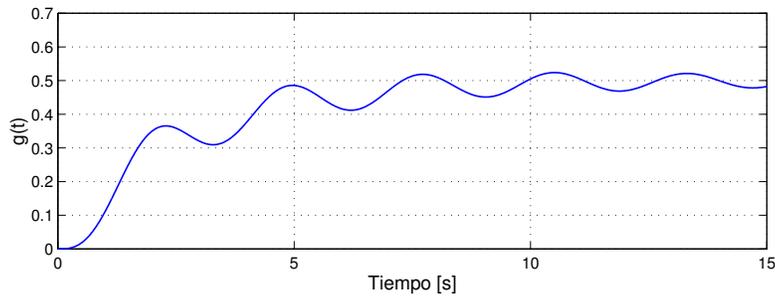


Figura 3.6: Respuesta a escalón unitario

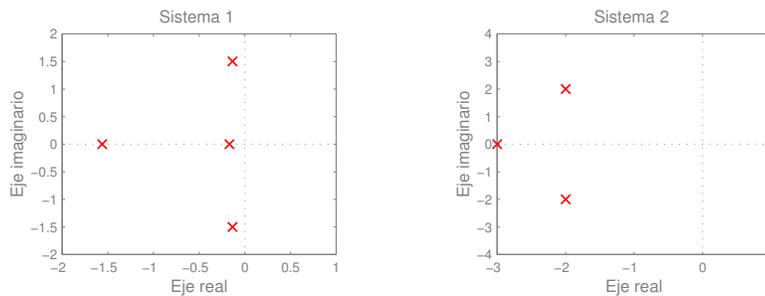


Figura 3.7: Configuración de frecuencias naturales de dos sistemas

### 3.6.3 Estime la ganancia al modo forzante constante

**Problema 3.7.** Se calculan los valores característicos de dos sistemas y se dibujan en el plano complejo, como se muestra en la Figura 3.7.

**3.7.1** Determine los modos naturales de cada sistema.

**3.7.2** ¿Cuáles son las frecuencias dominantes en cada caso?

**3.7.3** ¿Cuál de los dos sistemas es más rápido?

**Problema 3.8.** Considere la red eléctrica de la Figura 3.8, en donde se ha agregado el modelo de red para el amplificador operacional.

**3.8.1** Determine la ecuación diferencial que relaciona la entrada  $v_f(t)$  con la salida  $v_o(t)$ .

**3.8.2** Si  $A \gg 1$ , ¿es el sistema estable?

**3.8.3** Repita si  $A \ll -1$  (o, lo que es lo mismo, si se intercambian los terminales 1 y 2).

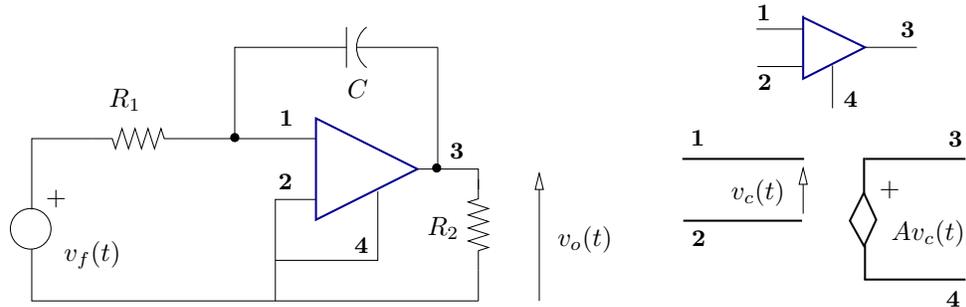


Figura 3.8: Red eléctrica con amplificador operacional

**Problema 3.9.** La ecuación diferencial de un sistema es:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7 \frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = -\frac{du(t)}{dt} + 2u(t) \quad (3.88)$$

Calcule la ganancia del sistema para los siguientes modos:  $u_1(t) = e^{-2t}$ ,  $u_2(t) = 1$  y  $u_3(t) = \cos(3t)$ .

**Problema 3.10.** En un sistema lineal e invariante en el tiempo se sabe que la ganancia al modo  $e^{j2t}$  es  $0,3 + j0,4$ , y que las frecuencias naturales están ubicadas en  $\lambda = -1$  y  $\lambda = 0$ .

Calcule, si es posible, la respuesta  $y(t)$  del sistema cuando la entrada es  $u(t) = \sqrt{2} \sin(2t + \pi/4)$  y las condiciones iniciales son  $y(0) = 0$  e  $\dot{y}(0) = 2$ .

## Capítulo 4

# Análisis en tiempo discreto

### 4.1. Introducción

Para señales definidas sólo en instantes discretos de tiempo, no es posible definir la derivada, por lo tanto, una alternativa natural, para describir sus variaciones en el tiempo, es la diferencia de los valores que toma la señal entre instantes sucesivos. Esta idea es la base de la descripción basada en el operador delta [33]. Sin embargo, la descripción más tradicional es la ecuación de recursión del sistema, ERS, la cual relaciona valores presentes y pasados de la entrada del sistema,  $u[t]$  y la salida,  $y[t]$ . Para el caso de modelos linealizados, la entrada y salida son  $\Delta u[t]$  y  $\Delta y[t]$ , respectivamente.

La ERS es una descripción cuantitativa del sistema, especialmente útil para el análisis numérico del mismo. Esto tiene relación con la naturaleza de los algoritmos computacionales, en los que una iteración o paso de cálculo, se basa en los resultados de la iteración anterior. Por otro lado, una ERS surge también cuando se discretiza el modelo de un sistema lineal de tiempo continuo. El estudio de las propiedades de la solución que realizaremos en este capítulo será complementado cuando, más adelante, estudiemos la transformada de Fourier de tiempo discreto y la transformada Zeta, en los Capítulos 6 y 8, respectivamente.

En este capítulo, en forma análoga a lo que se hizo en el capítulo precedente, se desarrollan herramientas de análisis que establecen relaciones entre propiedades cuantitativas y cualitativas de los sistemas lineales (de tiempo discreto). En particular, interesa cuantificar y construir indicadores de propiedades relevantes tales como *comportamiento natural*, *estabilidad*, *velocidad relativa* y *ganancia*.

### 4.2. Ecuación de recursión del sistema (ERS)

La forma general de la ERS es:

$$y[t] + a_{n-1}y[t-1] + \dots + a_1y[t-n+1] + a_0y[t-n] = b_mu[t] + b_{m-1}u[t-1] + \dots + b_1u[t-m+1] + b_0u[t-m] \quad (4.1)$$

En esta forma de la ERS la **causalidad** se cumple sin condiciones para cualquier par de enteros positivos  $n$  y  $m$ . Esto se aprecia por el hecho que la salida  $y[t]$  no depende de valores futuros de la entrada, aunque sí podría depender de valores **presentes** de la misma. Cuando la salida depende sólo de valores pasados de la entrada ( $b_m = 0$ ), se habla de sistemas **estrictamente causales**.

Un aspecto notable de la ERS, con respecto de la EDS, es la habilidad de la primera para incluir retardos puros en la descripción del sistema de tiempo discreto, en ese caso, la ERS es:

$$\begin{aligned} y[t] + a_{n-1}y[t-1] + \dots + a_1y[t-n+1] + a_0y[t-n] = \\ b_mu[t-t_d] + b_{m-1}u[t-1-t_d] + \dots + b_1u[t-m+1-t_d] + b_0u[t-m-t_d] \end{aligned} \quad (4.2)$$

where  $t_d$  es el retardo puro.

La solución de esta ecuación debe cumplir además con las restricciones que imponen las condiciones o estado inicial. Estas condiciones iniciales se refieren usualmente a un conjunto de  $n$  valores  $y[i]$ ,  $y[i-1]$ ,  $\dots$ ,  $y[i-n+1]$ , donde  $i = -1$  o, alternativamente<sup>1</sup>  $i = n-1$ . Note que estas alternativas no encierran aspectos conceptuales, sino que reflejan el hecho que la elección del instante inicial es arbitraria. Una generalización más amplia dice que la ecuación (4.1) puede ser resuelta si conocemos, aparte de la entrada  $u[t]$ , un conjunto de valores de la salida  $y[t]$  en cualquier conjunto de  $n$  instantes.

Así como ocurre con los sistemas de tiempo continuo, conviene usar una notación compacta, tipo operador, para denotar la operación corrimiento temporal. Por esa razón, introducimos el operador adelanto temporal,  $q$  definido por:

$$q\langle f[t] \rangle = qf[t] \triangleq f[t+1] \quad (4.3)$$

$$q^n\langle f[t] \rangle = q^n f[t] = f[t+n] \quad (4.4)$$

$$q^{-\ell}\langle f[t] \rangle = q^{-\ell} f[t] = f[t-\ell] \quad (4.5)$$

Usando este operador, el modelo (4.1) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} y[t] + a_{n-1}q^{-1}y[t] + \dots + a_1q^{-n+1}y[t] + a_0q^{-n}y[t] = \\ b_mu[t] + b_{m-1}q^{-1}u[t-1] + \dots + b_1q^{-m+1}u[t] + b_0q^{-m}u[t] \end{aligned} \quad (4.6)$$

La ERS puede aparecer como modelo de situaciones muy diferentes. Consideraremos varios casos a modo de ilustración.

**Ejemplo 4.1** (Promedio móvil). *En estadísticas económicas se suele calcular indicadores que resultan de promediar el valor de ciertas variables durante un número de períodos consecutivos*<sup>2</sup>. *Suponga que nos interesa la variable desempleo, y que definimos el índice de desempleo trimestral calculado como el*

<sup>1</sup>El comando **rsolve** de MAPLE puede usar ambas opciones.

<sup>2</sup>Esto se hace para disminuir el efecto de fenómenos ocasionales, propios de sólo parte del período bajo análisis (fenómenos estacionales)

promedio de los porcentajes de desempleos de los tres últimos meses. Entonces la ecuación del sistema es

$$y[t] = \frac{1}{3}(u[t] + u[t-1] + u[t-2]) \quad (4.7)$$

□□□

**Ejemplo 4.2** (Discretización de ecuaciones diferenciales). *Considere la ecuación diferencial*

$$\rho y(t) + \alpha y(t) = \beta u(t) \quad (4.8)$$

Entonces, si usamos la discretización de Euler<sup>3</sup> para la primera derivada y consideramos el tiempo discreto  $t = 0, \Delta, \dots, \ell\Delta$  se llega a

$$\frac{y((\ell+1)\Delta) - y(\ell\Delta)}{\Delta} + \alpha y(\ell\Delta) = \beta u(\ell\Delta) \quad (4.9)$$

Lo cual lleva a

$$y[t] + (\Delta\alpha - 1)y[t-1] = \Delta\beta u[t-1] \quad (4.10)$$

donde  $y[t] = y((\ell+1)\Delta)$ ,  $y[t-1] = y(\ell\Delta)$ ,  $u[t-1] = u(\ell\Delta)$ .

□□□

**Ejemplo 4.3** (Algoritmo computacional). *Considere el siguiente código de programa*

```
input N
u1=0 y1=0 y2=0
For t=1,N
  input u
  y=0.7*y1-0.12*y2+0.2*u1
  output y
  u1=u
  y2=y1
  y1=y
end
```

Entonces podemos hacer la siguiente asociación de variables:  $u[t] = u$ ,  $u[t-1] = u1$ ,  $y[t] = y$ ,  $y[t-1] = y1$  e  $y[t-2] = y2$ . Por lo tanto en la iteración  $t$ -ésima tenemos que

$$y[t] = 0,7y[t-1] - 0,12y[t-2] + 0,2u[t-1] \quad (4.11)$$

□□□

La ERS es un modelo dinámico que establece una restricción fundamental sobre ciertas combinaciones de la entrada, la salida y algunas versiones retrasadas de ambas señales.

<sup>3</sup>Aproximación de la derivada como una diferencia hacia adelante.

Para ser más específicos, consideremos una ecuación de recursión de primer orden:

$$y[t] - 0,5y[t - 1] = u[t - 1] \quad (4.12)$$

Observamos en (4.12) que la salida  $y[t]$  no puede variar arbitrariamente, sino que existe una restricción. Esa restricción dice que en un instante arbitrario,  $t = t_1$ , la salida menos la mitad de la salida en un instante anterior debe ser igual al valor que tenía la entrada un instante anterior,  $u[t_1 - 1]$ . Para estudiar la evolución de la salida del sistema conviene re-escribir (4.12) en la forma siguiente

$$y[t] - y[t - 1] = -0,5y[t - 1] + u[t - 1] \quad (4.13)$$

Supongamos ahora que  $u[-1] = 0$ ,  $u[t] = 2$ ,  $\forall t \geq 0$ , e  $y[-1] = -2$ , entonces necesariamente  $y[1] - y[0] = 2,5$ , es decir,  $y[1] - y[0] > 0$  por lo cual, en  $t = 0$ , la salida  $y$ , está aumentando. Por otro lado, a medida que  $y[t]$  aumenta y se acerca a 4, entonces  $y[t] - y[t - 1]$  sigue siendo positiva, pero disminuye consistentemente ya que  $-0,5y[t - 1] + u[t - 1]$  se acerca a 0. En el límite, cuando  $y[t] = 4$ , la diferencia  $y[t] - y[t - 1]$  es cero, lo cual dice que en ese instante  $y[t]$  ya no cambia, es decir, se alcanza un punto de equilibrio estable.

Introduzcamos ahora una variante en (4.12) :

$$y[t] - 1,5y[t - 1] = u[t - 1] \implies y[t] - y[t - 1] = 0,5y[t - 1] + u[t - 1] \quad (4.14)$$

Si nuevamente  $u[t] = 2$ ,  $\forall t \geq 0$ , e  $y[-1] = -2$ , entonces  $y[1] - y[0] = 1$ , lo cual implica que en  $t = 0$  la salida  $y$  está aumentando. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, a medida que  $y$  aumenta, acercándose a 2, su primera diferencia crece, es decir,  $y[t]$  **aumenta**. Cuando  $y[t] = 2$ , se tiene que  $y[t] - y[t - 1] = 4$ , y subiendo. En consecuencia,  $y$  sigue creciendo monotónicamente, pero siempre la diferencia,  $y[t] - y[t - 1]$ , debe cumplir con  $y[t] - y[t - 1] = 0,5y[t - 1] + u[t - 1]$ . Es decir, no se alcanza un punto de equilibrio y, más adelante, definimos este tipo de sistemas como inestable.

Ambos casos pueden ser representados por la forma general de una ERS de primer orden

$$y[t] + ay[t - 1] - bu[t] = 0 \quad (4.15)$$

La forma (4.15) deja en evidencia el significado de restricción que tiene la ERS.

El análisis precedente se puede aplicar a ERS más complejas, pero en esos casos se pierde la visión intuitiva, por ello nos conviene trasladarnos a un ámbito más general, que es lo que hacemos a continuación.

### 4.3. La respuesta del sistema

La solución de la ERS condensa aspectos fundamentales del comportamiento del sistema. Una aproximación intuitiva a esta conexión indica que es esperable que la excitación no sólo fuerce determinada conducta en la respuesta, sino que en ese proceso revele aspectos claves de la naturaleza del sistema. Esta percepción motiva a observar con detención la solución de la ERS y algunas formas en que ella puede ser descompuesta para su mejor comprensión.

### 4.3.1. Componente homogénea y componente particular

Una primera forma de escudriñar la respuesta del sistema es descomponerla de modo de identificar aquella parte que captura la naturaleza del sistema, componente **natural u homogénea**, y la otra, que refleja la naturaleza específica de la excitación, componente **particular o forzada**.

La componente homogénea,  $y_h[t]$ , satisface la ecuación homogénea asociada a (4.1), es decir:

$$y_h[t] + a_{n-1}q^{-1}y_h[t] + \dots + a_0q^{-n}y_h[t] = 0 \quad (4.16)$$

Antes de proseguir con el análisis consideraremos un ejemplo.

**Ejemplo 4.4.** *Suponga que la ERS está dada por:*

$$y[t] - 0,5y[t-1] = u[t-1] \quad (4.17)$$

y que la respuesta  $y[t]$  debe satisfacer la condición inicial  $y[-1] = -1$ . Se desea calcular la respuesta del sistema cuando  $u[t] = 1$  para  $t \geq 0$ .

**y<sub>h</sub>[t]**

La componente homogénea debe cumplir con:

$$y_h[t] - 0,5y_h[t-1] = 0 \quad (4.18)$$

Esta ecuación es satisfecha por  $y_h[t] = C(0,5)^t$ , para cualquier valor de la constante  $C$ . Esto se verifica reemplazando  $y_h[t]$  en (4.18)

$$C(0,5)^t - 0,5C(0,5)^{t-1} = C((0,5)^t - (0,5)^t) = 0 \quad (4.19)$$

**y<sub>p</sub>[t]**

La componente particular  $y_p[t]$  es una función, independiente de las condiciones iniciales, que debe satisfacer (3.13) con  $u[t] = 1$ . Como la entrada es una constante, una solución tentativa es suponer que la solución particular también es constante, digamos  $y_p[t] = C_o$ . Si esta suposición es correcta, entonces existe  $C_o$  constante que satisface (4.17) y puede ser calculada reemplazando  $y_p[t] = C_o$  y  $u[t] = 1$  en (4.17):

$$C_o - 0,5C_o = 1 \implies C_o = 2 \quad (4.20)$$

Entonces la solución completa es  $y[t] = y_h[t] + y_p[t] = 2 + C(0,5)^t$ . La constante  $C$  se calcula de modo que  $y[-1] = -1$ :

$$y[-1] = -1 = 2 + C(0,5)^{-1} \implies C = -\frac{3}{2} \quad (4.21)$$

Por lo tanto la solución completa está dada por:

$$y[t] = 2 - \frac{3}{2}(0,5)^t \quad (4.22)$$

□□□

### 4.3.2. Frecuencias y modos naturales

Volvamos ahora al problema general de calcular la componente homogénea de la respuesta del sistema. Para ello repetimos la ecuación homogénea (4.16):

$$y_h[t] + a_{n-1}q^{-1}y_h[t] + \dots + a_0q^{-n}y_h[t] = 0 \quad (4.23)$$

La solución para (4.23) puede ser construida en torno al siguiente lema.

**Lema 4.1.** *La función  $f[t] = C\lambda_o^t$  ( $\lambda_o \neq 0$ ) satisface (4.23) para cualquier constante  $C \in \mathbb{C}$  si y sólo si  $\lambda_o \in \mathbb{C}$  satisface la **ecuación característica** asociada a la ecuación homogénea:*

$$p_q(\lambda) \triangleq \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (4.24)$$

donde:

$$p_q(\lambda) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \lambda^\ell \quad \text{con } a_n = 1 \quad (4.25)$$

es conocido como el **polinomio característico** asociado a la ERS.

#### **Demostración**

Reemplazando  $f[t]$  en (4.23) se obtiene:

$$C\lambda_o^{t-n} (\lambda_o^n + a_{n-1}\lambda_o^{n-1} + \dots + a_1\lambda_o + a_0) = 0 \quad (4.26)$$

Por un lado (suficiencia) se ve que si  $\lambda_o$  satisface (4.24), entonces  $f[t]$  satisface la ecuación homogénea.

Por otro lado (necesidad), si  $f[t]$  satisface la ecuación homogénea, entonces (4.26) debe cumplirse  $\forall t$  y dado que  $\lambda_o \neq 0$ , entonces  $p_q(\lambda_o) = 0$ .

□□□

Supongamos que las  $n$  raíces de  $p_q(\lambda)$  son **distintas**, entonces la solución homogénea tiene la forma:

$$y_h[t] = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^t \quad (4.27)$$

Esta solución provee, a través de las constantes indeterminadas, la flexibilidad para acomodar un conjunto de  $n$  condiciones iniciales arbitrarias. La demostración de unicidad de la solución, es decir, la demostración que cualquier solución para la ecuación homogénea es un caso particular de (4.27), está más allá del propósito de este texto.

Un caso más complejo ocurre cuando algunas raíces de  $p_q(\lambda)$  son repetidas. El lema que sigue se refiere al caso de raíces dobles.

**Lema 4.2.** *Si el polinomio característico  $p_q(\lambda)$  tiene una raíz doble, digamos en  $\lambda = \lambda_1$ , entonces la función  $f_2[t] = Ct\lambda_1^t$  satisface la ecuación homogénea (4.23).*

**Demostración**

Primero notamos que si  $p_q(\lambda)$  tiene una raíz doble en  $\lambda = \lambda_1$ , entonces:

$$\left. \frac{dp_q(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1} = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \ell \lambda_1^{\ell-1} = 0; \quad \text{con } a_n = 1 \quad (4.28)$$

Luego, reemplazamos  $y_h[t]$  por  $f_2[t]$  en el lado izquierdo de (4.23), para demostrar que es igual a cero.

$$\sum_{\ell=0}^n a_\ell y_h[t-n+\ell] = \sum_{\ell=0}^n a_\ell (t-n+\ell) \lambda_1^{t-n+\ell} \quad (4.29)$$

$$= (t-n) \lambda_1^{t-n} \sum_{\ell=0}^n a_\ell \lambda_1^\ell + \lambda_1^{t-n+1} \sum_{\ell=0}^n a_\ell \ell \lambda_1^{\ell-1} \quad (4.30)$$

$$= (t-n) \lambda_1^{t-n} \underbrace{p_q(\lambda_1)}_0 + \lambda_1^{t-n+1} \underbrace{\left. \frac{dp_q(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1}}_0 \quad (4.31)$$

Con lo cual el lema queda demostrado.

□□□

El lector es invitado a demostrar el siguiente lema.

**Lema 4.3.** Si el polinomio característico  $p_q(\lambda)$  tiene una raíz de multiplicidad  $n_1$  en  $\lambda = \lambda_1$ , entonces la función  $f_i[t] = C t^i \lambda_1^t$  satisface la ecuación homogénea (4.23) para  $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$ .

□□□

De los resultados precedentes se puede ver que la ecuación homogénea tiene un número infinito de soluciones, las que pueden describirse genéricamente como miembros de una familia. Los miembros de esta familia se diferencian por los valores numéricos específicos que se pueden escoger para un conjunto de  $n$  constantes indeterminadas. De la ecuación (4.23) se observa que podemos escoger libremente un conjunto de valores arbitrarios para  $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ . Por cada conjunto elegido hay una solución distinta.

Por su parte, la componente o solución particular es una función del tiempo completamente determinada, es decir, independiente de las condiciones iniciales, y que satisface la ecuación (3.1). La solución completa  $y[t] = y_h[t] + y_p[t]$  queda totalmente determinada al usar las condiciones iniciales, **aplicadas a la respuesta completa**,  $y[t]$ , para calcular las constantes indeterminadas presentes en  $y_h[t]$ .

Si las soluciones distintas de (4.24) son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  con multiplicidades  $n_1, n_2, \dots, n_p$  respectivamente, tales que  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ , entonces la forma general de  $y_h[t]$  es:

$$y_h[t] = \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^{n_\ell} C_{\ell i} t^{i-1} \lambda_\ell^t \quad (4.32)$$

donde los  $C_{\ell i}$  son constantes arbitrarias (constantes indeterminadas) que generan los grados de libertad necesarios para que la **respuesta completa** satisfaga las condiciones iniciales.

Los valores de  $\lambda$  que satisfacen (4.24) son conocidos como autovalores, valores propios o **frecuencias naturales** del sistema. Como la ecuación característica de la ERS tiene coeficientes reales, cuando las soluciones son complejas, siempre ocurren en pares conjugados.

A su vez, las funciones temporales de la forma:

$$t^{i-1} \lambda_{\ell}^t \quad (4.33)$$

que aparecen en (4.32) se denominan **modos naturales** del sistema.

Los modos naturales se asocian unívocamente a las frecuencias naturales, y la forma temporal de los primeros depende de la ubicación de los segundos en el plano complejo. Un mapa general se aprecia combinando las Figuras 4.1 y 4.2. En ambos gráficos se ha dibujado la circunferencia de radio unitario con centro en el origen. La separación se ha hecho sólo para una mayor claridad. En esas figuras se asocia una señal (modo natural) a cada frecuencia natural de multiplicidad uno, excepto en el caso de frecuencias complejas, en que se considera el par complejo conjugado.

### 4.3.3. Modos forzantes y modos forzados

La componente particular de la respuesta,  $y_p[t]$ , es una función estrechamente ligada a la entrada,  $u[t]$ . Un caso simple, en que podemos apreciar esta relación, es cuando  $u[t]$  puede describirse como una combinación lineal de funciones de la forma  $\beta_i^t$ , es decir:

$$u[t] = \sum_{i=1}^{\ell} B_i \beta_i^t \quad (4.34)$$

donde los  $\beta_i^t$ s son distintos entre sí y ninguno de ellos coincide con alguna frecuencia natural. Cada una de las funciones  $\beta_i^t$  recibe el nombre de **modo forzante**.

Se puede verificar, usando la linealidad del sistema, que la solución particular,  $y_p[t]$ , está dada por:

$$y_p[t] = \sum_{i=1}^{\ell} y_{pi}[t]; \quad \text{con } y_{pi}[t] = K_i B_i \beta_i^t \quad (4.35)$$

y donde cada uno de los coeficientes es:

$$K_i = \frac{\sum_{\ell=0}^m b_{m-\ell} (\beta_i)^{-\ell}}{\sum_{l=0}^n a_{n-l} (\beta_i)^{-l}}; \quad \text{con } a_n = 1 \quad (4.36)$$

La respuesta  $y_p[t]$  contiene **modos forzados**. Bajo la suposición anterior, relativos a que los  $\beta_i^t$ s son distintos de las frecuencias naturales, todos los modos forzados coinciden con modos forzantes.

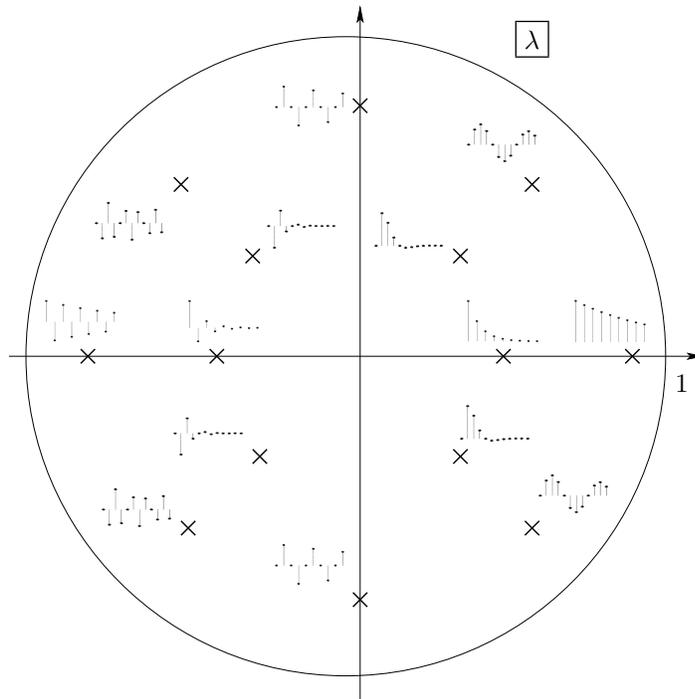


Figura 4.1: Relación entre la ubicación de las frecuencias naturales (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso decreciente).

Observe que podemos identificar a  $K_i$  con una **ganancia** asociada al modo forzante  $i$ -ésimo. Cuando el modo forzante es una constante, es decir,  $\beta^t = 1^t = 1$ , se habla de la **ganancia a continua** o ganancia a frecuencia cero.

Para facilitar la comprensión del concepto de ganancia a modos, consideremos un ejemplo.

**Ejemplo 4.5.** *Considere la ERS lineal:*

$$y[t] - 0,5y[t-1] = 2u[t-1]; \quad \text{entonces } n = m = 1; a_1 = 1; a_0 = -0,5; b_0 = 2 \quad (4.37)$$

Supongamos que la entrada es  $u[t] = 5 + 4 \cos(\pi t/4 + \pi/7)$ , entonces podemos expresarla como:

$$u[t] = \sum_{i=1}^3 B_i e^{\beta_i t} = 5\beta_1^t + (2e^{j\frac{\pi}{7}}) \beta_2^t + (2e^{-j\frac{\pi}{7}}) \beta_3^t \quad (4.38)$$

donde  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = e^{j\frac{\pi}{4}}$  y  $\beta_3 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ , es decir, hay tres modos forzantes

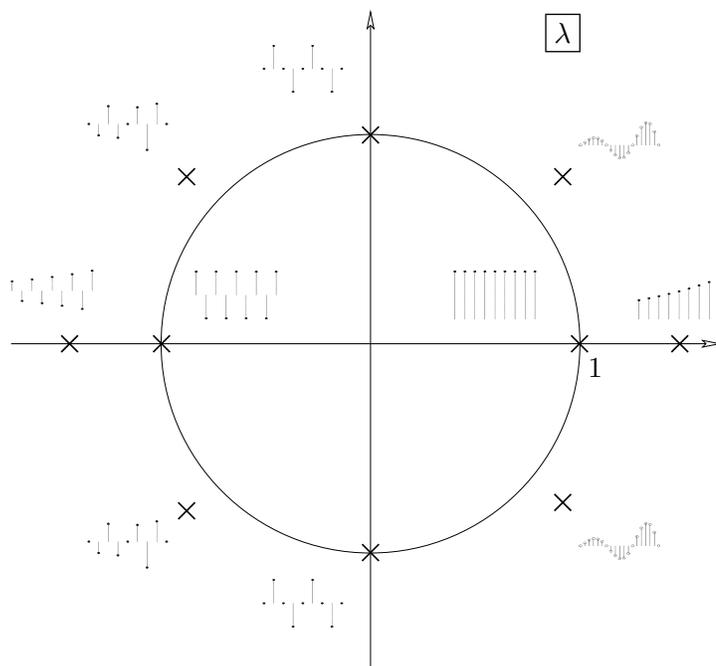


Figura 4.2: Relación entre la ubicación de las frecuencias naturales (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso no decreciente).

presentes. Las ganancias están dadas por (4.36), y para este caso particular:

$$K_1 = \frac{b_0}{\beta_1 + a_0} = \frac{2}{0,5} = 4 \quad (4.39)$$

$$K_2 = \frac{b_0\beta_2^{-1}}{1 + a_0\beta_2^{-1}} = 0,7630 - j2,605 = 2,7144e^{-j1,286} \quad (4.40)$$

$$K_3 = \frac{b_0\beta_2^{-1}}{1 + a_0\beta_2^{-1}} = 0,7630 + j2,605 = 2,7144e^{j1,286} \quad (4.41)$$

□□□

El tratamiento general de la solución particular será pospuesto para capítulos futuros; pero en el intertanto podemos establecer un hecho trascendente

Los sistemas lineales exhiben ganancias distintas para modos forzantes distintos, y esta capacidad de discriminación es la base para el análisis y diseño de sistemas de procesamiento de señales y para otras aplicaciones.

#### 4.3.4. Estabilidad

Como ya hemos mencionado, los modos naturales describen aspectos esenciales de un sistema lineal. En primer lugar, los modos naturales guardan estrecha relación con la idea de **estabilidad**. Intuitivamente podemos definir un sistema lineal (o, mejor dicho, un modelo lineal) como estable si todas las variables (señales) del sistema permanecen acotadas ante cualquier excitación acotada o estado inicial acotado. Si consideramos sólo el efecto de condiciones iniciales, resulta que la estabilidad requiere que los modos naturales sean todos acotados. Sin embargo, veremos que la estabilidad de un sistema requiere que todos los modos naturales decaigan en el tiempo.

Como cada modo natural depende de una frecuencia natural, son éstas, es decir, las raíces de la ecuación característica, las que determinan la estabilidad del sistema. Consideremos el caso de un modo de la forma genérica:

$$y_{h1}[t] = C\lambda^t; \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.42)$$

Sea  $\lambda = \eta e^{j\theta}$ , entonces:

$$y_{h1}[t] = C\lambda^t = C\eta^t e^{j\theta t} = C\eta^t (\cos(\theta t) + j \operatorname{sen}(\theta t)) \quad (4.43)$$

De la expresión anterior se observa que  $y_{h1}[t]$  decae a medida que el tiempo transcurre si y sólo si  $\lambda^t$  decae, y esto ocurre si y sólo si  $|\lambda| = \eta < 1$ . Dicho de otra forma, si y sólo si  $\lambda$  está al interior del círculo o disco unitario (excluyendo su borde). Esto se refleja los modos que aparecen en la Figura 4.1 y, por contradicción, en la Figura 4.2.

En resumen, tenemos la siguiente definición de estabilidad, conocida como estabilidad asintótica:

Diremos que un modelo lineal e invariante en el tiempo (discreto) es **estable** si y sólo si todos sus modos naturales decaen asintóticamente a cero, es decir, si y sólo si todas sus frecuencias naturales tienen magnitud estrictamente menor que uno. Si una o más de las frecuencias naturales del modelo tienen magnitud mayor o igual que uno, diremos que el modelo es **inestable**.

Definimos, en consecuencia, la **región de estabilidad** en el plano complejo, para sistemas de tiempo discreto, como el círculo unitario **abierto**, es decir excluyendo la circunferencia unitaria. La necesidad de esta exclusión se demostrará más adelante. Sin embargo, el ejemplo siguiente permite apreciar el origen de las dificultades cuando una frecuencia natural está en la circunferencia unitaria.

**Ejemplo 4.6.** *Sea un sistema cuya ERS está dada por:*

$$y[t] - y[t - 1] = 2u[t - 1] \quad (4.44)$$

*Entonces el sistema tiene sólo una frecuencia natural, y ella está ubicada en  $\lambda = 1$ , esto significa que el modo natural que aparecerá en la respuesta del*

sistema es  $\lambda^t = 1$ . Así, la respuesta homogénea es  $y_h[t] = C_1$ . Supongamos que la entrada es una constante  $\forall t \geq 0$ , digamos  $u[t] = U_o$ , entonces la componente particular de la respuesta es  $y_p[t] = 2U_o t$ . De esa forma la respuesta completa es  $y[t] = C_1 + 2U_o t$  donde  $C_1$  debe calcularse para satisfacer la condición inicial. En todo caso, lo relevante de este ejemplo es que aunque la entrada es una simple constante, la salida crece en forma no acotada a medida que el tiempo evoluciona. El sistema es, entonces, inestable.

Podemos apreciar mejor la naturaleza de este sistema, si (4.44) es escrita como:

$$y[t] = y[t - 1] + 2u[t - 1] \quad (4.45)$$

Esta ecuación modela el fenómeno de acumulación (de la excitación) y puede ser asociada con el cálculo de una integral por aproximación rectangular cuando el ancho de los rectángulos es 2. Al final, el resultado del ejemplo muestra que la acumulación de un escalón crece linealmente con  $t$ .

□□□

### 4.3.5. Velocidad

Un segundo aspecto de interés en relación con las frecuencias y modos naturales guarda relación con la velocidad con que evolucionan las variables de un sistema.

Dentro de la clase de sistemas estables, podemos distinguir diferencias notables, no sólo por la distinta naturaleza de los valores propios, sino por las **velocidades** comparativas a las que decaen las componente homogéneas de la respuesta de los distintos sistemas. Por ejemplo, consideremos dos sistemas con las componentes homogéneas que se indican:

$$\text{Sistema 1} \quad y_{h1}[t] = C_{11}0,9^t + C_{12}0,5^t \quad (4.46)$$

$$\text{Sistema 2} \quad y_{h2}[t] = C_{21}0,2^t + C_{22}0,7^t \quad (4.47)$$

Vemos que  $y_{h1}[t]$  está dominada por el modo natural  $0,9^t$ , pues esta señal decae más lentamente que el otro modo natural  $0,5^t$ . Por su parte,  $y_{h2}[t]$  está dominada por el modo natural  $0,7^t$ , el que decae más lentamente que el modo  $0,2^t$ . Así diremos que el Sistema 1 tiene una **frecuencia natural dominante** igual a  $0,9$ , con un **modo natural dominante**  $0,9^t$ . A su vez, el Sistema 2 tiene una frecuencia natural dominante igual a  $0,7$ , con un modo natural dominante  $0,7^t$ . Al comparar ambos sistemas podemos concluir, en primera aproximación, que el Sistema 1 es más lento que el Sistema 2, porque su modo dominante decae más lentamente.

En general, si  $\lambda = \eta e^{j\theta}$ , con  $0 \leq \eta < 1$ , el modo natural tiene la forma:

$$\lambda^t = \eta^t (\cos(\theta t) + j \operatorname{sen}(\theta t)) \quad (4.48)$$

De esta ecuación se observa que este modo decae más rápidamente cuanto más pequeño es  $\eta$ . Así, los sistemas estables son más rápidos cuanto más cercanos al origen del plano complejo están sus frecuencias naturales dominantes.

	$y_h[t]$	$y_p[t]$	$y_x[t]$	$y_u[t]$
modos naturales	✓		✓	✓
modos forzados		✓		✓

Tabla 4.1: Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta

#### 4.3.6. Respuesta a estado inicial y respuesta a entrada

Una forma alternativa de descomponer la respuesta de un sistema es considerar por separado la componente de la respuesta debida al estado inicial,  $y_x[t]$ , y la componente de la respuesta debida a la entrada,  $y_u[t]$ , es decir:

$$y[t] = \mathbf{T}\langle x_o, u[t] \rangle = \underbrace{\mathbf{T}\langle x_o, 0 \rangle}_{y_x[t]} + \underbrace{\mathbf{T}\langle 0, u[t] \rangle}_{y_u[t]} \quad (4.49)$$

En consecuencia,  $y_x[t]$  satisface:

$$y_x[t] + a_{n-1}q^{-1}y_x[t] + \dots + a_0q^{-n}y_x[t] = 0 \quad (4.50)$$

**sujeta a las condiciones iniciales definidas en un vector  $\mathbf{x}_o$ .** Esto significa que  $y_x[t]$  es una combinación lineal de modos naturales, en donde las constantes dependen de las condiciones iniciales (las que deben ser satisfechas por la **solución completa** de la ERS).

A su vez, la respuesta a entrada,  $y_u[t]$ , es una solución de la ERS con condiciones iniciales iguales a cero, es decir, satisface:

$$\begin{aligned} y_u[t] + a_{n-1}q^{-1}y_u[t] + \dots + a_0q^{-n}y_u[t] \\ = b_m u[t] + b_{m-1}q^{-1}u[t] + \dots + b_0q^{-m}u[t] \end{aligned} \quad (4.51)$$

**sujeta a condiciones iniciales cero.** Para poder cumplir la restricción que imponen estas condiciones,  $y_u[t]$  debe contener, además de los modos forzados, una combinación lineal de modos naturales cuyas constantes son calculadas de modo que se cumpla aquella restricción.

La Tabla 4.1 muestra una comparación de los modos presentes en las descomposiciones descritas de la respuesta de un sistema.

Es además importante el notar que:

$$y[t] = y_h[t] + y_p[t] = y_x[t] + y_u[t] \quad (4.52)$$

No obstante, en general,  $y_h[t] \neq y_x[t]$  e  $y_p[t] \neq y_u[t]$ , tal como se ve en el siguiente ejemplo, que se puede comparar con el Ejemplo 4.4 en la página 63.

**Ejemplo 4.7.** *Suponga que la ERS está dada por:*

$$y[t] - 0,5y[t-1] = u[t-1] \quad (4.53)$$

y suponga además que la respuesta  $y[t]$  debe satisfacer la condición inicial  $y[-1] = -1$ . Se desea calcular la respuesta del sistema si  $u[t] = 1$  para  $t \geq -1$ .

**y<sub>x</sub>[t]**

La respuesta a estado inicial debe cumplir con:

$$y_x[t] - 0,5y_x[t-1] = 0 \quad (4.54)$$

y con  $y_x[-1] = -1$ . Esta ecuación es satisfecha por  $y_x[t] = C(0,5)^t$ , con  $C = -0,5$ , es decir:

$$y_x[t] = -0,5(0,5)^t \quad (4.55)$$

**y<sub>u</sub>[t]**

La respuesta a entrada,  $y_u[t]$ , es una solución para (4.53) con  $u[t] = 1$ , y sujeta a  $y_u[-1] = 0$ .

De esta forma, la solución completa es

$$y_u[t] = y_{uh}[t] + y_{up}[t] \quad (4.56)$$

donde  $y_{uh}[t]$  es una solución de la ecuación homogénea, es decir  $y_{uh}[t] = C_u(0,5)^t$ , e  $y_{up}[t]$  es la solución particular<sup>4</sup>  $y_{up}[t] = 2$ .  $C_u$  se calcula para obtener  $y_u[-1] = 0$ , lo cual conduce a  $C_u = -1$ .

Finalmente:

$$y_x[t] = -0,5(0,5)^t \quad (4.57)$$

$$y_u[t] = -(0,5)^t + 2 \quad (4.58)$$

$$y[t] = y_x[t] + y_u[t] = -1,5(0,5)^t + 2 \quad (4.59)$$

Este resultado también puede ser obtenido directamente con el código:

```
MAPLE
>rsolve({y(n)=0.5*y(n-1)+1, y(-1)=-1},y(t));
```

De esta forma, podemos ahora completar la Tabla 4.1 para el caso de las soluciones obtenidas para este ejemplo. Esto se muestra en la Tabla 4.2.

□□□

Las dos descomposiciones de la respuesta del sistema que se han desarrollado permiten observar esa respuesta desde dos perspectivas diferentes

- En la descomposición *componente homogénea – componente particular* se observa la estructura de la respuesta. En efecto, en esa partición queda en evidencia la presencia de dos tipos de modos: modos naturales (incluidos en la componente homogénea) y modos forzados (incluidos en la componente particular).

<sup>4</sup>Esta solución particular se puede calcular usando la ganancia al modo  $1^t$ .

	$y_h[t]$	$y_p[t]$	$y_x[t]$	$y_u[t]$
modos naturales	$-1, 5(0, 5)^t$		$-0, 5(0, 5)^t$	$-(0, 5)^t$
modos forzados		2		2

Tabla 4.2: Presencia de modos en descomposiciones de la respuesta del Ejemplo 4.7.

- En la descomposición *respuesta a estado inicial* – *respuesta a entrada* se separan los efectos de las dos causas de que el sistema tenga una respuesta: las condiciones iniciales y las excitaciones o entradas aplicadas.

Note que aunque las condiciones iniciales sean cero, los modos naturales también se encuentran presentes en la respuesta del sistema a través de la respuesta debida a la entrada,  $y_u[t]$ .

Se puede agregar que la respuesta de un sistema también se suele descomponer en una **respuesta transitoria** (o transiente) y una **respuesta estacionaria** (o en estado estacionario). La respuesta estacionaria corresponde a la respuesta del sistema cuando ha transcurrido mucho tiempo desde el instante inicial. Por su parte la respuesta transitoria es aquella parte de la respuesta que se extingue con el tiempo.

En el ejemplo 3.6 en la página 46, la respuesta estacionaria está dada por el modo forzado constante, mientras que la respuesta transitoria está formada por los modos naturales (sinusoidales amortiguadas).

La separación en componentes estacionaria y transitoria es transversal a la idea de modos naturales y modos forzados. La respuesta estacionaria puede existir incluso si la entrada es cero. En ese caso está formada exclusivamente por modos naturales. Por ejemplo, si un sistema tiene modos naturales sinusoidales y la entrada es una exponencial decreciente, entonces la respuesta estacionaria contendrá los modos naturales sinusoidales y la respuesta transitoria incluirá el modo forzado por la exponencial.

Por otro lado, si el sistema tiene ganancia cero a un modo forzante, el correspondiente modo forzado no aparecerá en la respuesta estacionaria.

## 4.4. Respuesta a señales de prueba

Una forma de estudiar, y comparar en forma estandarizada el comportamiento de un sistema, es determinar su respuesta para excitaciones de prueba. Entre esas señales de prueba se consideran usualmente: el escalón unitario, el impulso unitario y las señales sinusoidales. En esta sección nos concentraremos en las dos primeras, pues la respuesta a excitaciones sinusoidales será materia de estudio en el Capítulo 5).

#### 4.4.1. Respuesta a escalón unitario

Considere la ecuación (4.1) en la página 59. Suponga además que los valores característicos distintos del sistema son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  con multiplicidades  $n_1, n_2, \dots, n_p$  respectivamente, tales que  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ . Entonces la respuesta,  $g[t]$ , a un escalón unitario y **condiciones iniciales iguales a cero**<sup>5</sup>, es decir  $g[t] = T\langle 0, \mu[t] \rangle$ , se puede obtener de la siguiente forma:

**Paso 1** Determine la solución general de la ecuación:

$$g_o[t] + a_{n-1}q^{-1}g_o[t] + \dots + a_0q^{-n}g_o[t] = \mu[t] = 1\forall t \geq 0 \quad (4.60)$$

Note que  $g_o[t] = T_o\langle 0, \mu[t] \rangle$  contiene una parte natural u homogénea (combinación lineal de modos naturales de la forma (4.32)) y una componente particular o forzada. Cuando el sistema no tiene frecuencias naturales en  $\lambda = 1$ ,  $g_o[t]$  tiene la forma:

$$g_o[t] = K_o + \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^{n_\ell} C_{\ell i} t^{i-1} \lambda_\ell^t \quad \forall t \geq -n \quad (4.61)$$

donde  $K_o$  es la ganancia del sistema con ERS (4.60) al modo constante  $1^t$ , es decir:

$$K_o = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i}; \quad \text{con } a_n = 1 \quad (4.62)$$

Si el sistema tiene una frecuencia natural en  $\lambda = 1$ , con multiplicidad  $p_o$ , entonces  $g_o[t]$  tiene la forma:

$$g_o[t] = K_p t^{p_o-1} + \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^{n_\ell} C_{\ell i} t^{i-1} \lambda_\ell^t \quad \forall t \geq -n \quad (4.63)$$

Hemos anotado que esta expresión para  $g_o[t]$  es válida  $\forall t \geq -n$  ya que satisface las condiciones iniciales.

**Paso 2** Calcule la señales retardadas  $q^{-\ell}g_o[t]$ , para  $\ell = 1, 2, \dots, m$ .

**Paso 3** Calcule las constantes  $C_{\ell i}$  usando la restricción de las condiciones iniciales iguales a cero, es decir, usando el hecho que:

$$q^{-\ell}g_o[t]|_{t=0} = 0 \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.64)$$

<sup>5</sup>Elegimos, por simplicidad,  $g[-1] = g[-2] = \dots = g[-n] = 0$

**Paso 4** Calcule  $g(t)$ , usando las propiedades de linealidad, a través de la expresión

$$g[t] = T\langle 0, \mu(t) \rangle = \sum_{\ell=0}^m b_{m-\ell} T_o\langle 0, \mu[t-\ell] \rangle = \sum_{\ell=0}^m b_{m-\ell} q^{-\ell} g_o[t] \quad (4.65)$$

El procedimiento anterior es ilustrado con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.8.** Consideremos la ERS:

$$y[t] - 0,9q^{-1}y[t] + 0,2q^{-2}y[t] = 2u[t] + q^{-1}u[t] \quad (4.66)$$

Entonces las frecuencias naturales son soluciones de  $\lambda^2 - 0,9\lambda + 0,2 = 0$ , es decir  $\lambda_1 = 0,5$  y  $\lambda_2 = 0,4$ .

Luego, seguimos los pasos bosquejados previamente:

**Paso 1** Calculamos la solución general de:

$$g_o[t] - 0,9q^{-1}g_o[t] + 0,2q^{-2}g_o[t] = 1 \quad (4.67)$$

que resulta ser  $g_o[t] = \frac{10}{3} + C_1(0,5)^t + C_2(0,4)^t$ . Note que el término  $\frac{10}{3}$  corresponde a la ganancia a continua, es decir, al modo forzante  $1^t$ .

**Paso 2** Para este ejemplo, ya que  $m = 1$ , se necesita calcular sólo  $g_o[t-1]$ .

$$g_o[t-1] = \frac{10}{3} + C_1(0,5)^{t-1} + C_2(0,4)^{t-1} = \frac{10}{3} + 2C_1(0,5)^t + 2,5C_2(0,4)^t \quad (4.68)$$

$$(4.69)$$

**Paso 3** Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se calculan a partir de las condiciones iniciales (iguales a cero), es decir:

$$g_o[-1] = 0 = \frac{10}{3} + 2C_1 + 2,5C_2 \quad (4.70)$$

$$g_o[-2] = 0 = \frac{10}{3} + 4C_1 + 6,25C_2 \quad (4.71)$$

de donde  $C_1 = -5$  y  $C_2 = \frac{8}{3}$ . Lo cual conduce a:

$$g_o[t] = \frac{10}{3} - 5(0,5)^t + \frac{8}{3}(0,4)^t \quad \forall t \geq -2 \quad (4.72)$$

Este resultado se puede obtener a través del siguiente código MAPLE :

MAPLE

```
>ers:=go(n)-0.9*go(n-1)+0.2*go(n-2)-1;
>rsolve({ers,go(-1)=0,go(-2)=0},go(t));
```

**Paso 4** La respuesta a escalón unitario está entonces dada por:

$$g[t] = 2g_o[t] - g_o[t-1]\mu[t-1] \quad (4.73)$$

$$= \frac{20}{3} - 10(0,5)^t + \frac{16}{3}(0,4)^t + \left[ \frac{10}{3} - 5(0,5)^{t-1} + \frac{8}{3}(0,4)^{t-1} \right] \mu[t-1] \quad \forall t \geq -2 \quad (4.74)$$

$$= \frac{20}{3} - 10(0,5)^t + \frac{16}{3}(0,4)^t + \left[ \frac{10}{3} - 10(0,5)^t + \frac{20}{3}(0,4)^t \right] \mu[t-1] \quad \forall t \geq -2 \quad (4.75)$$

Note que  $g_o[t-1]\mu[t-1] = g_o[t-1]\mu[t]$ , ya que  $g_o[t-1]\mu[t]|_{t=0} = g_o[-1] = 0$ .

Así tenemos que<sup>6</sup>

$$g[t] = 10 - 20(0,5)^t + 12(0,4)^t \quad \forall t \geq 0 \quad (4.76)$$

□□□

#### 4.4.2. Respuesta a impulso unitario

Considere la ecuación (4.1) en la página 59. Entonces la respuesta a un impulso unitario,  $\delta[t]$ , y condiciones iniciales iguales a cero, se puede obtener a partir de la respuesta a escalón unitario. Esta estrategia se basa en que el sistema representado por la ERS (4.1) es lineal e invariante en el tiempo.

Recordemos que:

$$\delta[t] = \mu[t] - \mu[t-1] \quad (4.77)$$

Entonces, la respuesta  $h[t]$ , a un impulso unitario está dada por:

$$h[t] = g[t] - g[t-1]\mu[t-1] \quad \forall t \geq -n \quad (4.78)$$

Como las condiciones iniciales son cero,  $g[t-1]\mu[t-1] = g[t-1]\mu[t]$ , ya que  $g[t-1]\mu[t]|_{t=0} = 0$ . Así la respuesta a un impulso unitario con condiciones iniciales iguales a cero está dada por:

$$h[t] = g[t] - g[t-1] \quad \forall t \geq 0 \quad (4.79)$$

<sup>6</sup>Note que esta expresión no es válida para  $t = -1$  y  $t = -2$

En algunos textos se propone calcular  $h[t]$  usando una estrategia similar a la seguida aquí para el cálculo de la respuesta a escalón unitario. Esa metodología puede ser muy compleja, y por ello es poco usada. Desde el punto de vista meramente instrumental es mucho más simple calcular la respuesta a impulso usando la transformada Zeta, como se verá en el Capítulo 8.

**Ejemplo 4.9.** *Consideremos el mismo sistema descrito por (4.66), entonces podemos calcular  $h[t]$  construyendo la primera diferencia de la respuesta a escalón unitario en (4.73). Así se obtiene:*

$$h[t] = 10 - 20(0,5)^t + 12(0,4)^t - 10 + 20(0,5)^{t-1} - 12(0,4)^{t-1} \quad (4.80)$$

$$= 20(0,5)^t - 18(0,4)^t \quad \forall t \geq 0 \quad (4.81)$$

□□□

En una perspectiva general, podemos observar que dada la relación entre la respuesta a impulso y la respuesta a escalón, y considerando que esta última contiene una combinación lineal de los modos naturales del sistema y una constante, entonces  $h[t]$  **contiene sólo modos naturales**. Conceptualmente, es ésta la característica que confiere especial importancia a las respuestas a escalón e impulso. En rigor, la respuesta a excitaciones más complejas también contiene una combinación de modos naturales (a través de la componente homogénea de la respuesta), sin embargo, la presencia de estos modos se ve oscurecida por la componente particular o forzada de la respuesta.

Veremos, en la siguiente sección, una utilidad inmediata de estos resultados.

## 4.5. Cálculo de la respuesta vía convolución

Supongamos que se conoce la respuesta a impulso,  $h[t]$ , de un sistema lineal e invariante en el tiempo, con condiciones iniciales iguales a cero, entonces, el siguiente lema nos proporciona un resultado crucial en la teoría de los sistemas lineales de tiempo discreto.

**Lema 4.4.** *Considere un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo. Sea además  $h[t]$  la respuesta de ese sistema a un impulso unitario en la entrada, con condiciones iniciales iguales a cero. Entonces, la respuesta  $y[t]$  del mismo sistema a una excitación causal<sup>7</sup> arbitraria,  $u[t]$ , con condiciones iniciales iguales a cero, está dada por:*

$$y[t] = \sum_{\ell=0}^t u[\ell]h[t-\ell] \quad \forall t \geq 0 \quad (4.82)$$

### **Demostración**

Recordemos que toda señal  $u[t]$  puede expresarse por:

$$u[t] = \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell]\delta[t-\ell] \quad (4.83)$$

<sup>7</sup>Una señal  $u[t]$  es causal si  $u[t] = 0 \forall t < 0$

Por otro lado, dada la invariancia del sistema tenemos que:

$$h[t - \ell] = \mathbf{T}\langle 0, \delta[t - \ell] \rangle \quad (4.84)$$

Luego, usando homogeneidad:

$$u[\ell]h[t - \ell] = \mathbf{T}\langle 0, u[\ell]\delta[t - \ell] \rangle \quad (4.85)$$

Aplicando ahora superposición se llega a:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell]h[t - \ell] = \mathbf{T}\langle 0, \sum_{\ell=0}^{\infty} u[\ell]\delta[t - \ell] \rangle \quad (4.86)$$

Finalmente, usando (4.83) y el hecho que  $h[t - \ell] = 0 \forall \ell > t$  (por causalidad del sistema), se obtiene:

$$y[t] = \mathbf{T}\langle 0, u[t] \rangle = \sum_{\ell=0}^t u[\ell]h[t - \ell] \quad \forall t \geq 0 \quad (4.87)$$

□□□

En la ecuación (4.87)  $y[t]$  se puede interpretar como una suma ponderada (por  $u[\ell]$ ) de respuestas a impulso  $h[t - \ell]$ .

Note que dado que  $u[t]$  y  $h[t]$  son causales, entonces, la ecuación (4.82) también se puede escribir como:

$$y[t] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u[\ell]h[t - \ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u[t - \ell]h[\ell] \quad \forall t \geq 0 \quad (4.88)$$

Las sumas que aparecen en la ecuación (4.88) son una expresión particular de la **convolución** de dos funciones temporales no necesariamente causales. La definición genérica es:

$$f_1[t] * f_2[t] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_1[\ell]f_2[t - \ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f_1[t - \ell]f_2[\ell] \quad (4.89)$$

Aparte de la propiedad de conmutatividad que aparece en (4.89), la convolución tiene la propiedad de distributividad, esto es:

$$f_1 * (f_2[t] + f_3[t]) = f_1[t] * f_2[t] + f_1[t] * f_3[t] \quad (4.90)$$

Otra propiedad fundamental de la convolución está dada por el siguiente lema.

**Lema 4.5.** *La convolución de un señal con un impulso de Kronecker en el origen,  $\delta[t]$ , es la señal misma, es decir:*

$$\boxed{u[t] * \delta[t - t_o] = u[t - t_o]} \quad (4.91)$$

**Demostración**

Tenemos que:

$$u[t] * \delta[t - t_o] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u[\ell] \delta[t - t_o - \ell] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u[t - t_o] \delta[t - t_o - \ell] = u[t - t_o] \quad (4.92)$$

Note que el último paso de la demostración se basa en que una función de tiempo discreto es un tren de impulsos de Kronecker cuya amplitud es el valor instantáneo de la señal.  $\square\square\square$

El uso de convolución para la determinación de la respuesta de un sistema lineal tiene importancia conceptual y numérica, sin embargo, no es, en general, un procedimiento analíticamente simple. Es interesante observar que el cálculo de la convolución entre dos señales discretas se puede ilustrar de manera muy simple: si consideramos dos tiras de papel, en una de las cuales se anotan los valores de la primera señal y, en la otra los de la segunda, entonces la convolución se realiza invirtiendo una de las tiras y retrocediéndola sobre la otra. Para cada retroceso, la convolución corresponde a multiplicar los valores coincidentes y sumar los productos resultantes. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.10.** *Un sistema lineal tiene una respuesta a impulso unitario, con condiciones iguales a cero, dada por  $h[t] = (0,5)^t \mu[t]$ . Nos interesa determinar, usando convolución, la respuesta a un pulso  $u[t] = \mu[t] - \mu[t - 3]$ .*

De acuerdo al Lema 4.5, la respuesta del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} y[t] = u[t] * h[t] &= \sum_{\ell=-\infty}^t u[\ell] h[t - \ell] \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^t (0,5)^{t-\ell} \mu[t - \ell] (\mu[\ell] - \mu[\ell - 3]) \quad (4.93) \end{aligned}$$

La suma o acumulación se puede segmentar en tres intervalos:

$$u[t] * h[t] = \begin{cases} \sum_{\ell=-\infty}^{-1} u[\ell] h[t - \ell] = 0 & t < 0 \\ \sum_{\ell=0}^t u[\ell] h[t - \ell] = 2 - (0,5)^t & 0 \leq t < 3 \\ \sum_{\ell=0}^2 u[\ell] h[t - \ell] = 7(0,5)^t & t \geq 3 \end{cases} \quad (4.94)$$

Una resolución compacta se puede desarrollar usando el hecho que la entrada se puede expresar como la suma de tres impulsos unitarios, es decir:

$$u[t] = \mu[t] - \mu[t - 3] = \delta[t] + \delta[t - 1] + \delta[t - 2] \quad (4.95)$$

De esta forma podemos calcular la respuesta usando la propiedad de distributividad de la convolución, seguida por la aplicación del Lema 4.5:

$$\begin{aligned} y[t] &= h[t] * u[t] = h[t] * (\delta[t] + \delta[t - 1] + \delta[t - 2]) \\ &= (0,5)^t \mu[t] + (0,5)^{t-1} \mu[t - 1] + (0,5)^{t-2} \mu[t - 2] \end{aligned} \quad (4.96)$$

□□□

Como se puede apreciar, el cálculo mismo de la convolución es complejo. En realidad la importancia de ella se debe a que, por un lado, condensa la esencia de la linealidad de los sistemas lineales (e invariantes en el tiempo), y por otro, es un nexo de conexión con el análisis en el dominio de las transformadas de Fourier de tiempo discreto y la transformada Zeta (Capítulos 6 y 8, respectivamente).

La convolución en tiempo discreto es ampliamente usada para construir la respuesta de sistemas lineales, invariantes en el tiempo y causales, cuando se conoce la respuesta a un impulso unitario. Esto se debe a la simplicidad de las expresiones del Lema 4.4.

La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo se puede calcular a partir de la respuesta a escalón, como se muestra en el siguiente lema.

**Lema 4.6.** *Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo. Suponga que la respuesta de ese sistema a un escalón unitario de entrada, con condiciones iniciales iguales a cero, es  $g[t]$ . Entonces la respuesta del sistema a una excitación causal  $u[t]$ , bajo condiciones iniciales iguales a cero, está dada por:*

$$y[t] = u[t] * (g[t] - g[t - 1]) = g[t] * (u[t] - u[t - 1]) \quad (4.97)$$

#### **Demostración**

Dado que  $\delta[t] = \mu[t] - \mu[t - 1]$ , entonces, por linealidad e invariancia, la respuesta  $h[t]$ , a un impulso unitario puede expresarse como:

$$h[t] = g[t] - g[t - 1] \quad (4.98)$$

Esto lleva inmediatamente al primer resultado, dado que:

$$y[t] = u[t] * h[t] = u[t] * (g[t] - g[t - 1]) \quad (4.99)$$

Para demostrar la segunda parte del resultado, notamos que la señal de entrada,  $u[t]$  puede expresarse como la suma de escalones incrementales, es decir:

$$u[t] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (u[\ell] - u[\ell - 1]) \mu[t - \ell] \quad (4.100)$$

Luego, usando la linealidad y la invariancia vemos que:

$$y[t] = \mathbf{T}\langle 0, u[t] \rangle = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (u[\ell] - u[\ell - 1]) g[t - \ell] \quad (4.101)$$

*Y, finalmente, reconocemos en la sumatoria la forma de la convolución, es decir:*

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (u[\ell] - u[\ell - 1])g[t - \ell] = g[t] * (u[t] - u[t - 1]) \quad (4.102)$$

□□□

## 4.6. Problemas para el lector

**Problema 4.1.** Resuelva las siguientes ecuaciones de recursión con las condiciones iniciales que se indican:

$$y[t] - 0,2y[t - 2] = 0 \quad y[-1] = 1; \quad y[-2] = -1 \quad (4.103)$$

$$y[t] - 0,6y[t - 1] + 0,09y[t - 2] = 0 \quad y[-1] = 2; \quad y[1] = 1 \quad (4.104)$$

$$y[t + 1] - 1,3y[t] + 0,4y[t - 1] = 0 \quad y[0] = 0; \quad y[5] = 0 \quad (4.105)$$

$$y[t] - 4y[t - 1] + 9y[t - 2] = 0 \quad y[-1] = 0; \quad y[-2] = 1 \quad (4.106)$$

$$y[t] - y[t - 10] = 0 \quad y[-1] = 1; \quad y[-i] = 0 \quad \forall i > 1 \quad (4.107)$$

Verifique con MAPLE .

**Problema 4.2.** Calcule la respuesta a escalón unitario, con condiciones iguales a cero para cada una de las ERS:

$$y[t] - 0,2y[t - 2] = u[t] \quad (4.108)$$

$$y[t] - 0,6y[t - 1] + 0,09y[t - 2] = u[t - 1] - u[t - 2] \quad (4.109)$$

$$y[t] - 1,3y[t - 1] + 0,4y[t - 2] = 0,2u[t - 10] \quad (4.110)$$

$$y[t] - 2y[t - 1] + y[t - 2] = u[t] \quad (4.111)$$

Verifique con MAPLE .

**Problema 4.3.** Considere la señal:

$$f[t] = 2(0,6)^t - 2(0,2)^t \quad (4.112)$$

**4.3.1** Proponga una ERS de modo que  $f[t]$  corresponda ( $\forall t \geq 0$ ) a la respuesta del sistema a impulso con condiciones iniciales iguales a cero.

**4.3.2** Proponga una **ecuación de recursión homogénea**, de modo que  $f[t]$  corresponda a la respuesta a estado inicial. Especifique ese estado inicial.

**Problema 4.4.** La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un escalón unitario y condiciones iniciales iguales a cero está dada por:

$$g[t] = (1 - (0,5)^t + t(0,5)^t)\mu[t] \quad (4.113)$$

**4.4.1** Determine la ERS.

**4.4.2** Calcule la respuesta del mismo sistema a un impulso unitario.

**Problema 4.5.** Determine los modos asociados a las siguientes conjuntos de frecuencias naturales:

$$\begin{array}{lll} \text{Sistema 1} & \lambda_1 = -0,2 & \lambda_2 = -0,2 & \lambda_3 = -0,2 \\ \text{Sistema 2} & \lambda_1 = -0,3 & \lambda_2 = 0,3 & \lambda_3 = -2 \\ \text{Sistema 3} & \lambda_1 = -1 & \lambda_2 = -0,1 + j0,2 & \lambda_3 = -0,1 - j0,2 \end{array}$$

**Problema 4.6.** La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un delta de Kronecker es  $h[t] = (0,7)^t \mu[t]$ . Usando convolución calcule la respuesta del sistema a una entrada  $u[t] = (0,3)^t \mu[t]$ .

**Problema 4.7.** La ecuación característica de un sistema está dada por:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (4.114)$$

**4.7.1** Suponga que  $b = 0,8$ ; determine el rango de valores de  $a$  que hacen estable al sistema.

**4.7.2** Dentro de ese rango determine el valor de  $a$  de modo que el sistema sea lo más rápido posible.

**4.7.3** Suponga ahora que  $b = 1,2$ , repita 4.7.1.

**Problema 4.8.** Suponga que un sistema lineal, con condiciones iniciales iguales a cero, es excitado con un escalón. La respuesta  $g[t] = T\langle 0, \mu[t] \rangle$  es la que se muestra en la Figura 4.3.

**4.8.1** ¿Es el sistema estable ?

**4.8.2** Estime los modos naturales del sistema

**4.8.3** Estime la ganancia al modo forzante constante, es decir, a frecuencia cero.

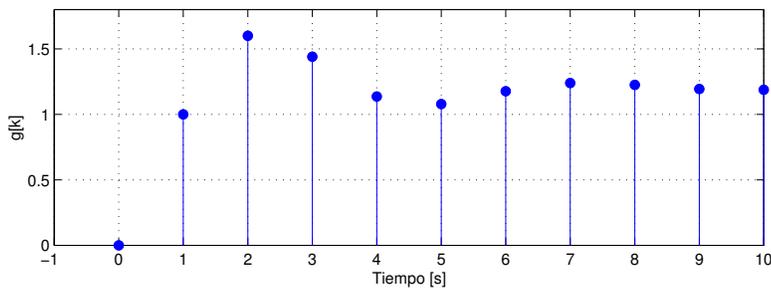


Figura 4.3: Respuesta a escalón unitario.

---

**Problema 4.9.** *Se adquiere una deuda hipotecaria de 1000 euros a un interés mensual de 0,4%. Si el plazo de la deuda es de 120 meses ¿Cuál debiera ser el pago mensual constante?*

---

**Problema 4.10 (Problema-desafío).** *En la red de la Figura 4.4 todas las resistencias son iguales a  $R$ . Considere como variable independiente, no al tiempo discreto sino que al número de orden de la malla. Construya una ecuación de recursión en las corrientes de mallas y especifique las condiciones (inicial y final).*

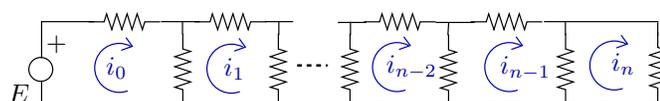


Figura 4.4: Red resistiva.

---

## Capítulo 5

# Análisis bajo excitaciones periódicas

### 5.1. Señales Periódicas

En este capítulo se analiza el caso de sistemas lineales sujetos a excitaciones periódicas en el tiempo. Las señales periódicas aparecen en muchas áreas de la Ingeniería y en fenómenos naturales. Sin embargo, estas señales, en general, no se presentan como oscilaciones *puras* de una frecuencia específica, las que se pueden describir exactamente por una senoide del tipo  $\sin(\omega t)$ . Es más frecuente que esas señales periódicas aparezcan con formas más complejas, como por ejemplo, señales triangulares, señales tipo *dientes de sierra*, *trenes de pulsos* o sinusoidales rectificadas, entre otras, cuya única característica común es su periodicidad en el tiempo.

Además, en algunas oportunidades, las señales periódicas no sinusoidales resultan de efectos no lineales indeseables. Por ejemplo, considere el caso de un sistema amplificador con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , cuya relación entrada-salida es:

$$y(t) = Au(t) + \epsilon(u(t))^2 \quad (5.1)$$

donde  $\epsilon$  es mucho menor que la amplificación  $A$ . Entonces, si la entrada es una señal sinusoidal pura,  $u(t) = U \cos(\omega_o t)$ , la salida  $y(t)$  está dada por

$$y(t) = AU \cos(\omega_o t) + \epsilon U^2(0,5 + 0,5 \cos(2\omega_o t)) \quad (5.2)$$

De esta forma, podemos apreciar que la salida del sistema contiene tres sinusoides de distinta frecuencia ( $0$ ,  $\omega_o$  y  $2\omega_o$  [ $rad/s$ ]), que deben ser consideradas cuando esta señal actúa como entrada de otro sistema.

Otros casos en los que aparecen señales periódicas complejas incluyen la saturación de señales sinusoidales (cuando la amplitud de una senoide excede cierto nivel prescrito), la rectificación de señales sinusoidales, la presencia de zonas muertas, histéresis, etc.

La idea fundamental en este capítulo es representar una función periódica como combinación lineal de sinusoides de ciertas frecuencias. Esta representación, conocida como la de *serie de Fourier*, tiene dos grandes aplicaciones: primero, facilita el análisis de los sistemas lineales sujetos a excitaciones periódicas. En esta aplicación, el concepto clave subyacente a utilizar es el de **ganancia a modo forzante**, desarrollado en el Capítulo 3, para sistemas de tiempo continuo, y en el Capítulo 4, para sistemas de tiempo discreto. Una segunda aplicación se refiere al análisis espectral de señales que portan información. Este análisis espectral puede tener distintos propósitos, como por ejemplo, separar información de ruido, procesar sonido, determinar la presencia y relevancia de fenómenos no lineales, etc.

## 5.2. Respuesta a entrada sinusoidal. El caso de tiempo continuo

Hasta el momento hemos visto la respuesta de sistemas lineales a diferentes tipos de entradas (modos forzantes), incluyendo el caso de exponenciales de exponente imaginario (las que combinadas dan origen a sinusoides reales). En esta sección nos detendremos en la característica de ganancia que exhibe un sistema lineal cuando la excitación es una senoide. Con ese propósito consideremos un sistema lineal **estable** modelado por su EDS:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 u(t) \quad (5.3)$$

donde la entrada del sistema es una señal sinusoidal que puede escribirse de la forma general:

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4)$$

en que (vea Capítulo 2):

$A$  es la *amplitud*, cuyas unidades dependen del sistema en cuestión,

$\phi$  es el *ángulo de desfase* (o simplemente *fase*), medido en [rad], y

$\omega$  es la *frecuencia angular*, medida en [rad/seg]. Ésta, a su vez, determina la frecuencia  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  [Hz] y el período  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  [seg] de la senoide.

Aplicando la fórmula de Euler se tiene que:

$$A \cos(\omega t + \phi) = A \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} = \tilde{A} e^{j\omega t} + \tilde{A}^* e^{-j\omega t} \quad (5.5)$$

donde  $\tilde{A} \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{A}^*$  es el complejo conjugado de  $\tilde{A}$  y

$$\alpha = \frac{A}{2} e^{j\phi} \quad (5.6)$$



Por otra parte sabemos que si  $K(\omega) \in \mathbb{C}$  es la ganancia al modo forzante  $e^{j\omega t}$ , entonces, por linealidad:

$$\mathbf{T}\langle x_o, A \cos(\omega t + \phi) \rangle = K(\omega)\alpha e^{j\omega t} + (K(\omega))^* \alpha^* e^{-j\omega t} + \{\text{modos naturales}\} \quad (5.7)$$

donde  $K(\omega)$  es la ganancia a modo forzante, definida en (3.21) con  $\beta_i = j\omega$ . Si expresamos  $K(\omega)$  en su forma polar se llega a:

$$K(\omega) = |K(\omega)|e^{j\phi_a(\omega)} \quad (5.8)$$

Así, se obtiene:

$$\mathbf{T}\langle x_o, A \cos(\omega t + \phi) \rangle = |K(\omega)|A \cos(\omega t + \phi + \phi_a(\omega)) + \{\text{modos naturales}\} \quad (5.9)$$

Como se ha supuesto que el sistema es estable, los modos naturales decaen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , así, la respuesta estacionaria contiene sólo la componente particular, es decir, contiene sólo los modos forzados y tiene la forma:

$$y(t) = A_s(\omega) \cos(\omega t + \phi_s(\omega)) \quad (5.10)$$

Los parámetros  $A_s(\omega)$  y  $\phi_s(\omega)$  pueden ser calculados directamente reemplazando (5.10) en la EDS.

Cuando el modo forzante es una exponencial de la forma  $e^{j\omega t}$ , o una sinusoidal  $\cos(\omega t)$ , la ganancia a modo forzante,  $K(\omega)$ , caracteriza lo que se denomina **respuesta en frecuencia** del sistema.

El desarrollo precedente es ilustrado a través de un ejemplo.

**Ejemplo 5.1.** Consideremos el sistema definido por su ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 13y(t) = 26u(t)$$

Supongamos que la entrada es  $u(t) = \text{sen}(\omega t)$  y que todas las condiciones iniciales son cero.

Observamos, primero, que la frecuencias naturales, es decir, las soluciones de  $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$  se encuentran ubicadas en  $\lambda_1 = -2 + j3$  y  $\lambda_2 = -2 - j3$ . Con esto sabemos entonces que la solución homogénea tiene la forma:

$$y_h(t) = e^{-2t} [B_1 \cos(3t) + B_2 \text{sen}(3t)] \quad (5.11)$$

Una segunda observación es que los modos naturales decaen a cero para  $t \rightarrow \infty$ , ya que el sistema es estable, dado que ambas frecuencias naturales tienen parte real negativa.

Para obtener la solución particular reemplazamos la solución propuesta:

$$y_p(t) = A_s(\omega) \text{sen}(\omega t + \phi_s(\omega)) \quad (5.12)$$

que es equivalente a una expresión de la forma

$$y_p(t) = C_1(\omega) \cos(\omega t) + C_2(\omega) \sen(\omega t) \quad (5.13)$$

Los coeficientes  $C_1(\omega)$  y  $C_2(\omega)$  se obtienen reemplazando la solución particular propuesta y la función de entrada en la ecuación diferencial original y derivando:

$$\begin{aligned} -C_1(\omega)\omega^2 \cos(\omega t) - C_2(\omega)\omega^2 \sen(\omega t) + 4C_2(\omega)\omega \cos(\omega t) - 4C_1(\omega)\omega \sen(\omega t) \\ + 13C_1(\omega) \cos(\omega t) + 13C_2(\omega) \sen(\omega t) = 26 \sen(\omega t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

De aquí, igualando los coeficientes de  $\cos(\omega t)$  y de  $\sen(\omega t)$  a ambos lados, pueden obtenerse los coeficientes  $C_1$  y  $C_2$ :

$$C_1(\omega) = \frac{-104\omega}{(13 - \omega^2)^2 + (4\omega)^2} \quad (5.15)$$

$$C_2(\omega) = \frac{26(13 - \omega^2)}{(13 - \omega^2)^2 + (4\omega)^2} \quad (5.16)$$

Si se supone  $\omega = 10$  [rad/s] y se combinan la solución homogénea y la particular, pueden obtenerse los coeficientes por determinar de la solución homogénea  $B_1$  y  $B_2$ . La solución final es:

$$\begin{aligned} y(t) = y_h(t) + y_p(t) = e^{-2t} [0,113 \cos(3t) + 0,899 \sen(3t)] \\ - 0,113 \cos(10t) - 0,247 \sen(10t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ésta se muestra en la Figura 5.1, donde se aprecia claramente la presencia de una parte de la respuesta que es transiente, más lenta y que desaparece, manteniéndose sólo una oscilación sostenida de 10 [rad/seg], pero de diferente amplitud y fase que las de la señal de entrada. Estos valores de  $A_s$  y  $\phi_s$ , que dependen de la frecuencia  $\omega$ , son en este caso:

$$A_s(10) = \sqrt{C_1(10)^2 + C_2(10)^2} = 0,272 \quad (5.18)$$

$$\phi_s(10) = \angle(C_2(10) + jC_1(10)) = -2,7106 \text{ [rad]} \approx -155,31^\circ \quad (5.19)$$

Una manera más directa para obtener una descripción genérica de los resultados anteriores sería calcular la respuesta en frecuencia  $K(\omega)$ , la que, en este caso particular, está dada por:

$$K(\omega) = |K(\omega)|e^{j\phi_a(\omega)} = \frac{26}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 13} \quad (5.20)$$

La magnitud y fase de esta respuesta en frecuencia aparecen en la Figura 5.2. En esta figura los valores de magnitud y fase de  $K(10)$  se pueden calcular usando el comando de MATLAB `ginput`, el resultado es  $|K(10)| = 0,2734$  y  $\phi_a(10) = -2,7188$  [rad] (note que, en este ejemplo,  $A = 1$ ).

□□□

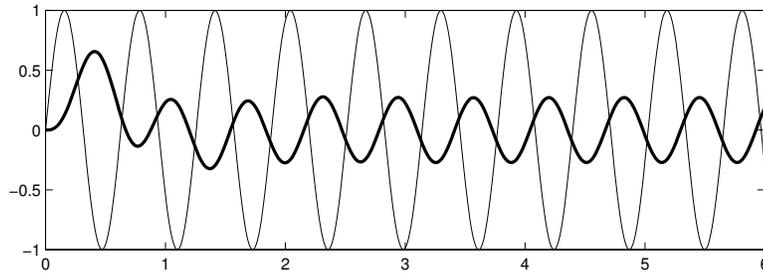


Figura 5.1: Señales de entrada (línea delgada) y salida (línea gruesa) en el Ejemplo 5.1

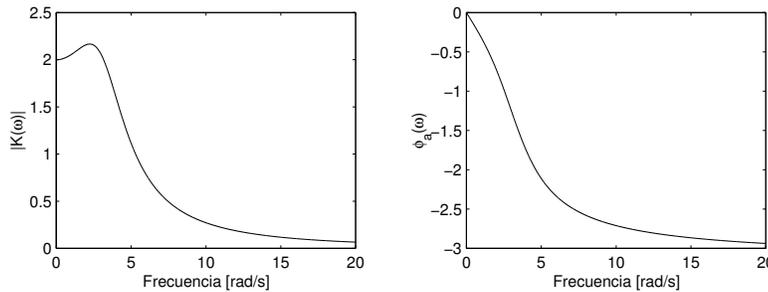


Figura 5.2: Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden de tiempo continuo

Es necesario tener presente que en ciertos sistemas, a pesar de tener todas sus frecuencias naturales en el interior de la zona de estabilidad, la respuesta a sinusoides de baja amplitud, incluye componentes sinusoidales de altísima amplitud. Esto sucede en situaciones en que el sistema es excitado con una senoide de frecuencia muy cercana a una frecuencia natural próxima al límite de estabilidad (el eje imaginario). En este caso, dependiendo del amortiguamiento del sistema, la salida puede alcanzar el estado estacionario sólo después de mucho tiempo, y aunque analíticamente la oscilación en la salida permanece acotada, puede alcanzar magnitudes insostenibles para el sistema real. Para esto recomendamos al lector analizar en detalle el Problema 5.4, propuesto al final de este capítulo.

**Ejemplo 5.2.** *El fenómeno de respuestas inusualmente altas se origina en sistemas que exhiben altas ganancias a un modo forzante de la forma  $e^{j\omega t}$ . Considere, por ejemplo, el sistema con EDS:*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 0,01 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 4y(t) \quad (5.21)$$

En este ejemplo, que corresponde a un sistema **estable**, la ganancia a continua es igual a 1, sin embargo la ganancia a modo forzante  $e^{j2t}$  está dada por:

$$K(\omega) = \frac{4}{(j2)^2 + 0,01(j2) + 4} = -j200 \quad (5.22)$$

Esto significa que una excitación sinusoidal de amplitud unitaria y frecuencia 2 [rad/s] genera una respuesta forzada de **amplitud igual a 200**. En casos como éste, se dice que, para esta excitación, el sistema entra en resonancia.

La idea de resonancia en un sistema se refiere a la facilidad con que ese sistema responde a determinadas frecuencias. Por ejemplo, todos conocemos la facilidad con que se amplifica la oscilación de un columpio cuando se lo empuja con la frecuencia adecuada.

En términos de la respuesta en frecuencia, el fenómeno descrito se refleja en que la función  $|K(\omega)|$  tiene uno o más picos muy pronunciados.

□□□

Finalmente, cuando las frecuencias naturales del sistema se encuentran fuera de la zona de estabilidad, la componente natural de la respuesta es no acotada. Sin embargo, la componente forzada sigue siendo una oscilación de la misma frecuencia que la sinusoide en la entrada. Para apreciar esto se recomienda al lector analizar el Problema 5.5.

### 5.3. Series de Fourier para señales de tiempo continuo

La idea central tras las series de Fourier, sean ellas de tiempo continuo o de tiempo discreto, es la representación de una función periódica usando una **base ortogonal de funciones**.

La idea de ortogonalidad aparece con su significado más básico, cuando se la aplica al sistema cartesiano de coordenadas en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Sin embargo, la diferencia fundamental con el caso de las series de Fourier es que la dimensión de la base, en este último caso, es infinita, hecho usual en espacios de funciones [26].

Antes de analizar en detalle la representación de funciones periódicas en forma de una *serie de Fourier*, sugerimos al lector revisar el Apéndice B para familiarizarse con la notación y el vocabulario empleado de aquí en adelante.

### 5.3.1. Serie de Fourier trigonométrica

Consideremos el espacio vectorial de todas las funciones seccionalmente continuas en un intervalo<sup>1</sup>  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , y en él, el conjunto de vectores (funciones):

$$\mathcal{B} = \{ 1, \cos(n\omega_0 t), \text{sen}(n\omega_0 t) \}_{n=1,2,\dots} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (5.23)$$

El conjunto definido en (5.23) resulta ser análogo al conjunto de funciones considerados en el Lema B.1 en la página 372, dado que son **linealmente independientes**, pues ninguna de las sinusoides (o la constante) del conjunto puede describirse como una combinación lineal de las demás. Además definimos el producto interno en este espacio de funciones como la integral:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) * g(t) dt \quad f(t), g(t) \in \mathcal{B} \quad (5.24)$$

Entonces el conjunto (5.23) resulta ser **ortogonal**, es decir, si tomamos dos elementos  $y_m(t)$  e  $y_n(t)$  pertenecientes al conjunto  $\mathcal{B}$  definido en (5.23):

$$\langle y_n(t), y_m(t) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_n(t) y_m(t) dt = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \kappa > 0 & ; n = m \end{cases} \quad (5.25)$$

En este caso la conjugación involucrada en el producto interno (5.24) no afecta a las funciones del conjunto  $\mathcal{B}$ , pues éstas son todas reales.

Con esto podemos afirmar que *una función  $y(t)$  real  $\forall t \in \mathbb{R}$ , seccionalmente continua y definida en el intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , puede representarse como una combinación lineal de elementos de la base  $\mathcal{B}$ , dada en (5.23), que en este caso tiene dimensión infinita. Es decir, para  $y(t)$  tenemos una representación en **serie de Fourier** de la forma:*

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (5.26)$$

, donde cada uno de los coeficientes  $A_0, A_n, B_n$  se puede obtener como indica el Lema B.1. Por esto invitamos al lector en este punto a resolver el Problema 5.6, con lo que además podrá comprobar que las expresiones para los coeficientes de Fourier son:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \langle y(t), 1 \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) dt \\ A_n &= \frac{2}{T} \langle y(t), \cos(n\omega_0 t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \langle y(t), \text{sen}(n\omega_0 t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (5.27)$$

<sup>1</sup>En términos generales el intervalo a considerar es  $[t_o, t_o + T]$ . Por simplicidad hemos escogido  $t_o = -T/2$

Nos interesa la representación en serie de Fourier conceptualmente y como una herramienta para describir las funciones periódicas como una combinación lineal de constantes, cosenos y senos, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la **frecuencia fundamental**  $\omega_0$  determinada por su período  $T$ . La representación (5.26) puede reescribirse alternativamente en la forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n) \quad (5.28)$$

en que:

$$\tilde{C}_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (5.29)$$

$$\phi_n = \angle(A_n + jB_n) \quad (5.30)$$

En esta forma es más directo apreciar el **contenido** o **espectro en frecuencia** de la señal  $y(t)$  a través de la amplitud de cada una de las sinusoides de frecuencia  $\omega_n = n\omega_0$ , que llamaremos  **$n$ -ésima armónica**. Además, esta representación permite apreciar el ángulo de desfase  $\phi_n$  de las diferentes armónicas.

Si dibujamos en un gráfico las magnitudes de  $\tilde{C}_n$  en función de  $n$ , obtenemos lo que se conoce como un **espectro de línea**. Este gráfico permite observar las participaciones relativas de las armónicas en la composición de la señal.

Note que el cálculo directo de los coeficientes  $\tilde{C}_n$  es más complicado que el de los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$ , ya que las sinusoides de la forma  $\cos(n\omega_0 t - \phi_n)$  no son ortogonales entre sí.

Para ilustrar el cálculo de los coeficientes de Fourier se presentan a continuación algunos ejemplos. En primer lugar, desarrollamos un ejemplo calculando analíticamente los coeficientes de la serie, para luego ilustrar el uso del soporte computacional.

**Ejemplo 5.3.** Considere una onda cuadrada de amplitud 2 y período igual a 4 [s], tal como se ilustra en la Figura 5.3.

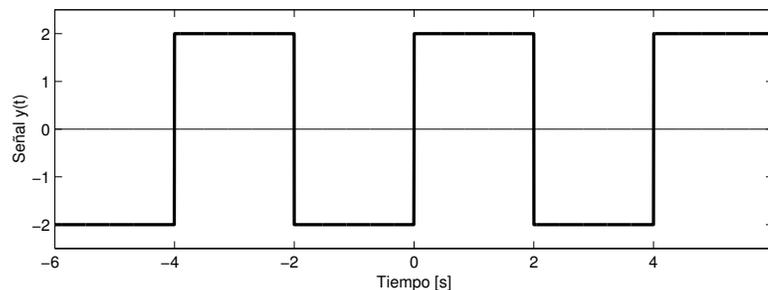


Figura 5.3: Señal cuadrada

La frecuencia fundamental es  $\omega_o = 2\pi/T = \pi/2$  y los coeficientes de la serie se pueden calcular como se indica:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) dt = 0 \quad (5.31)$$

Este resultado era previsible dada la simetría de áreas sobre y bajo el eje de abscisas:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos(n\omega_o t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \cos(0,5n\pi t) dt + \frac{1}{2} \int_0^2 2 \cos(0,5n\pi t) dt = 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

La ausencia de componentes cosenoidales es también previsible, dado que la señal  $y(t)$  es una función impar del tiempo. La función quedara representada entonces como una serie senoidal de Fourier, en que:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sen(n\omega_o t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \sen(0,5n\pi t) dt + \frac{1}{2} \int_0^2 2 \sen(0,5n\pi t) dt \\ &= 2 \int_0^2 \sen(0,5n\pi t) dt = -\frac{4}{n\pi} \cos(0,5n\pi t) \Big|_0^t = \frac{4}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \end{aligned} \quad (5.33)$$

De esta manera resulta:

$$B_n = \begin{cases} \frac{8}{n\pi} & \forall n \text{ impar} \\ 0 & \forall n \text{ par} \end{cases} \quad (5.34)$$

La participación de las armónicas puede ser visualmente apreciada en la Figura 5.4. Esta forma de representación se conoce como espectro de líneas de la señal de tiempo continuo. □□□

El ejemplo precedente sugiere que el cálculo manual de los coeficientes se puede complicar notablemente para señales de mayor complejidad. Este proceso puede ser enormemente facilitado usando, por ejemplo, MAPLE .

**Ejemplo 5.4.** Uno de los procesos en que se generan señales periódicas no sinusoidales es en la rectificación de una señal eléctrica. En realidad, para circuitos de potencia en el control de motores, por ejemplo, en vez de diodos se utilizan tiristores, que no son más que diodos en que el instante de conducción es controlado. Éstos permiten recortar la señal rectificadora, como se aprecia en la Figura 5.5 en que los tiristores se disparan pasado un tercio del período de la señal rectificadora. En este caso se dice que el ángulo de disparo es  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

Claramente el rectificador de onda completa es un caso particular de este rectificador controlado, cuando el ángulo de disparo es  $\alpha = 0$ .

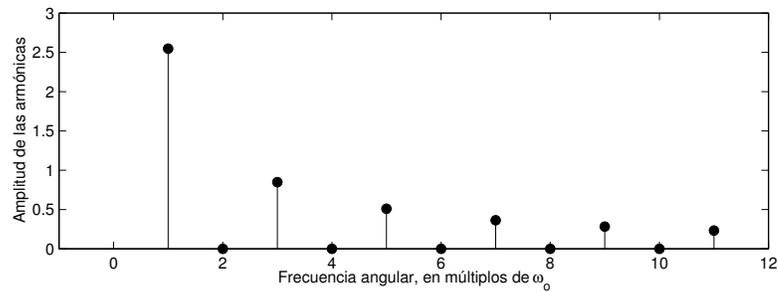


Figura 5.4: Espectro de líneas de una señal cuadrada.

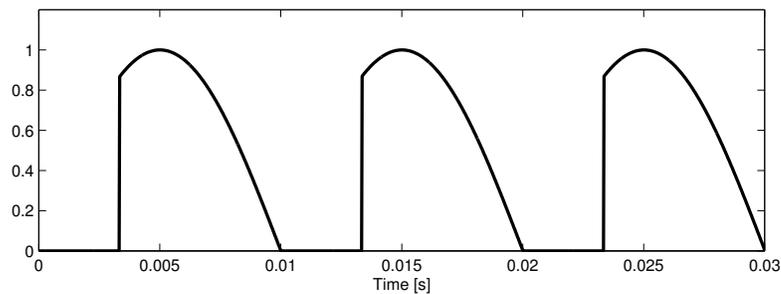


Figura 5.5: Señal a la salida de rectificador controlado por tiristores

Con ayuda de MAPLE los coeficientes se pueden obtener fácilmente, ahorrándonos buena parte del trabajo algebraico. En las líneas siguientes se muestran los comandos necesarios, entre los cuales se debe indicar explícitamente que  $0 < \alpha < \pi$  y que  $n$  es un número entero. Se ha considerado, por simplicidad, que la frecuencia original es 1[Hz] y la amplitud original es 1[V].

MAPLE

```
> assume(0<alpha,alpha<1):
> y(t):=(Heaviside(t-alpha)-Heaviside(t-Pi))*sin(t):
> A_0:=1/Pi*int(y(t),t=0..Pi);
> assume(n,integer):
> A(n):=2/Pi*int(y(t)*cos(2*n*t),t=0..Pi);
> B(n):=2/Pi*int(y(t)*sin(2*n*t),t=0..Pi);
```

$$A_0 = \frac{1 + \cos(\alpha)}{\pi}$$

$$A_n = -2 \frac{1 + 2 \cos(\alpha) (\cos(\alpha n))^2 - \cos(\alpha) + 4 n \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha n) \cos(\alpha n)}{(1 + 2n) \pi (-1 + 2n)}$$

$$B_n = 4 \frac{-\cos(\alpha) \operatorname{sen}(\alpha n) \cos(\alpha n) + 2 n \operatorname{sen}(\alpha) (\cos(\alpha n))^2 - n \operatorname{sen}(\alpha)}{(1 + 2n) \pi (-1 + 2n)}$$

□□□

**Ejemplo 5.5** (Onda triangular). Consideremos la señal periódica  $y(t)$ , con período  $T = 4$ , definida por tramos:

$$y(t) = \begin{cases} 1 + t & ; -2 < t \leq 0 \\ 1 - t & ; 0 < t \leq 2 \\ y(t + 4) & ; \text{en todo otro caso} \end{cases} \quad (5.35)$$

En MAPLE se puede definir y convertir de inmediato para que quede escrita en términos de escalones (función de Heaviside, obteniéndose así una expresión analítica que permite los siguientes pasos de cálculo.

```
MAPLE
> f(t):=piecewise(t<-2,-t-3,t<0,t+1,t<2,-t+1,t-3):
> y(t):=convert(f(t),Heaviside);
```

$$y(t) = -3 - t - 4 \operatorname{Heaviside}(t - 2) + 2t \operatorname{Heaviside}(t - 2) + 4 \operatorname{Heaviside}(t + 2) + 2t \operatorname{Heaviside}(t + 2) - 2t \operatorname{Heaviside}(t)$$

Si se calculan los coeficientes según las expresiones (5.27), tenemos que el valor medio  $A_0$  es cero y, como es par, los coeficientes  $B_n$  son todos iguales a cero. Los coeficientes de los términos cosenos se calculan mediante:

```
MAPLE
> A(n):=1/2*int(y(t)*cos(n*Pi/2*t),t=-2..2);
```

Por lo tanto,  $y(t)$  queda expresada en una serie cosenoidal de Fourier, de la forma:

$$y_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right) \quad (5.36)$$

En la Figura 5.6, podemos apreciar la aproximación de la función  $y(t)$  por las primeras dos armónicas no nulas ( $n = 1, 3$ ). En esa figura se observa que las dos primeras armónicas (con presencia no nula en la serie) generan una

buena aproximación de la señal original. Ello puede ser entendido al calcular las amplitudes de las primeras diez componentes de la serie. Esas amplitudes aparecen en el espectro de líneas de la Figura 5.7, donde se aprecia claramente que la amplitud de cualquier armónica superior a la tercera es despreciable.

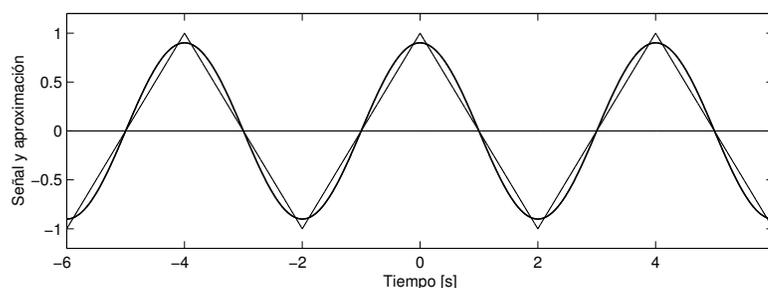


Figura 5.6: Aproximación de la señal triangular con la primera y la tercera armónica

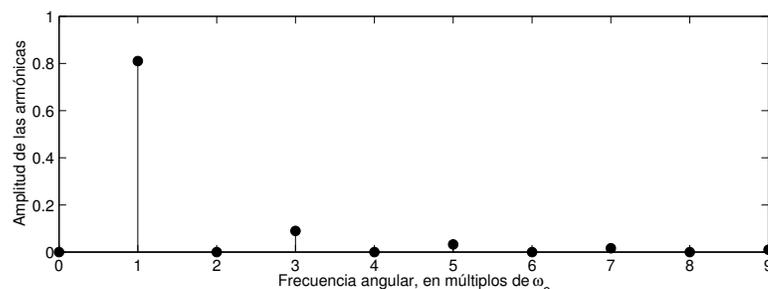


Figura 5.7: Espectro de líneas de una señal triangular

Finalmente, en el gráfico de la Figura 5.8 (a) muestra el error que se comete al representar la función por su serie truncada, en este caso hasta  $n = 3$ .

Podemos estudiar la fidelidad de la representación en serie de Fourier de una señal analizando lo que pasa con el **error**  $e_N(t) = y(t) - y_N(t)$  que se comete al representar una función  $y(t)$  por una combinación lineal finita o suma parcial de las funciones de la base (5.23), hasta el término  $N$ -ésimo  $y_N(t)$ . Respecto a este error  $e_N(t)$  tenemos el siguiente lema.

**Lema 5.1.** La representación  $y_N(t)$  es **ortogonal** al error  $e_N(t)$ , para todo  $N$ , es decir:

$$\langle e_N(t), y_N(t) \rangle = 0 \quad ; \forall N \quad (5.37)$$

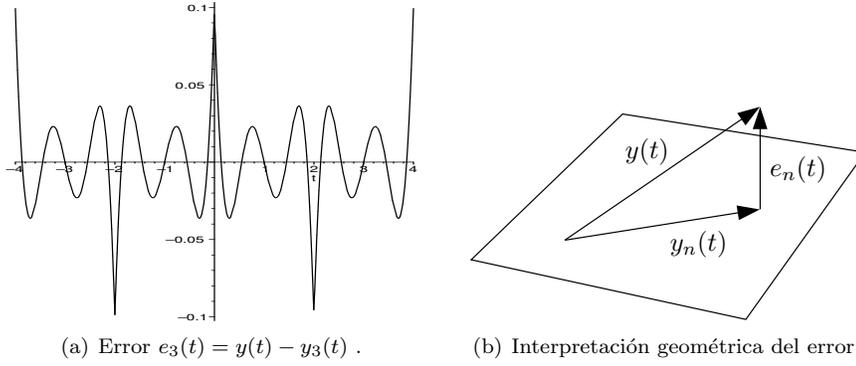


Figura 5.8: Error de representación con serie truncada

**Demostración**

Si escribimos la suma parcial como:

$$y_N(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(t) \quad (5.38)$$

en que los  $f_k(t)$  son vectores de la base  $\mathcal{B}$ , el producto (5.37) puede escribirse y desarrollarse como:

$$\langle e_N(t), y_N(t) \rangle = \langle y(t) - y_N(t), y_N(t) \rangle = \langle y(t), y_N(t) \rangle - \langle y_N(t), y_N(t) \rangle \quad (5.39)$$

$$= \left\langle y(t), \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(t) \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^N \alpha_k f_k(t), \sum_{j=1}^N \alpha_j f_j(t) \right\rangle \quad (5.40)$$

$$= \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle y(t), f_k(t) \rangle - \sum_{k=1}^N \alpha_k \left\langle f_k(t), \sum_{j=1}^N \alpha_j f_j(t) \right\rangle \quad (5.41)$$

Los vectores  $f_k(t)$  son ortogonales, por tanto:

$$\langle e_N(t), y_N(t) \rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k \langle y(t), f_k(t) \rangle - \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \langle f_k(t), f_k(t) \rangle \quad (5.42)$$

Los coeficientes  $\alpha_k$ , en tanto, se calculan de la forma:

$$\alpha_k = \frac{\langle y(t), f_k(t) \rangle}{\langle f_k(t), f_k(t) \rangle} \quad (5.43)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle e_N(t), y_N(t) \rangle &= \sum_{k=1}^N \frac{\langle y(t), f_k(t) \rangle}{\langle f_k(t), f_k(t) \rangle} \langle y(t), f_k(t) \rangle - \sum_{k=1}^N \frac{\langle y(t), f_k(t) \rangle^2}{\langle f_k(t), f_k(t) \rangle^2} \langle f_k(t), f_k(t) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{\langle y(t), f_k(t) \rangle^2}{\langle f_k(t), f_k(t) \rangle} - \sum_{k=1}^N \frac{\langle y(t), f_k(t) \rangle^2}{\langle f_k(t), f_k(t) \rangle} = 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

□□□

Este resultado permite apreciar que  $y_N(t)$ , con los coeficientes calculados según (5.27), es la combinación lineal que **mejor representa** a  $y(t)$  (en el sentido de la norma cuadrática), ya que, dada su ortogonalidad con el vector de error  $e_N(t)$ , minimiza la distancia entre  $y(t)$  y el conjunto de funciones que se generan por combinación lineal de los  $N$  elementos de la base. La Figura 5.8 (b) ilustra geoméricamente la idea de ortogonalidad entre el error  $e_N(t)$  y la representación truncada  $y_N(t)$ .

Finalmente, es importante hacer notar que la representación obtenida en (5.26), con los coeficientes definidos en (5.27), representa a la función  $y(t)$ , dentro del intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  **sea ésta periódica o no**. En este último caso, la representación se debe entender válida sólo dentro del intervalo en que se ha calculado. Sin embargo, dado que dentro del intervalo de longitud  $T$  todas las sinusoides del conjunto  $\mathcal{B}$  completan un número entero de períodos, la periodicidad de los elementos de  $\mathcal{B}$  se extiende a la representación de  $y(t)$ , es decir, se repite en todo intervalo de la forma  $[kT - \frac{T}{2}, kT + \frac{T}{2}]$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Además por simple traslación del intervalo en que trabajamos, es decir, corriendo del eje temporal, el cálculo de los coeficientes y la representación pueden tomarse en cualquier intervalo arbitrario  $[t_o, t_o + T]$ . En todo caso, el lector debe advertir que si la señal bajo análisis no es periódica, la representación será distinta para distintas elecciones de  $t_o$ .

### 5.3.2. Serie de Fourier exponencial

Si consideramos la representación en serie de Fourier obtenida para una función seccionalmente continua  $y(t)$  obtenida en (5.26), podemos reescribirla utilizando las expresiones para  $\sin(\omega t)$  y  $\cos(\omega t)$  en términos de exponenciales complejas:

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= A_0 e^{j0\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + B_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

que puede reagruparse como:

$$y(t) = A_0 e^{j0\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n - jB_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{A_n + jB_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad (5.46)$$

Es decir, podemos reescribir una serie de Fourier trigonométrica como una **serie de Fourier exponencial** de la forma:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (5.47)$$

Una expresión para los coeficientes  $C_n$  se puede obtener a partir de los coeficientes de la serie trigonométrica y la ecuación de Euler. Por ejemplo, para  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{A_n - jB_n}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) (\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)) dt \quad (5.48) \end{aligned}$$

Esto lleva a la expresión

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5.49)$$

Se deja al lector verificar que esta expresión también es válida para el resto de los coeficientes  $C_n$ , cuando  $n \leq 0$ . Si se presta atención a la forma de los coeficientes en la ecuación (5.46), puede apreciarse que aparecen en pares complejos conjugados, es decir,  $\forall n > 0$ :

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} = |C_n| e^{j\theta_n} \quad (5.50)$$

$$C_{-n} = \frac{A_n + jB_n}{2} = |C_n| e^{-j\theta_n} \quad (5.51)$$

tal como también puede demostrarse a partir de la expresión general (5.49) para los coeficientes de la serie compleja. Es decir, tenemos un nuevo conjunto de funciones, complejas en este caso, de la forma:

$$\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (5.52)$$

que constituye una base para el espacio de funciones seccionalmente continuas en el intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ . Se deja al lector verificar que este conjunto también es ortogonal bajo el producto interno antes definido, pero en que ahora la conjugación sí afecta a las funciones involucradas:

$$\langle f_n(t), f_m(t) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_n(t)^* f_m(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-jn\omega_0 t} e^{jm\omega_0 t} dt \quad (5.53)$$

Que debe cumplir:

$$\langle f_n(t), f_m(t) \rangle = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \kappa > 0 & ; n = m \end{cases} \quad (5.54)$$

Es importante hacer notar que en la manipulación que se ha hecho en la serie de Fourier trigonométrica para llegar a la serie exponencial, han aparecido valores para  $n$  negativos y positivos. Esto en realidad debe interpretarse nada más como lo que se ha mencionado: un producto de la manipulación algebraica que permite obtener la representación en serie (5.47) más compacta y fácil de manipular. Si se desea obtener la amplitud de la  $n$ -ésima armónica de la serie deben considerarse **ambos** términos de la serie  $n$  y  $-n$ , es decir, usando las ecuaciones (5.50) y (5.51):

$$\begin{aligned} C_n \cdot e^{-jn\omega_0 t} + C_{-n} \cdot e^{jn\omega_0 t} &= |C_n| e^{j\theta_n} \cdot e^{-jn\omega_0 t} + |C_{-n}| e^{-j\theta_n} \cdot e^{jn\omega_0 t} \\ &= |C_n| \cdot e^{-j(n\omega_0 t - \theta_n)} + |C_{-n}| \cdot e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \\ &= 2|C_n| \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned}$$

### 5.3.3. Parseval y la energía de las señales periódicas

Existe un conjunto de resultados, deducidos por Parseval, que relacionan directamente características de la señal periódica con los coeficientes de su Serie de Fourier. En realidad, los resultados de Parseval se aplican a la expansión en cualquier base ortogonal. Los detalles matemáticos pueden ser examinados en el Apéndice B.

Supongamos que una señal  $y(t)$  periódica se expresa como serie en los elementos,  $f_\ell(t)$ , de una base ortogonal en el intervalo  $(-T/2, T/2)$ . Entonces:

$$y(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_\ell f_\ell(t) \quad (5.55)$$

Esto significa que:

$$\langle y(t), y(t) \rangle = \left\langle \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_\ell f_\ell(t), \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_\ell f_\ell(t) \right\rangle \quad (5.56)$$

Si a continuación usamos la propiedad de ortogonalidad de los elementos de la base, tenemos que:

$$\langle y(t), y(t) \rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} |\alpha_\ell|^2 \langle f_\ell(t), f_\ell(t) \rangle \quad (5.57)$$

Note que el lado izquierdo en (5.57) es proporcional al cuadrado del valor efectivo (RMS) de la señal periódica.

Para la serie de Fourier trigonométrica, usando la misma definición del producto interno (5.24), la expresión (5.57) se reduce a:

$$\int_{-T/2}^{T/2} (y(t))^2 dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (A_\ell^2 + B_\ell^2) \quad (5.58)$$

En el caso exponencial, la expresión (5.57) está dada por:

$$\int_{-T/2}^{T/2} (y(t))^2 dt = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} C_{\ell}^2 \quad (5.59)$$

En (5.58) y en (5.59), el lado izquierdo representa la energía de la señal  $y(t)$  en un período. El lado derecho en ambas ecuaciones señala que esa energía puede ser computada como la suma de similar energía de cada armónica.

## 5.4. Respuesta a entradas sinusoidales. El caso de tiempo discreto

En esta sección nos detendremos en la característica de ganancia que exhibe un sistema lineal de tiempo discreto cuando la excitación es una senoide. Con ese propósito consideremos un sistema lineal **estable** modelado por su ERS:

$$y[t] + a_{n-1}y[t-1] + \dots + a_1y[t-n+1] + a_0y[t-n] = b_mu[t] + b_{m-1}u[t-1] + \dots + b_1u[t-m+1] + b_0u[t-m] \quad (5.60)$$

Si la entrada del sistema es una señal sinusoidal de tiempo discreto de período  $N \in \mathbb{Z}$  que puede escribirse de la forma:

$$u[t] = A \cos(\theta t + \phi); \quad \text{con } \theta = \frac{2\pi}{N} \quad (5.61)$$

en que (vea Capítulo 2):

$A$  es la *amplitud*, cuyas unidades dependen del sistema en cuestión,

$\phi$  es el *ángulo de desfase* (o simplemente *fase*), medido en [rad], y

$\theta$  es la *frecuencia angular discreta*, medida en [rad]. Esta, a su vez, determina la frecuencia discreta  $f = \frac{1}{N}$  y el período  $T = N$  de la senoide.

Aplicando la fórmula de Euler se tiene que:

$$A \cos(\theta t + \phi) = A \frac{e^{j(\theta t + \phi)} + e^{-j(\theta t + \phi)}}{2} = \tilde{A} e^{j\theta t} + \tilde{A}^* e^{-j\theta t} \quad (5.62)$$

donde  $\tilde{A} \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{A}^*$  es el complejo conjugado de  $\tilde{A}$  y:

$$\tilde{A} = \frac{A}{2} e^{j\phi} \quad (5.63)$$

Por otra parte, sabemos que si  $K[\theta] \in \mathbb{C}$  es la ganancia al modo forzante  $e^{j\theta t}$ , entonces, por linealidad:

$$\mathbf{T}\langle x_o, A \cos(\theta t + \phi) \rangle = K[\theta] \alpha e^{j\theta t} + (K[\theta])^* \alpha^* e^{-j\theta t} + \{\text{modos naturales}\} \quad (5.64)$$

Donde  $K[\theta]$  es la ganancia a modo forzante y está dada por (4.36), con  $\beta_i = e^{j\theta}$ . Si expresamos  $K[\theta]$  en su forma polar se llega a:

$$K[\theta] = |K[\theta]|e^{j\phi_a(\theta)} \quad (5.65)$$

Así, se obtiene:

$$\mathbf{T}\langle x_o, A \cos(\theta t + \phi) \rangle = |K[\theta]|A \cos(\theta t + \phi + \phi_a(\theta)) + \{\text{modos naturales}\} \quad (5.66)$$

Como el sistema es estable, los modos naturales decaen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , así, la respuesta estacionaria contiene sólo la componente particular, es decir, contiene sólo los modos forzados y tiene la forma:

$$y[t] = A_s(\theta) \cos(\theta t + \phi_s(\theta)) \quad (5.67)$$

Esta forma puede ser directamente calculada reemplazando (5.67) en la ERS.

Cuando el modo forzante es una exponencial de la forma  $e^{j\theta t}$ , la ganancia a modo forzante,  $K[\theta]$ , caracteriza lo que se denomina **respuesta en frecuencia** del sistema de tiempo discreto.

La teoría precedente es ilustrada a través de un ejemplo.

**Ejemplo 5.6.** Consideremos el sistema modelado por la ERS:

$$y[t] - 0,7y[t-1] + 0,12y[t-2] = 1,5u[t] \quad (5.68)$$

Supongamos que la entrada es  $u[t] = \text{sen}(\theta t)$  y que todas las condiciones iniciales son cero.

Observamos, primero, que la frecuencias naturales, es decir, las soluciones de  $\lambda^2 - 0,7\lambda + 0,12 = 0$  se encuentran ubicadas en  $\lambda_1 = 0,4$  y  $\lambda_2 = 0,3$ . Con esto sabemos entonces que la solución homogénea tiene la forma:

$$y_h[t] = B_1(0,4)^t + B_2(0,3)^t \quad (5.69)$$

Una segunda observación es que los modos naturales,  $(0,4)^t$  y  $(0,3)^t$ , decaen a cero para  $t \rightarrow \infty$ , ya que el sistema es estable, dado que ambas frecuencias naturales tienen magnitud menor que 1:

$$y_h(t) = e^{-2t} [B_1 \cos(3t) + B_2 \text{sen}(3t)] \quad (5.70)$$

Para obtener la solución particular reemplazamos la solución propuesta:

$$y_p[t] = A_s(\theta) \text{sen}(\theta t + \phi_s(\theta)) \quad (5.71)$$

que es equivalente a una expresión de la forma

$$y_p[t] = C_1(\theta) \cos(\theta t) + C_2(\theta) \text{sen}(\theta t) \quad (5.72)$$

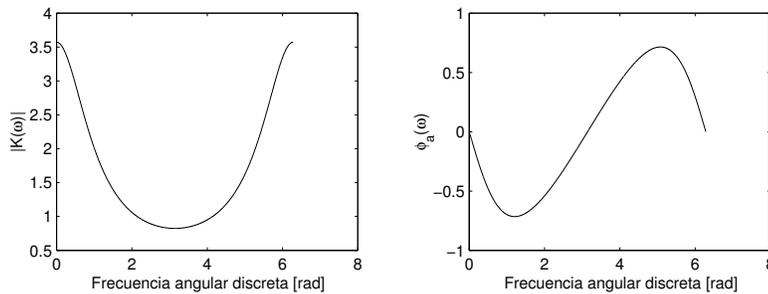


Figura 5.9: Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden de tiempo discreto

Los coeficientes  $C_1(\theta)$  y  $C_2(\theta)$  se obtienen reemplazando la solución particular propuesta y la función de entrada en la ecuación de recursión original.

Siguiendo la discusión del Ejemplo 5.1 en la página 87, la modificación en magnitud y fase que experimenta la senoide al pasar por el sistema, se puede calcular a partir de la respuesta en frecuencia del sistema. En este caso:

$$K[\theta] = \frac{1,5e^{2j\theta}}{e^{2j\theta} - 0,7e^{j\theta} + 0,12} \quad (5.73)$$

Esta respuesta en frecuencia puede ser representada gráficamente, como se muestra en la Figura 5.9.

□□□

Análogamente a lo que ocurre en el caso de tiempo continuo, en ciertos sistemas, a pesar de tener todas sus frecuencias naturales en el interior de la zona de estabilidad, la respuesta a sinusoides de baja amplitud incluye componentes sinusoidales de altísima amplitud. Esto sucede en situaciones en que el sistema es excitado con una senoide de frecuencia muy cercana a frecuencias naturales que se encuentran al interior del disco unitario, pero muy próximas al límite de estabilidad (en este caso, la circunferencia unitaria). En este caso, dependiendo del amortiguamiento del sistema, la salida puede alcanzar el estado estacionario sólo después de mucho tiempo, y aunque analíticamente la oscilación en la salida permanece acotada, puede alcanzar magnitudes insostenibles para el sistema real.

**Ejemplo 5.7.** El fenómeno de respuestas inusualmente altas se origina en sistemas que exhiben altas ganancias a un modo forzante de la forma  $e^{j\theta t}$ . Considere, por ejemplo, el sistema:

$$y[t] - 1,4128y[t - 1] + 0,9980y[t - 2] = 0,5851u[t] \quad (5.74)$$

Observamos que es un sistema estable, con frecuencias naturales  $\lambda_{1,2} = e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ . Note que estas frecuencias naturales se encuentran muy cercanas a la

circunferencia unitaria. La ganancia a continua de este sistema es 1. Sin embargo, la ganancia a una frecuencia  $\theta = \frac{\pi}{4}$  tiene magnitud 414,0. Esto implica que si la excitación es una senoide de amplitud unitaria y frecuencia  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , la respuesta forzada será una senoide de amplitud 414,0, es decir, para esta excitación, el sistema entra en resonancia.

□□□

## 5.5. Serie de Fourier de tiempo discreto

Veamos ahora cómo pueden extenderse las ideas hasta aquí expuestas a la representación de funciones definidas en instantes de tiempo discreto como suma de sinusoides, también definidas en tiempo discreto.

Para sistemas de tiempo discreto, las series trigonométricas son poco usadas, prefiriéndose la forma exponencial. Veremos que ello se debe a que las exponenciales periódicas involucradas tienen propiedades de simetría que hacen mucho más simple el cálculo de los coeficientes, en comparación al cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica. Así, consideramos señales de la forma:

$$f[t] = e^{j\theta t} \quad ; t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.75)$$

Nuestro interés fundamental, al igual que para serie de Fourier trigonométrica, es determinar cómo puede representarse una función periódica como suma de un término constante y un conjunto de sinusoides de frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental.

Consideremos, por ejemplo, una función  $y[t]$  definida para  $t = 0, 1, 2, \dots$ , de período  $N$ , es decir:

$$y[t + N] = y[t] \quad ; \forall t \quad (5.76)$$

La frecuencia fundamental se define análogamente al caso continuo:

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (5.77)$$

y las frecuencia armónicas corresponden a los múltiplos de la frecuencia fundamental  $\theta_0$ . Sin embargo, si observamos con atención la forma que toman las exponenciales imaginarias para cada armónica veremos que:

$$e^{j\theta_0(\ell+N)t} = e^{j\frac{2\pi}{N}(\ell+N)t} = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell t} e^{j2\pi t} = e^{j\frac{2\pi}{N}\ell t} \quad (5.78)$$

Es decir, tenemos **periodicidad en la frecuencia**, ya que el resultado (5.78) nos indica que la armónica  $\ell$ -ésima es la misma que la  $(\ell + N)$ -ésima, y la misma en realidad que cualquiera de las  $(\ell + mN)$ -ésimas, en que  $m$  es cualquier número entero. Esto indica que el conjunto ortogonal es finito, con sólo  $N$  componentes.

Por tanto para representar una función discreta  $y[t]$  de período  $N$  en serie de Fourier nos basta simplemente una suma de las primeras  $N$  armónicas:

$$y[t] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j\theta_0 n t}; \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (5.79)$$

Desde el punto de vista del álgebra lineal queremos representar el vector  $y[t]$  en términos de los vectores del conjunto:

$$\mathcal{B}_d = \{1, e^{j\theta_0 t}, e^{j2\theta_0 t}, \dots, e^{j(N-1)\theta_0 t}\} \quad (5.80)$$

Si definimos un producto interno en este conjunto, análogo al definido en (5.24), la integral (suma continua) en un periodo fundamental se transforma en una sumatoria (suma discreta):

$$\langle f_1[t], f_2[t] \rangle = \sum_{t=0}^{N-1} f_1^*[t] f_2[t] \quad (5.81)$$

Tendremos que para los vectores del conjunto  $\mathcal{B}_d$ , si  $n_1 \neq n_2$ :

$$\langle e^{j\theta_0 n_1 t}, e^{j\theta_0 n_2 t} \rangle = \sum_{t=0}^{N-1} (e^{j\theta_0 n_1 t})^* e^{j\theta_0 n_2 t} \quad (5.82)$$

$$= \sum_{t=0}^{N-1} e^{j\theta_0(-n_1+n_2)t} \quad (5.83)$$

Que es una suma geométrica

$$\langle e^{j\theta_0 n_1 t}, e^{j\theta_0 n_2 t} \rangle = \frac{1 - (e^{j\theta_0(-n_1+n_2)})^N}{1 - e^{j\theta_0(-n_1+n_2)}} \quad (5.84)$$

Pero según (5.77) tenemos que  $N\theta_0 = 2\pi$ , y  $n_1$  y  $n_2$  son números enteros, por tanto, para  $n_1 \neq n_2$ , pues de otra forma el denominador se hace cero:

$$\langle e^{j\theta_0 n_1 t}, e^{j\theta_0 n_2 t} \rangle = \frac{1 - e^{j2\pi(-n_1+n_2)t}}{1 - e^{j\theta_0(-n_1+n_2)}} = 0 \quad (5.85)$$

y si  $n_1 = n_2 = n$ :

$$\langle e^{j\theta_0 n t}, e^{j\theta_0 n t} \rangle = \|e^{j\theta_0 n t}\|^2 = \sum_{t=0}^{N-1} e^{-j\theta_0 n t} e^{j\theta_0 n t} = \sum_{t=0}^{N-1} 1 = N \quad (5.86)$$

Es decir, el conjunto definido en (5.80) es **ortogonal** bajo el producto interno (5.81). Por tanto, los coeficientes de la representación (5.79) se pueden calcular usando el Lema B.1 en la página 372, con lo que se obtiene la expresión equivalente a (5.49), pero para las funciones discretas:

$$C_n = \frac{\langle e^{j\theta_0 n t}, y[t] \rangle}{\langle e^{j\theta_0 n t}, e^{j\theta_0 n t} \rangle} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_0 n t} \quad ; \theta_0 = \frac{2\pi}{N} \quad (5.87)$$

Es importante verificar que la expresión obtenida en (5.87) usada en la representación (5.79) garantiza que la suma es en efecto una función real. Para la

serie de Fourier exponencial se verificó que la suma de las armónicas correspondientes a los términos  $\pm n$  es real pues estos términos resultan ser conjugados el uno del otro. Para la serie de Fourier discreta, si observamos la expresión para el coeficiente  $N - \ell$ , tenemos:

$$\begin{aligned} C_{N-\ell} &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_0(N-\ell)t} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_0 N t} e^{j\theta_0 \ell t} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{j\theta_0 \ell t} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} (y[t] e^{-j\theta_0 \ell t})^* = (C_\ell)^* \end{aligned} \quad (5.88)$$

Es decir, el coeficiente de la armónica  $N - \ell$  es el complejo conjugado del coeficiente de la correspondiente  $\ell$ -ésima armónica. O, en otras palabras, la magnitud de los coeficientes  $C_\ell$  tiene simetría par respecto a  $\frac{N}{2}$ , mientras que su fase (o ángulo) tiene simetría impar con respecto a  $\frac{N}{2}$ . La armónica  $N - \ell$  puede ser expresada como:

$$e^{j\theta_0(N-\ell)t} = e^{j\theta_0 N t} e^{-j\theta_0 \ell t} = e^{-j\theta_0 \ell t} \quad (5.89)$$

Es decir, ambas armónicas  $\ell$  y  $N - \ell$  corresponden en realidad a una misma frecuencia. Por tanto si sumamos los términos correspondientes a ellas en la representación, escribiendo sus coeficientes en forma polar:

$$\begin{aligned} C_\ell e^{j\theta_0 \ell t} + C_{N-\ell} e^{j\theta_0(N-\ell)t} &= C_\ell e^{j\theta_0 \ell t} + (C_\ell)^* e^{-j\theta_0 \ell t} \\ &= |C_\ell| e^{j\theta_\ell} e^{j\theta_0 \ell t} + |C_\ell| e^{-j\theta_\ell} e^{-j\theta_0 \ell t} \\ &= 2|C_\ell| \cos(\theta_0 \ell t + \theta_\ell) \end{aligned} \quad (5.90)$$

En base a esto podemos concluir que al representar una señal periódica de tiempo discreto en forma de una Serie de Fourier, en realidad, la estamos describiendo en términos de  $N$  exponenciales periódicas de la base (5.80), en que  $N$  es el período de la función discreta. Esas exponenciales corresponden a una componente constante más  $k$  diferentes armónicas, en que  $k = \frac{N}{2}$ , si  $N$  es par, y  $k = \frac{N-1}{2}$  si es impar.

La serie de Fourier para una señal de tiempo discreto puede ser descrita en un gráfico en que aparece  $|C_\ell|$  en función de  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Este diagrama es conocido como el **espectro de líneas** de la señal de tiempo discreto.

El problema de convergencia de la serie de Fourier para señales de tiempo discreto tiene un tratamiento mucho más simple que en el caso de tiempo continuo. Esto se debe a que las amplitudes de las  $N$  armónicas se pueden calcular a partir de un sistema de ecuaciones linealmente independientes de la forma:

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \mathbf{W}_N \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

donde el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $\mathbf{W}_N$  está dado por:

$$[\mathbf{W}_N]_{i,j} = (e^{j\theta_0})^{(i-1)(j-1)} \quad (5.92)$$

Las ecuaciones precedentes permiten calcular los coeficientes que describen exactamente la señal periódica  $y[t]$ . Note que la matriz  $\mathbf{W}_N$  tiene la forma general:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{N-2} & \cdots & w \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

donde  $w = e^{j\theta_0}$ . Esta matriz se denomina **matriz de Fourier**, y es no singular (ver Apéndice F). De esta forma, el vector de la derecha en (5.91) puede ser despejado al multiplicar por la inversa de  $\mathbf{W}_N$ .

Las ideas de Parseval también se aplican a señales de tiempo discreto, aunque en este caso el concepto de energía no tiene la connotación física que puede tener en tiempo continuo (ver subsecciones §2.2.7 y §2.3.7).

De esta forma, si una señal periódica  $y[t]$  tiene la expansión en serie dada por:

$$y[t] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \alpha_\ell f_\ell[t] \quad (5.94)$$

donde las funciones  $f_\ell[t]$  son elementos de una base ortogonal, entonces:

$$\langle y[t], y[t] \rangle = \sum_{\ell=0}^{N-1} |\alpha_\ell|^2 \langle f_\ell[t], f_\ell[t] \rangle \quad (5.95)$$

que es equivalente a:

$$\sum_{t=0}^{N-1} y[t]^2 = N \sum_{\ell=0}^{N-1} |\alpha_\ell|^2 \quad (5.96)$$

El principal resultado, que resume lo estudiado en esta subsección, es que una señal discreta  $y[t]$  con valores para  $t \in [0, N - 1]$  puede representarse mediante la serie de Fourier discreta dada por la ecuación (5.79), en donde los coeficientes que acompañan a cada exponencial compleja se calculan según (5.87). Adicionalmente, ese par de ecuaciones puede interpretarse como un par de transformación, y se pueden reescribir en la forma

$$y[t] = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{j\theta_0 n t} \quad (5.97)$$

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_0 n t} \quad (5.98)$$

donde  $\theta_0 = \frac{2\pi}{N}$ . De hecho, en la literatura [35, 12] se define  $Y_n$  como la **transformada de Fourier discreta** de  $y[t]$ , conocida por su sigla inglesa DFT, *Discrete Fourier Transform*.

Es importante recordar esta denominación, pues en el Capítulo 6 estudiaremos la **transformada de Fourier de tiempo discreto** (DTFT, *Discrete-Time Fourier Transform*), que analiza el caso de señales discretas, no necesariamente periódicas, definidas  $\forall t \in \mathbb{Z}$ .

Además en la Sección §C.3 se presenta la transformada rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*) que no es más que un algoritmo que permite calcular de manera muy eficiente la transformada de Fourier discreta de una secuencia. Este es el algoritmo que MATLAB utiliza para calcular el espectro de una señal mediante el comando `fft`.

## 5.6. Aplicación de las series de Fourier al análisis de sistemas lineales

Cuando un sistema lineal **estable** es excitado por una señal periódica, su respuesta **en estado estacionario** también es una señal periódica. Esta respuesta, en general no tiene la misma forma que la señal de entrada, ya que el sistema amplifica (o atenúa) y desfasa cada componente armónica de la excitación, en cantidades que dependen de la frecuencia de cada armónica.

Para usar cuantitativamente las series de Fourier en el análisis de un sistema lineal, debemos calcular la ganancia a modo forzante del sistema para la frecuencia de cada una de las armónicas de interés, es decir, la respuesta en frecuencia del sistema para cada una de esas armónicas.

Estos conceptos son comunes tanto a los sistemas de tiempo continuo como a los sistemas de tiempo discreto. Para apreciar su aplicación consideraremos un ejemplo.

**Ejemplo 5.8.** *Un sistema de tiempo continuo, definido por su EDS:*

$$\rho^3 y(t) + 7\rho^2 y(t) + 15\rho y(t) + 54y(t) = 54u(t) \quad (5.99)$$

*es excitado con una señal periódica de frecuencia angular 1 [rad/s]. Entonces la amplificación y desfase que experimentan la componente constante o continua y las primeras nueve armónicas, al pasar a través del sistema, se pueden calcular a partir de la expresión que define la respuesta en frecuencia del sistema:*

$$K(\omega) = \frac{54}{(j\omega)^3 + 7(j\omega)^2 + 15(j\omega) + 54} \quad (5.100)$$

donde  $\omega = 0; 1; 2; 3; \dots; 9$  [rad/s].

*La respuesta en frecuencia es mostrada en la Figura 5.10, donde se ha indicado la magnitud y fase de la respuesta a continua (frecuencia cero) y la respuesta para las frecuencias de la fundamental y de las primeras nueve armónicas. Los valores numéricos se muestran en la Tabla 5.1. Al observar los datos obtenidos se aprecia que el sistema privilegia, en amplificación, la tercera armónica.*

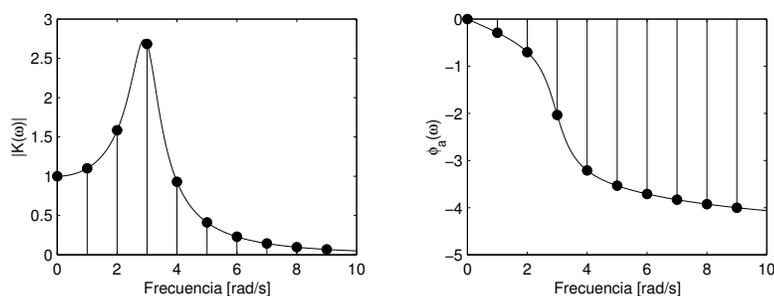


Figura 5.10: Respuesta en frecuencia de un sistema de tercer orden de tiempo continuo.

Frecuencia [rad/s]	Amplificación	Desfase [rad]
0	1.0000	0.0000
1	1.1011	-0.2895
2	1.5855	-0.7023
3	2.6833	-2.0344
4	0.9288	-3.2104
5	0.4125	-3.5334
6	0.2301	-3.7083
7	0.1442	-3.8305
8	0.0972	-3.9244
9	0.0688	-4.0000

Tabla 5.1: Amplitud y fase de las armónicas en el Ejemplo 5.8.

Para ser más específicos, supongamos que la excitación  $u(t)$  es una señal cuadrada, con valor medio cero. Usando MATLAB o MAPLE podemos calcular entonces la respuesta,  $y(t)$ . La entrada y la salida son mostradas en la Figura 5.11.

La fuerte presencia de la tercera armónica en la salida es observada claramente, así como también es fácilmente apreciable que la forma de onda de la salida es muy diferente a la de la entrada.

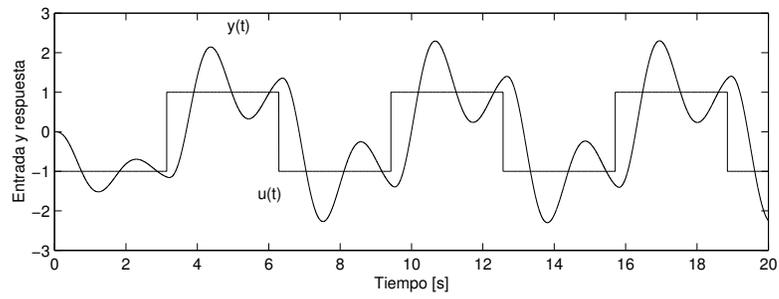


Figura 5.11: Comportamiento de un sistema con una excitación periódica (Ejemplo 5.8).

□□□

## 5.7. Problemas para el lector

**Problema 5.1.** Determine la serie de Fourier trigonométrica de las siguientes funciones<sup>2</sup>:

$$(a) \quad y(t) = \begin{cases} -1 & ; -\pi < t \leq 0 \\ +1 & ; 0 < t \leq \pi \\ y(t+2\pi) & \text{e.t.o.c.} \end{cases}$$

$$(b) \quad y(t) = \begin{cases} t & ; -1 < t \leq 1 \\ y(t+2) & \text{e.t.o.c.} \end{cases}$$

$$(c) \quad y(t) = |A \cos(\omega t)|$$

$$(d) \quad y(t) = \max\{0, A \operatorname{sen}(\omega t)\}$$

$$(e) \quad y(t) = 4 \operatorname{sen}^2(t) \text{ (use identidades trigonométricas)}$$

$$(f) \quad y(t) = \operatorname{sen}(t) + 6 \cos^3(t) \text{ (idem)}$$

Para cada caso grafique el espectro de líneas (use  $|\tilde{C}_n|$ ).

**Problema 5.2.** Determine la serie de de Fourier exponencial que representa a cada una de las siguientes funciones:

$$(a) \quad y(t) = \cos(2t) + \operatorname{sen}(5t)$$

$$(b) \quad y(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leq t < 1 \\ y(t+1) & \text{e.t.o.c.} \end{cases}$$

$$(c) \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

(d) Todas las funciones del problema anterior.

**Problema 5.3.** Considere el sistema de primer orden:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 10u(t)$$

Suponga que  $u(t)$  es la señal periódica de la Figura 5.12.

**5.3.1** Determine las tres primeras armónicas ( $n = 1, 2, 3$ ) del desarrollo en serie de Fourier de  $u(t)$ .

**5.3.2** Determine la respuesta del sistema a la suma de esas tres armónicas puesta en la entrada, es decir, a la serie de Fourier de  $u(t)$ , pero truncada.

<sup>2</sup>e.t.o.c.: En todo otro caso.

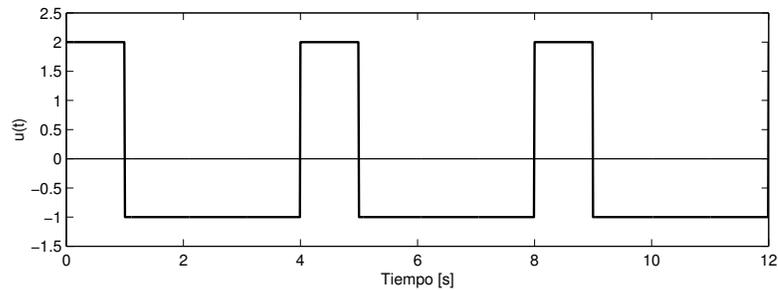


Figura 5.12: Tren de pulsos

**5.3.3** Grafique la salida  $y(t)$  obtenida, y compárela con la simulación en MATLAB del sistema sometido a la entrada original  $u(t)$ . Comente.

**Problema 5.4.** Considere el sistema definido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t)$$

en la que  $\omega_n$  y  $\xi$  son positivos.

**5.4.1** Determine la salida del sistema si la entrada es  $u(t) = A \cos(\omega_n t)$ .

**5.4.2** Determine la relación de amplitudes entre la salida y la entrada en estado estacionario cuando  $\omega_n = 10$ , y  $\xi = 0,1; 0,05$ ; y  $0,01$ .

**5.4.3** Simule y grafique la entrada y la salida para las condiciones anteriores, cuando  $A = 1$ .

**Problema 5.5.** Considere el sistema definido por su ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) + u(t)$$

Si la entrada del sistema es una senoide  $u(t) = \text{sen}(10t)$

**5.5.1** Determine la salida del sistema  $y(t)$ , suponiendo condiciones iniciales cero.

**5.5.2** Grafique la parte homogénea de la solución correspondiente a los modos naturales, la solución particular correspondiente a la senoide de entrada y la solución total, suma de las dos primeras. Comente.

**Problema 5.6.** Considere el conjunto de funciones definidas en el intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ :

$$\mathcal{B} = \{ 1, \cos(n\omega_0 t), \text{sen}(n\omega_0 t) \}_{n=1,2,\dots} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Y el producto interno definido en él como:

$$\langle y_n(t), y_m(t) \rangle_T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_n^*(t) y_m(t) dt \quad ; \quad y_n(t), y_m(t) \in \mathcal{B}$$

Demuestre que el conjunto  $\mathcal{B}$  es ortogonal y encuentre todos los posibles valores que toma el producto interno cuando se recorren los elementos de  $\mathcal{B}$ .

**Problema 5.7.** Considere la siguiente función periódica  $f(t)$  definida como:

$$f(t) = \begin{cases} A & ; |t| < \tau/2 \\ 0 & ; \tau/2 \leq |t| < T/2 \\ f(t+T) & ; \text{e.t.o.c.} \end{cases}$$

**5.7.1** Determine la serie de Fourier trigonométrica de la función  $f(t)$ .

**5.7.2** Grafique la amplitud de las armónicas en función de la frecuencia.

**5.7.3** ¿Cómo se ve afectado el gráfico a medida que crece el valor de  $T$  ? y ¿qué pasa cuando  $T \rightarrow \infty$  ?

**Problema 5.8.** Considere la función  $v(t)$  definida como:

$$v(t) = \begin{cases} 5 & ; 0 < t < \tau < 0,001 \\ 0 & ; \tau < t < 0,001 \\ v(t+0,001) & ; \text{e.t.o.c.} \end{cases}$$

**5.8.1** Determine la serie de Fourier de  $v(t)$ , indicando la amplitud de los coeficientes en función del parámetro  $\tau$ .

**5.8.2** Si el parámetro  $\tau$  varía lentamente con el tiempo, digamos  $\tau(t) = \text{sen}(2\pi t)$   
¿Qué se obtiene si se hace pasar  $v(t)$  por un sistema con una EDS dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} + 100y(t) = 100u(t) \quad ?$$

**Problema 5.9.** Considere la función  $y(t) = t^2$ , definida en el intervalo  $0 \leq t < T$ .

**5.9.1** ¿Cómo podría extenderse la función  $y(t)$  al intervalo  $[-T, T]$  de manera que su serie de Fourier sea de la forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) \quad ?$$

**5.9.2** ¿Cómo podría extenderse al intervalo  $[-T, T]$  de manera que su serie sea de la forma:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \quad ?$$

---

**Problema 5.10.** Determine la serie de Fourier discreta de las siguientes funciones:

- (a)  $y[t] = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} t$
- (b)  $y[t] = \begin{cases} \operatorname{sen} 3t & ; t = 0, \dots, 3 \\ y[t+4] & ; e.t.o.c. \end{cases}$
- (c)  $y[t] = \begin{cases} \lambda^t & ; \lambda \neq 1, t = 0, \dots, N-1 \\ y[t+N] & ; e.t.o.c. \end{cases}$
- (d)  $y[t] = (-1)^t$
- (e)  $y[t] = \begin{cases} -1 & ; t = -2, \dots, 0 \\ 1 & ; t = 1, \dots, 3 \\ y[t+6] & ; e.t.o.c. \end{cases}$
- (f)  $y[t] = t \pmod{N}$

Construya el espectro de líneas para cada caso.

---

**Problema 5.11.** Un sistema lineal de tiempo discreto tiene la ERS dada por:

$$y[k] - 0,11y[k-1] + 0,18y[k] = 0,2u[k-2] \quad (5.101)$$

Suponga además que la excitación  $u[t]$  es una señal periódica, de período 4, tal que  $u[0] = 1$ ,  $u[1] = 0,75$ ,  $u[2] = 0,25$  y  $u[3] = 0$ . Determine el espectro de líneas de la respuesta estacionaria del sistema.

---

## Capítulo 6

# Análisis bajo excitaciones arbitrarias. La transformada de Fourier

### 6.1. La limitación de las series de Fourier

En el capítulo anterior se estudió la representación de señales en un intervalo de tiempo finito,  $[t_o, t_o + T]$ , a través de una combinación lineal de un número (posiblemente infinito) de sinusoides. Ese análisis es muy útil para establecer de una manera simple, el contenido frecuencial (espectro) de una señal periódica, identificando claramente la amplitud y fase de cada una de las armónicas que la forman, tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo. En este capítulo presentamos la extensión de esa idea para estudiar el contenido frecuencial de señales no periódicas (o de periodo infinito).

El resultado de esta extensión nos permitirá incorporar al análisis importantes señales tales como el impulso de Dirac, el escalón, la exponencial (real) decreciente y otras señales arbitrarias como muestra la Figura 6.1. Una clase adicional, experimentalmente muy importante, a incluir ahora está constituida por las señales conocidas en un intervalo de tiempo finito. Estas señales se pueden considerar como periódicas o no, dependiendo de lo que ocurra fuera del intervalo conocido. La transición hacia infinito del lapso durante el cual la señal es conocida es, justamente, el proceso que conduce a una herramienta que incorpora las funciones no periódicas al análisis frecuencial.

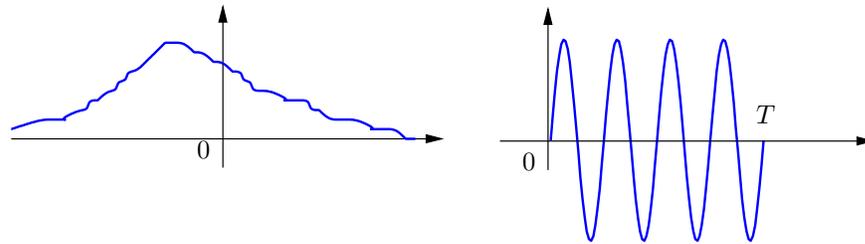


Figura 6.1: Señales arbitrarias

## 6.2. La transformada de Fourier de tiempo continuo

Si recordamos el Capítulo 5, la serie de Fourier es una representación de una función  $f(t)$  mediante una suma de sinusoides. Sin embargo, esta serie representa a la función sólo dentro del intervalo sobre el cual se calculó,  $[t_o, t_o + T)$ . Si la señal es periódica, y este intervalo corresponde a un número entero de períodos de la función, entonces la serie también la representa en el resto del eje real. Esta idea también se puede aplicar para obtener la serie de Fourier para una función no periódica, siempre que la restrinjamos a un intervalo  $[a, b]$  de longitud  $T$ . Como se mencionó antes, esta serie representa a la función **dentro** del intervalo, y fuera de éste sólo replica periódicamente la representación lograda en  $[a, b]$ . Esto puede apreciarse en la Figura 6.2.

La Figura 6.2, además, muestra que la longitud del intervalo  $T$  puede ampliarse, de manera de ir *refinando* la representación de la función a través de la serie. Pues bien, lo que interesa en este punto es ver qué pasa con la representación cuando el intervalo tiene longitud infinita. Es decir, queremos ver qué pasa con la serie de Fourier cuando se utiliza para representar funciones de período infinito o aperiódicas.

La serie de Fourier exponencial para una función periódica, de período  $T$ , tiene la forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_n t} \quad (6.1)$$

donde:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (6.2)$$

$$\omega_n = n\omega_0 = n \frac{2\pi}{T} \quad (6.3)$$

La ecuación (6.1) es la que describe la función  $f(t)$  en del intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  en términos de las exponenciales periódicas que representan las diferentes armóni-

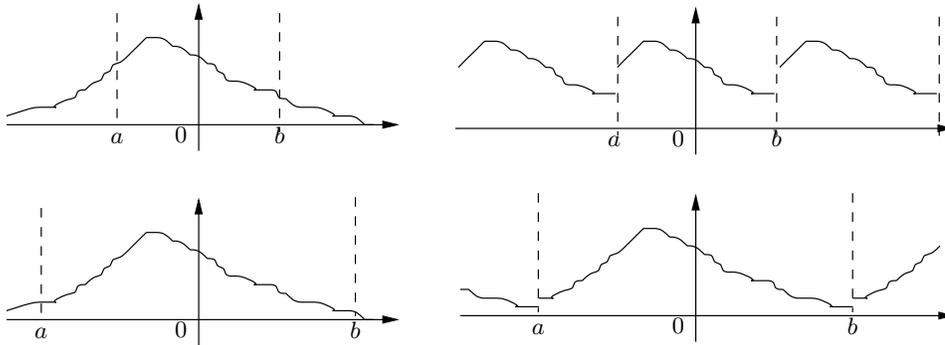


Figura 6.2: La función restringida a  $[a, b]$  y su reconstrucción mediante serie de Fourier.

cas  $\omega_n$ . Recordemos que la ecuación (6.3) establece que las armónicas no son nada más que sinusoides con frecuencias que corresponden a múltiplos de la frecuencia fundamental  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

Ahora bien, cada uno de los coeficientes definidos por la ecuación (6.2) define a  $C_n$  como función de la frecuencia  $\omega_n$ , es decir:

$$C_n = C_n(\omega_n) \quad (6.4)$$

Consideremos ahora la función:

$$F_T(\omega) = T \cdot C_n(\omega_n) \quad (6.5)$$

Con esto la serie de Fourier exponencial (6.1) de  $f(t)$  puede reescribirse como:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_n) e^{j\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_n) e^{j\omega_n t \omega_0} \quad (6.6)$$

pero si se observa que:

$$\omega_0 = \omega_n - \omega_{n-1} = \Delta\omega \quad (6.7)$$

la serie se reescribe como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega \quad (6.8)$$

Esta última expresión corresponde a una **suma de Riemann** [25], la que, llevada al límite cuando el período  $T$  crece hasta infinito, equivale a  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , con lo que la serie se transforma en una integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.9)$$

El significado de esta última expresión es conceptualmente muy importante, ya que nos indica que a medida que el período de una función periódica aumenta, la distancia  $\Delta\omega$  entre las líneas del espectro se reduce progresivamente, y en el límite, cuando la función tiene período infinito y  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ , la representación en frecuencia de  $f(t)$  en vez de ser discreta, pasa a ser una representación continua. Así, en lugar de quedar expresada como una suma de sinusoides de frecuencias múltiplos de una fundamental  $\omega_0$ , queda representada por una integral en que participa una función,  $F(j\omega)$  definida para  $\omega$  en toda la recta real.

Esta función  $F(\omega)$  es la **transformada de Fourier de  $f(t)$** , y su expresión se deduce utilizando (6.5), (6.4) y (6.2):

$$F_T(\omega) = T \cdot C_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.10)$$

la cual, cuando  $T \rightarrow \infty$  y considerando  $\omega \in \mathbb{R}$ , se convierte en:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.11)$$

Dada la forma de la integral (6.11), puede apreciarse que  $F(\omega)$  en general será una función en la variable real  $\omega$  pero con valores complejos, excepto en algunos casos especiales (ver Problema 6.4). Para enfatizar la naturaleza compleja de la transformada de Fourier  $F(\omega)$ , se prefiere denotarla por  $F(j\omega)$ . Con esta última observación podemos establecer finalmente la existencia del par transformada y transformada inversa de Fourier según:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.12)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (6.13)$$

Para la existencia de la transformada de Fourier es suficiente que la función  $f(t)$  sea **absolutamente integrable** [22] en toda la recta real  $(-\infty, \infty)$ , esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (6.14)$$

Sin embargo, si usamos *funciones generalizadas*, como el delta de Dirac en frecuencia, es posible obtener la transformada de Fourier de funciones que no cumplen este requisito, por ejemplo, el escalón y las funciones periódicas.

En algunos textos, el factor  $\frac{1}{2\pi}$  que acompaña a la integral en (6.13), es repartido equitativamente entre ambas integrales, como un factor  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  en la transformada directa y en la inversa. Preferiremos las expresiones (6.12) y (6.13), ya que esta última puede reescribirse de manera natural, reemplazando la frecuencia angular  $\omega$  en [rad/s] por la frecuencia  $f$  en [Hz], tal como se aprecia en la ecuación:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j2\pi f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(j2\pi f)e^{j2\pi ft} df$$

El mismo análisis desarrollado con la serie de Fourier exponencial cuando el período de la función tiende a infinito, puede repetirse de manera similar para la serie de Fourier trigonométrica (ver Problema 6.3).

**Ejemplo 6.1.** Para ilustrar los resultados obtenidos veamos un ejemplo. Consideremos la función  $y(t)$  definida en el intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ :

$$y(t) = \begin{cases} A & ; |t| \leq \tau/2 < T/2 \\ 0 & ; \tau/2 < |t| \leq T/2 \end{cases} \quad (6.15)$$

Esta señal corresponde a un pulso de alto  $A$  y ancho  $\tau$ , centrado en cero, que se repite en intervalos de longitud  $T$ .

Si suponemos que la señal  $y(t)$  es periódica en  $t \in (-\infty, \infty)$ , los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden obtener con el código MAPLE :

MAPLE

```
> assume(T>0,A>0);
> assume(0<tau,tau<T);
> y(t,T) := A * ( Heaviside(t+tau/2) - Heaviside(t-tau/2) );
> C(0,T) := 1/T*int(y(t,T),t=-T/2..T/2);
> C(n,T) := simplify(1/T*int(y(t,T)*exp(-I*2*Pi*n/T*t),
t=-T/2..T/2));
```

$$C_0 = \frac{A\tau}{T} \quad (6.16)$$

$$C_n = \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)}{\frac{\pi n\tau}{T}} \quad \forall n \neq 0 \quad (6.17)$$

Si suponemos ahora que  $y(t) = 0 \quad \forall |t| > \frac{T}{2}$ , su transformada de Fourier resulta dada por la expresión:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t} dt \quad (6.18)$$

$$= \frac{A}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = -\frac{A}{j\omega} (e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}) \quad (6.19)$$

$$= \frac{2A}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (6.20)$$

que usualmente se escribe como:

$$Y(j\omega) = A\tau \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \quad (6.21)$$

Si consideramos ahora la ecuación (6.17), podemos escribir:

$$TC_n = A\tau \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_n\tau}{2}\right)}{\frac{\omega_n\tau}{2}} \quad (6.22)$$

donde  $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ . De esta forma, observamos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} TC_n = Y(j\omega) \quad (6.23)$$

□□□

A pesar de su conexión, existen varias diferencias conceptuales entre la serie de Fourier y la transformada de Fourier. La primera diferencia importante es que el espectro de línea que aparece asociado a la serie de Fourier, se convierte, en el caso de la Transformada de Fourier, en un espectro definido para toda frecuencia. En forma compacta nos referiremos a este último como el **espectro continuo** de la señal, en contraposición al concepto de espectro de línea, asociado a las señales periódicas.

Una segunda diferencia es que la Serie de Fourier resulta descrita por un conjunto de valores complejos asociados a un conjunto *enumerable* de frecuencias (la frecuencia 0 y las frecuencias múltiplos de una frecuencia fundamental), esos valores complejos determinan la amplitud y fase de las componentes armónicas. Ese no es el caso de la Transformada de Fourier para señales de tiempo continuo, ya que la transformada  $F(j\omega)$  es **una medida de densidad** o más bien de intensidad relativa (no absoluta) de la participación de las distintas frecuencias en la representación de la función. Esta cantidad está definida para todo el eje de los reales, es decir, para todo  $\omega$ , así, la presencia de una frecuencia  $\omega_1$  en una señal  $f(t)$  está dada por:

$$Y_1 = \int_{\omega_1^-}^{\omega_1^+} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.24)$$

Esta integral es cero, a menos que  $F(j\omega)$  contenga un impulso  $\delta(\omega - \omega_1)$ . En el Apéndice C se demuestra que este impulso acusa la presencia de una senoide pura de frecuencia  $\omega_1$  en  $f(t)$ .

**Ejemplo 6.2.** Para apreciar desde un ángulo distinto las diferencias mencionadas, consideremos la analogía de una viga empotrada, cargada con arena fina y con tres fuerzas puntuales, como se muestra en la Figura 6.3.

La viga tiene un largo  $L$  y un ancho  $A$ . En la Figura 6.3 la coordenada  $x$  es análoga a la frecuencia angular  $\omega$ . En primer lugar se aprecian tres fuerzas no nulas, que actúan en puntos específicos de la viga. Ellas son análogas a los coeficientes de una serie de Fourier. En segundo lugar se observa la carga de arena, con una distribución  $f(x)$  [N/m]. Esta distribución captura la irregularidad de la distribución de la arena a lo largo y a lo ancho de la viga. Se puede deducir que si  $f(x)$  es finita, entonces, esta carga de arena ejerce una **fuerza**

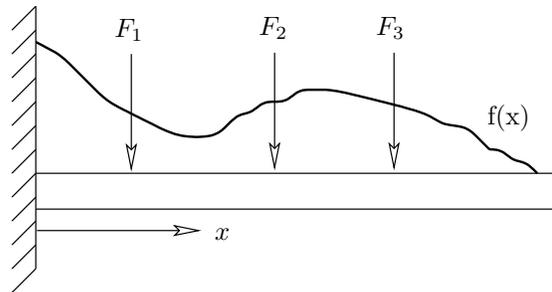


Figura 6.3: Viga cargada con arena

**cero** en cualquier punto de la viga. No obstante, es obvio que si la densidad de la arena es  $\rho(x)$ , entonces la fuerza total ejercida por la carga de arena es:

$$\int_0^L f(x)\rho(x)A dx \quad (6.25)$$

La densidad de carga por metro lineal  $f(x)$  es entonces análoga a la transformada de Fourier  $F(j\omega)$ , en el sentido que esta última corresponde a una densidad espectral por ancho de banda unitario.

□□□

La transformación de Fourier posee una serie de propiedades que resultan de utilidad para el cálculo de transformadas de funciones complejas, a partir de las transformadas de señales elementales. Esa utilidad también se extiende a la obtención de transformadas inversas, sin tener que resolver la integral (6.13), y facilita el análisis de sistemas lineales, como se discute en la sección siguiente. Estas propiedades se detallan en el Apéndice C.

### 6.2.1. Parseval y la energía de las señales en tiempo continuo

Los resultados deducidos por Parseval permiten también relacionar directamente las características de una señal cualquiera con su transformada de Fourier. Los detalles matemáticos pueden ser examinados en el Apéndice C.

Si la señal real  $f(t)$  tiene energía finita (ver subsección §2.2.7) en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , y su transformada de Fourier es  $F(j\omega)$  entonces, aplicando el Teorema C.1, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (6.26)$$

Observando el lado derecho de la ecuación, podemos calcular la fracción de la energía total que es aportada por cada intervalo del espectro  $(\omega_k, \omega_{k+1})$ . Para apreciar esto consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.3.** Sea la señal  $f(t) = e^{-at}\mu(t)$ , donde  $a \in \mathbb{R}^+$ . Entonces, su transformada de Fourier es

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (6.27)$$

y su energía total es

$$W = \int_0^\infty e^{-2at} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2a} \quad (6.28)$$

Usando Parseval podemos demostrar que la mitad de esa energía es aportada por el espectro en el intervalo de frecuencia  $(-a, a)$ , como se ve en

$$W_{(-a,a)} = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{\pi a} \arctan \frac{\omega}{a} \Big|_0^a = \frac{1}{4a} \quad (6.29)$$

Note que una exponencial más rápida tiene menos energía que una exponencial más lenta (a igualdad de valor inicial). Esta observación refuerza la idea de exponencial dominante.

### 6.2.2. Aplicación a sistemas lineales

Nuestro interés en el estudio de la transformación de Fourier y sus propiedades, se origina en su utilidad para analizar las características de los sistemas lineales. La definición hecha en la sección precedente de la transformada de Fourier resulta como continuación natural de las series de Fourier, de esta forma la transformada constituye la prolongación natural del estudio de propiedades del sistema como la respuesta en frecuencia, ancho de banda y filtraje, entre otras.

Una limitación fundamental de la aplicación de la Transformada de Fourier a los sistemas lineales, es que sólo podemos considerar sistemas que tengan frecuencias naturales con parte real negativa o que estén en el eje imaginario, pero que sean simples, es decir, de multiplicidad 1. De otra forma, existirían modos naturales crecientes, para los cuales la Transformada de Fourier no existe.

Para apreciar la utilidad del análisis mediante transformada de Fourier, consideremos un sistema lineal de tiempo continuo, definido por su ecuación diferencial (EDS), tal como se vio en el Capítulo 3:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (6.30)$$

En la ecuación (6.30),  $u(t)$  e  $y(t)$  representan la señal de entrada y de salida del sistema, respectivamente. Note que por generalidad hemos reemplazado  $n-1$  por  $m$  en el lado derecho, aunque seguiremos suponiendo que el sistema es propio, es decir,  $m \leq n$ .

El Lema 3.1 en la página 52 establece que la respuesta de un sistema a una señal de entrada arbitraria  $u(t)$ , puede obtenerse mediante la convolución de ésta con la respuesta  $h(t)$  del sistema a un impulso unitario:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6.31)$$

Si aplicamos transformación de Fourier a esta relación, utilizando el resultado (C.49) en la página 395, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{u(t) * h(t)\} \quad (6.32)$$

$$Y(j\omega) = U(j\omega)\mathcal{F}\{h(t)\} \quad (6.33)$$

entonces la salida del sistema lineal puede ser expresada como

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \quad (6.34)$$

La función  $H(j\omega)$  en la ecuación (6.34) es exactamente la transformada de Fourier de la respuesta  $h(t)$  del sistema (6.30) a un impulso unitario en su entrada y se denomina **función de transferencia de Fourier, o transferencia de Fourier**.

Si  $u(t)$  e  $y(t)$  cumplen con la condición establecida en el Lema C.6 en la página 393, entonces podemos aplicar la propiedad para la transformada de Fourier de la derivada de una función diferenciable, ecuación (C.33) en la página 393, utilizando:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\} = (j\omega)^n F(j\omega)$$

De esta forma, si se aplica transformación de Fourier a ambos lados de la EDS (6.30) se obtiene:

$$(j\omega)^n Y(j\omega) + \dots + a_0 Y(j\omega) = b_m (j\omega)^m U(j\omega) + \dots + b_0 U(j\omega) \quad (6.35)$$

luego:

$$Y(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{(j\omega)^n + \dots + a_0} U(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} U(j\omega) \quad (6.36)$$

donde  $A(j\omega)$  y  $B(j\omega)$  son polinomios en  $j\omega$ .

Así, en principio (ver análisis más abajo), podemos definir la función de transferencia como:

$$H(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \quad (6.37)$$

La función  $H(j\omega)$  que aparece en la expresión para la salida  $Y(j\omega)$  caracteriza al sistema mismo, ya que depende sólo de los coeficientes de la EDS (6.30), y no de la señal de entrada  $U(j\omega)$ .

En la mayoría de los casos,  $H(j\omega)$  es una función racional en  $j\omega$  y es descrita por (6.37). En este caso, la función de transferencia coincide con la ganancia al modo forzante  $e^{j\omega}$ . Sin embargo, existen dos situaciones en que ello no es así:

- El sistema tiene frecuencias naturales simples sobre el eje imaginario. Lo que ocurre en este caso, es que  $y(t)$  contiene modos naturales que no decaen y, en consecuencia, no cumple la propiedad del Lema C.6 en la página 393. En este caso,  $H(j\omega)$  contiene deltas de Dirac y **no es correctamente descrita** por (6.37). Esto se analizará en forma más precisa en la subsección 6.2.5
- La entrada  $u(t)$  se aplica en forma retardada al sistema. En esos casos, si el retardo es  $\tau$ , la transformada de Fourier  $U(j\omega)$  debe ser reemplazada por  $U(j\omega)e^{-j\omega\tau}$  (vea las propiedades en la Tabla C.1) y la transferencia de Fourier resulta:

$$H(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_0}{(j\omega)^n + \dots + a_0} e^{-j\omega\tau} \quad (6.38)$$

Dado que la EDS tiene sólo coeficientes reales, la transferencia de Fourier  $H(j\omega)$  cumple con  $H(j\omega) = (H(-j\omega))^*$ , lo que implica que:

$$\text{su magnitud es una función par en } \omega \Rightarrow |H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \quad (6.39)$$

$$\text{su fase es una función impar en } \omega \Rightarrow \angle H(j\omega) = -\angle H(-j\omega) \quad (6.40)$$

Para ilustrar la derivación de la función de transferencia para un sistema físico, examinemos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.4.** Consideremos la red eléctrica de la Figura 6.4. Esta red es un sistema con entrada,  $v_f(t)$ , y con salida  $v_c(t)$ .

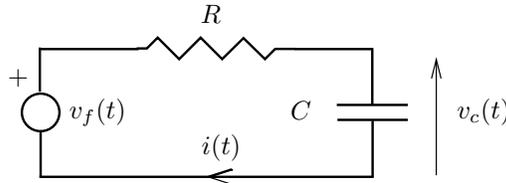


Figura 6.4: Circuito RC como sistema de primer orden.

Usando leyes de Kirchoff y la ecuación para la corriente por el condensador, podemos llegar a una EDS:

$$v_R(t) + v_C(t) = v_f(t) \quad (6.41)$$

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_f(t) \quad (6.42)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{1}{RC} v_f(t) di(t) \quad (6.43)$$

En estas ecuaciones se puede renombrar  $v_c(t) = y(t)$ ,  $v_f(t) = u(t)$ ,  $\frac{1}{RC} = \alpha$ , con lo que la EDS resulta:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \alpha u(t) \quad ; \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (6.44)$$

A continuación calculamos la salida del sistema para diferentes funciones de entrada  $u(t)$ .

Si aplicamos transformación de Fourier a (6.44) tenemos:

```
MAPLE
># CÓDIGO RAÍZ PARA EL EJEMPLO
>with(inttrans) : assume(alpha>0) :
>eds:= diff(y(t),t)+alpha*y(t)=alpha*u(t) ;
>eq1:=fourier(u(t),t,w)=U(jw) :
>eq2:=fourier(y(t),t,w)=Y(jw) :
>subs({eq1,eq2},fourier(eds,t,w)) ;
>Y(jw):=solve(%,Y(jw));
># valor de Y(jw) a usar en el resto del ejemplo
```

$$j\omega Y(j\omega) + \alpha Y(j\omega) = \alpha U(j\omega) \quad (6.45)$$

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} U(j\omega) \quad (6.46)$$

Con esta expresión se puede obtener la salida del sistema para diferentes casos, con ayuda de las transformadas en la Tabla C.2 en la página 399.

### Entrada impulso unitario

En primer lugar, podemos calcular casi directamente la respuesta a impulso del sistema, ya que si  $u(t) = \delta(t)$ , entonces  $U(j\omega) = 1$  y, por tanto:

```
MAPLE
>U(jw)= fourier(Dirac(t),t,w) :
>H(jw)=subs(%,Y(jw)); # Y(jw) viene del código raíz
```

$$U(j\omega) = 1 \quad (6.47)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \quad (6.48)$$

La respuesta a impulso,  $h(t)$ , se obtiene entonces aplicando transformación de Fourier inversa

```

MAPLE
> h(t) = invfourier(H(jw),w,t);
># H(jw) viene del código precedente

```

$$h(t) = \alpha \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega + \alpha} \right\} \quad (6.49)$$

$$= \alpha e^{-\alpha t} \mu(t) \quad (6.50)$$

### Entrada escalón unitario

```

MAPLE
>U(jw)= fourier(Heaviside(t),t,w) :
>Y(jw)=subs(%,Y(jw)); # Y(jw) viene del código raíz

```

$$U(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (6.51)$$

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \quad (6.52)$$

Luego se desarrolla el producto y se buscan términos que correspondan a transformadas conocidas, ya sea agrupando de manera conveniente o separando en fracciones parciales (ver Apéndice D):

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \pi\delta(\omega) + \frac{\alpha}{j\omega(j\omega + \alpha)} \quad (6.53)$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{(j\omega + \alpha)} \quad (6.54)$$

Para obtener el resultado precedente se usa la propiedad del impulso que indica que  $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$ , cualquiera sea la variable  $x$ , siempre que  $f(x)$  sea continua en  $x = 0$ . De esta forma se puede calcular la transformación inversa de Fourier:

```

MAPLE
> y(t) = invfourier(Y(jw),w,t);
># Y(jw) viene del código precedente

```

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right\} - \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(j\omega + \alpha)} \right\} \quad (6.55)$$

$$= \mu(t) - e^{-\alpha t} \mu(t) \quad (6.56)$$

### Entrada exponencial periódica

Finalmente, examinemos la respuesta a una exponencial periódica  $u(t) = e^{j\omega_o t}$ . Su transformada de Fourier de  $u(t)$  es:

$$U(j\omega) = \mathcal{F} \{ e^{j\omega_o t} \} = 2\pi\delta(\omega - \omega_o) \quad (6.57)$$

Con lo que la salida será:

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} 2\pi\delta(\omega - \omega_o) = \frac{\alpha}{j\omega_o + \alpha} 2\pi\delta(\omega - \omega_o) \quad (6.58)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\alpha}{j\omega_o + \alpha} e^{j\omega_o t} = A(\omega_o) e^{j\omega_o t + j\phi(\omega_o)} \quad (6.59)$$

en que:

$$A(\omega_o) = \left| \frac{\alpha}{j\omega_o + \alpha} \right| = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_o^2 + \alpha^2}} \quad (6.60)$$

$$\phi(\omega_o) = -\arctan \frac{\omega_o}{\alpha} \quad (6.61)$$

Lo anterior muestra que, al pasar a través del sistema, la exponencial periódica experimenta un cambio en magnitud (en un factor  $A(\omega_o)$ ) y en fase (una adición igual a  $\phi(\omega_o)$ ).

□□□

En la discusión precedente se ha supuesto implícitamente que  $|H(j\omega)|$  es finita  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ . Cuando ello no ocurre, se presenta una singularidad en el análisis precedente, lo que es discutido en detalle en la subsección §6.2.5.

### 6.2.3. La transferencia de Fourier y la respuesta en frecuencia

La última parte del Ejemplo 6.4, en la sección anterior, pone de manifiesto la utilidad de conocer la transformada de Fourier de la respuesta a impulso de un sistema,  $H(j\omega)$ . Observe que:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \quad (6.62)$$

pero si  $u(t) = e^{j\omega_o t}$ , entonces

$$Y(j\omega) = H(j\omega)2\pi\delta(\omega - \omega_o) \quad (6.63)$$

$$= H(j\omega_o)2\pi\delta(\omega - \omega_o) \quad (6.64)$$

por tanto, la salida es:

$$y(t) = H(j\omega_o)e^{j\omega_o t} \quad (6.65)$$

Así tenemos que  $H(j\omega_o)$  representa la **ganancia al modo forzante**  $e^{j\omega_o t}$ , definida en (3.21). Es más, dada la relación de las exponenciales periódicas con las señales sinusoidales podemos establecer el siguiente lema.

**Lema 6.1.** *Considere un sistema estable de tiempo continuo con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , donde la respuesta del sistema a la entrada sinusoidal  $u(t) = \cos(\omega_o t)$ ,  $\forall t$ , es:*

$$y(t) = A(\omega_o) \cos(\omega_o t + \phi(\omega_o)) \quad (6.66)$$

Entonces

$$A(\omega_o) = |H(j\omega_o)| \quad (6.67)$$

$$\phi(\omega_o) = \angle H(j\omega_o) \quad (6.68)$$

donde  $H(j\omega)$  es la transformada de Fourier de la respuesta del sistema a impulso unitario,  $h(t)$ .

#### **Demostración**

La respuesta a la excitación  $\cos(\omega_o t)$ , puede ser calculada como la combinación de las respuestas a un par de exponenciales periódicas. A partir de:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \quad (6.69)$$

tenemos que, si  $u(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t})$ , entonces:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)\pi(\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)) \quad (6.70)$$

$$= \pi H(j\omega_o)\delta(\omega - \omega_o) + \pi H(-j\omega_o)\delta(\omega + \omega_o) \quad (6.71)$$

y, por lo tanto, la salida es:

$$y(t) = \frac{1}{2}H(j\omega_o)e^{j\omega_o t} + \frac{1}{2}H(-j\omega_o)e^{-j\omega_o t} \quad (6.72)$$

$$= \frac{1}{2}|H(j\omega_o)|e^{j\omega_o t + j\angle H(j\omega_o)} + \frac{1}{2}|H(j\omega_o)|e^{-j\omega_o t - j\angle H(j\omega_o)} \quad (6.73)$$

$$= |H(j\omega_o)| \cos(\omega_o t + \angle H(j\omega_o)) \quad (6.74)$$

□□□

**Ejemplo 6.5.** *Para el mismo sistema del Ejemplo 6.4, descrito por la ecuación diferencial:*

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \alpha u(t) \quad ; \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (6.75)$$

determinemos la respuesta cuando la señal de entrada es  $u(t) = \cos(t)$ .



Tal como se hizo antes, se aplica transformación de Fourier sobre la EDS, lo que permite obtener la transformada de Fourier de la salida:

$$U(j\omega) = \pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)) \quad (6.76)$$

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \pi(\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)) \quad (6.77)$$

donde, simplificando como antes, se obtiene la transformada inversa:

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{-j + \alpha} \pi\delta(\omega + 1) + \frac{\alpha}{j + \alpha} \pi\delta(\omega - 1) \quad (6.78)$$

$$= \frac{\alpha(\alpha + j)}{\alpha^2 + 1} \pi\delta(\omega + 1) + \frac{\alpha(\alpha - j)}{\alpha^2 + 1} \pi\delta(\omega - 1) \quad (6.79)$$

$$= Ae^{j\phi} \pi\delta(\omega + 1) + Ae^{-j\phi} \pi\delta(\omega - 1) \quad (6.80)$$

en que:

$$A = \left| \frac{\alpha(\alpha + j)}{\alpha^2 + 1} \right| = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \quad (6.81)$$

$$\phi = \angle \left( \frac{\alpha(\alpha + j)}{\alpha^2 + 1} \right) = \arctan \frac{1}{\alpha} \quad (6.82)$$

por lo tanto, la salida es:

$$y(t) = A \cos(t - \phi) \quad (6.83)$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \cos \left( t - \arctan \frac{1}{\alpha} \right) \quad (6.84)$$

Se sugiere al lector verificar que, cuando la entrada es una senoide de frecuencia arbitraria,  $\cos(\omega_o t)$ , entonces la respuesta del sistema es:

$$y(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_o^2}} \cos \left( t - \arctan \frac{\omega_o}{\alpha} \right) \quad (6.85)$$

En la Figura 6.5 se muestra la magnitud  $A(\omega_o)$  y ángulo de desfase  $\phi(\omega_o)$  de la salida cuando  $\alpha = 10$ .

□□□

El ejemplo anterior pone en evidencia que la salida que se obtiene a través de la transformada de Fourier corresponde a la parte estacionaria de la salida del sistema, donde no aparecen modos naturales. Esto es coherente, ya que podemos pensar una señal no causal como una que comenzó a actuar sobre el sistema en  $t = -\infty$ , y, por ende, el efecto de las condiciones iniciales ha desaparecido. Cuando la excitación es causal, es decir,  $u(t) = 0 \forall t < 0$ , entonces la respuesta debe contener explícitamente los modos naturales del sistema, mientras  $H(j\omega)$  existe. Esto es ilustrado en el siguiente ejemplo.

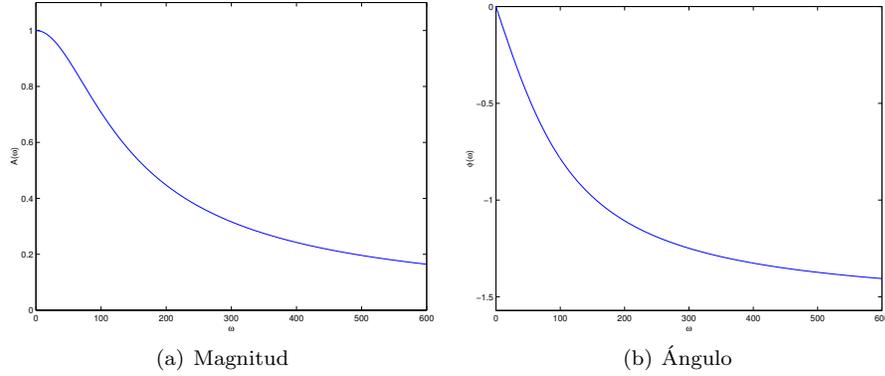


Figura 6.5: Magnitud y ángulo de  $H(j\omega)$  en el Ejemplo 6.5 ( $\alpha = 100$ ).

**Ejemplo 6.6.** Consideremos el mismo sistema del Ejemplo 6.4, con entrada  $u(t) = \cos(t)\mu(t)$ . En este caso, la transformada de Fourier de la entrada y de la salida al sistema son:

$$U(j\omega) = \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) + \frac{j\omega}{-\omega^2 + 1} \quad (6.86)$$

$$Y(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} \left( \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) + \frac{j\omega}{-\omega^2 + 1} \right) \quad (6.87)$$

La salida  $Y(j\omega)$  puede simplificarse con las mismas consideraciones anteriores, es decir, evaluando los coeficientes que acompañan a los deltas de Dirac en la frecuencia de interés, separando en fracciones parciales y agrupando convenientemente:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{\alpha}{j + \alpha} \frac{\pi}{2} \delta(\omega - 1) + \frac{\alpha}{-j + \alpha} \frac{\pi}{2} \delta(\omega + 1) + \frac{\alpha}{(j\omega + \alpha)(-\omega^2 + 1)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - j)}{\alpha^2 + 1} \frac{\pi}{2} \delta(\omega - 1) + \frac{\alpha(\alpha + j)}{-j + \alpha} \frac{\pi}{2} \delta(\omega + 1) \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha j\omega + 1)}{(\alpha^2 + 1)(-\omega^2 + 1)} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left( \frac{1}{j\omega + \alpha} \right) \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\pi}{2} (\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \frac{j\pi}{2} (\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)) \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)(-\omega^2 + 1)} + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 1)(-\omega^2 + 1)} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left( \frac{1}{j\omega + \alpha} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, con ayuda de la Tabla C.2 en la página 399, tenemos que la salida

es:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \left[ \alpha \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{2} (\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)) + \frac{j\omega}{(-\omega^2 + 1)} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{j\pi}{2} (\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)) + \frac{1}{(-\omega^2 + 1)} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega + \alpha} \right\} \right] \\
 y(t) &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} [\alpha \cos(t)\mu(t) + \text{sen}(t)\mu(t) - \alpha e^{-\alpha t}\mu(t)]
 \end{aligned}$$

En MAPLE los cálculos se pueden hacer mucho más rápido, y, dado que en la transformación inversa aparecen exponenciales complejas, se utiliza la función *evalc*, que permite expandir éstas mediante la relación de Euler,<sup>1</sup>:

```

MAPLE
>U(jw) = fourier(Heaviside(t)*cos(t),t,w);
>subs(%,Y(jw)); #Y(jw) viene del código raíz
>y(t) = simplify( evalc( invfourier(%,w,t) ) );

```

□□□

#### 6.2.4. Filtraje

Una generalización de los resultados precedentes se puede extraer examinando la naturaleza de la función de transferencia y la forma en que evolucionan su magnitud y su fase con la frecuencia  $\omega$ . En estas características, que definen la **respuesta en frecuencia** del sistema, se capturan efectos tales como su velocidad y su capacidad de filtrar y discriminar señales de diferentes contenidos espectral.

Es común que para clasificar las funciones de transferencia de sistemas **estables**, se use su característica filtrante. Ésta queda determinada por  $|H(j\omega)|$ . Para ejemplificar esta descripción consideremos primero sistemas que discriminan entre frecuencias altas y bajas.

En la Figura 6.6 se observan dos conductas distintas. El sistema descrito por la característica del lado izquierdo, deja pasar las bajas frecuencias y atenúa las altas frecuencias. El sistema caracterizado por la función de transferencia del lado derecho hace lo contrario: deja pasar las altas frecuencias y bloquea las bajas frecuencias. Una forma de apreciar estos comportamientos distintos es aplicar a ambos sistemas una misma secuencia de escalones temporales. La transición brusca de un nivel a otro requiere la presencia de muy altas frecuencias, en estricto sentido, de frecuencia infinita. Por otro lado, una vez que se ha llegado a un nuevo nivel, predominan las frecuencias bajas, en rigor, la frecuencia cero.

<sup>1</sup> $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \text{sen}(\theta)$

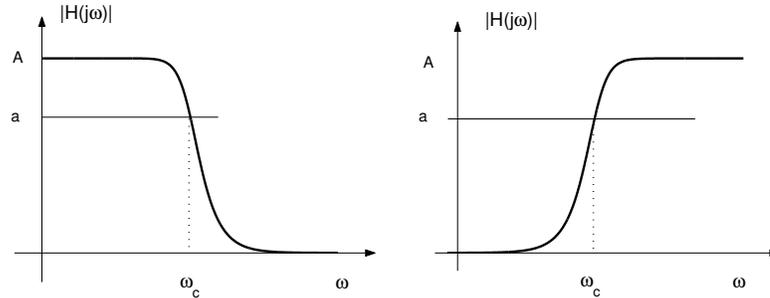


Figura 6.6: Sistemas pasa bajos (izquierda) y pasa altos (derecha)

Los escalones también tienen energía a frecuencias intermedias tal como lo revela la transformada de Fourier del escalón unitario, estas frecuencias intermedias se originan en el **quiebre** entre una pendiente infinita (inicio del escalón) y una pendiente cero (resto del escalón).

**Ejemplo 6.7.** Considere los siguientes sistemas:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^2} \quad \text{Pasa bajos} \quad (6.88)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega + 1)^2} \quad \text{Pasa altos} \quad (6.89)$$

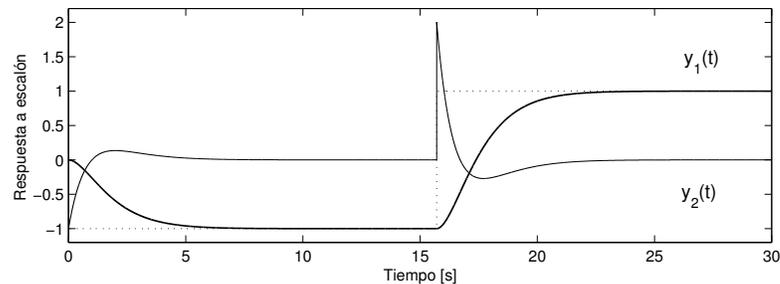


Figura 6.7: Respuesta a escalones de un sistema pasa bajos,  $y_1(t)$ , y de un sistema pasa altos,  $y_2(t)$ .

Si a ambos sistemas se aplica una secuencia de escalones, se obtiene el resultado de la Figura 6.7. En esta figura, se observa que la respuesta del filtro pasa bajos,  $y_1(t)$ , no puede seguir las transiciones de los escalones, pero alcanza el nivel constante de la entrada sin error (dado que la ganancia a continua es

uno). Por su parte, la respuesta del filtro pasa altos,  $y_2(t)$ , es capaz de replicar instantáneamente los cambios bruscos, sin embargo presenta respuesta nula una vez que el escalón alcanza un nivel constante (dado que la ganancia a continua es cero).

□□□

En sistemas físicamente realizables, la transición que muestra  $|H(j\omega)|$  desde una zona de paso, a una zona de rechazo (y viceversa) es siempre gradual. La forma usual de cuantificar ese límite es usar la idea de **frecuencia de corte**. Esta definición, aunque arbitraria, es universalmente aceptada. En la Figura 6.6,  $\omega_c$  es la frecuencia de corte si  $a = A/\sqrt{2}$ .

Aparte del comportamiento pasa bajos y pasa altos podemos reconocer las características **pasa banda** y **elimina banda**. Las características generales de ambos sistemas aparecen reflejadas en los gráficos de la Figura 6.8.

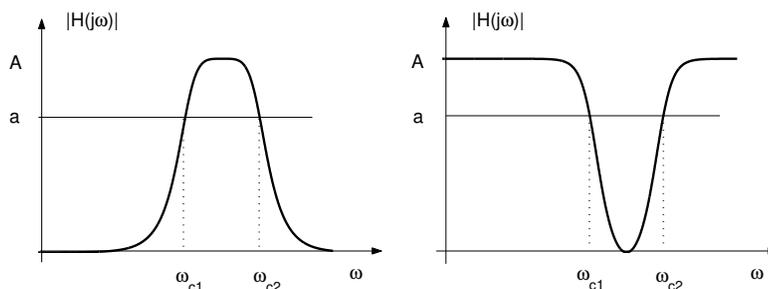


Figura 6.8: Sistemas pasa banda y elimina banda.

El sistema descrito por la característica del lado izquierdo en la Figura 6.8 bloquea las frecuencias bajas y las frecuencias altas, en cambio, deja pasar un rango de frecuencias intermedias. Por su parte, el sistema descrito por la característica del lado derecho en la Figura 6.8, bloquea un rango intermedio de frecuencias y deja pasar tanto las altas como las bajas frecuencias. El comportamiento de estos sistemas puede ser estudiado también usando una secuencia de escalones. El ejemplo siguiente ilustra esas diferentes conductas.

**Ejemplo 6.8.** Considere los siguientes sistemas:

$$H_3(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega + 1)^2} \quad \text{Pasa banda} \quad (6.90)$$

$$H_4(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 1}{(j\omega + 1)^2} \quad \text{Elimina banda} \quad (6.91)$$

Cuando a ambos sistemas se aplica una secuencia de escalones, se obtiene el resultado de la Figura 6.9. De esa figura se observa que la respuesta del filtro pasa banda,  $y_3(t)$ , no puede seguir las transiciones de los escalones (tiene

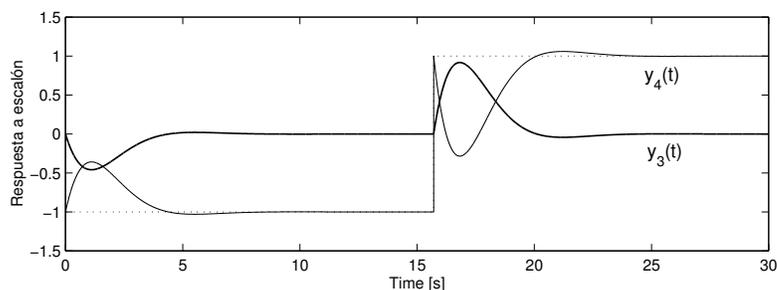


Figura 6.9: Respuesta a escalones de un sistema pasa banda,  $y_3(t)$ , y un sistema elimina banda,  $y_4(t)$ .

ganancia cero a frecuencia infinita), y presenta respuesta nula una vez que el escalón alcanza niveles constantes (tiene ganancia cero a continua). Por su parte, la respuesta del filtro elimina banda,  $y_4(t)$ , es capaz de replicar instantáneamente los cambios bruscos (tiene ganancia unitaria a frecuencia infinita), y de alcanzar, sin error, el valor constante de la entrada (tiene ganancia unitaria a continua). Sin embargo,  $y_4(t)$  presenta una anomalía justo después de la transición brusca. Esta anomalía se debe a que el sistema bloquea un rango intermedio de frecuencias.

□□□

En el caso de los sistemas pasa banda y sistemas elimina banda, existen dos frecuencias de corte,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  (vea Figura 6.8), para  $a = A/\sqrt{2}$ .

Cualquiera que sea la naturaleza filtrante del sistema, las frecuencias de corte son las que delimitan la(s) banda(s) de paso y la(s) banda(s) de rechazo.

**Nota 6.1.** El diseño de filtros, es decir, de sistemas con respuesta en frecuencia pre-especificada, es un tema muy interesante y ha dado lugar a una serie de técnicas tales como los filtros Butterworth y Chebyshev [29], que permiten sintetizar un sistema (función de transferencia) en base a especificaciones tales como ancho de banda y frecuencia de corte. Sin embargo, es importante destacar que, dada la respuesta en frecuencia deseada, no siempre es posible encontrar un sistema físicamente **realizable** que satisfaga los requerimientos. Un sistema realizable debe ser causal, es decir, su respuesta a un impulso  $\delta(t)$  debe satisfacer:

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad (6.92)$$

En el dominio de la frecuencia esta limitación se expresa en el teorema de Paley-Wiener [22, 15] que establece como condición necesaria y suficiente que la respuesta en frecuencia del sistema satisfaga:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |H(j\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega > -\infty \quad (6.93)$$

Esto se traduce en que la magnitud de la respuesta en frecuencia puede ser cero sólo en un número **finito** de frecuencias, y no en intervalos del espectro. Para apreciar mejor estas limitaciones sugerimos al lector analizar el Problema 6.6 sobre el diseño de un filtro ideal.

En resumen, no existen sistemas causales que filtren perfectamente frecuencias sobre una banda no nula del espectro.

### 6.2.5. Caso singular en la función de transferencia.

En primer lugar, debemos enfatizar que la función de transferencia de un sistema lineal de tiempo continuo está definida sólo si su respuesta a impulso tiene transformada de Fourier. Esto es equivalente a exigir que el sistema tenga sólo frecuencias naturales en el SPI **cerrado**, con la condición adicional que si algunas de esas frecuencias naturales están sobre el eje imaginario, ellas sean simples.

Es importante recordar además que el Lema 6.1 en la página 128, que iguala  $H(j\omega)$  con la respuesta en frecuencia, está formulado para **sistemas estables**. No podemos extender este resultado a sistemas que tienen frecuencias naturales en el eje imaginario, aunque sean no repetidas. Veamos a través de un ejemplo, los resultados erróneos que surgen si no somos cuidadosos.

**Ejemplo 6.9.** *Un sistema con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , tiene una EDS:*

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t) \quad (6.94)$$

Observamos que el sistema tiene sólo una frecuencia natural, y ella está ubicada en  $\lambda = 0$ , es decir, se trata de una frecuencia natural no repetida en el eje imaginario.

La respuesta en frecuencia,  $K(\omega)$  está dada por la ganancia al modo forzante  $e^{j\omega t}$ , y ella resulta de aplicar (3.21) a este caso particular:

$$K(\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{1}{j\omega} \quad (6.95)$$

Suponga que la entrada al sistema es  $u(t) = e^{-at}\mu(t)$ ,  $a > 0$ , es decir, la excitación es distinta de cero sólo para  $t \geq 0$ . Si luego, erróneamente, hacemos  $H(j\omega) = K(\omega)$ , entonces  $y(t)$  se puede calcular a partir de:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)U(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega(j\omega + a)}\right\} \quad (6.96)$$

Así se obtiene:

```
MAPLE
>with(inttrans):
>assume(a>0);simplify(evalc((invfourier(1/(-w^2+I*a*w),w,t)));
```

$$y(t) = \frac{\text{signo}(t) - 2e^{-at}\mu(t)}{2a} \quad (6.97)$$

Esta respuesta es obviamente incorrecta, ya que dice que el sistema es **no causal**, porque la función  $\text{signo}(t)$  tiene valor  $-1$ ,  $\forall t < 0$ , es decir, el sistema responde antes que se aplique la excitación. Para obtener la respuesta correcta, recordemos que la función de transferencia  $H(j\omega)$  es la transformada de Fourier de la respuesta del sistema a un impulso unitario. En este ejemplo, esa respuesta es igual a un escalón unitario, es decir,  $h(t) = \mu(t)$ . Usando la Tabla C.2 se llega a:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (6.98)$$

Entonces:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)U(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega(j\omega+a)} + \frac{\pi}{a}\delta(\omega)\right\} = \frac{1 - e^{-at}\mu(t)}{a} \quad (6.99)$$

que es la respuesta correcta.

□□□

El ejemplo precedente ilustra y explica el problema. Cuando el sistema tiene frecuencias naturales en el eje imaginario, los modos naturales asociados no decaen y, por lo tanto, la transformada de Fourier de cada uno de ellos sólo existe en el límite. Esta condición es acusada por la presencia de deltas de Dirac en  $\omega$ . Así, en estos casos, la función de transferencia es una función racional, más uno o varios deltas de Dirac en  $\omega$ .

La última pregunta que debemos responder es por qué la determinación de  $H(j\omega)$  usando (6.35) no da el resultado correcto. La respuesta está en que se ha utilizado implícitamente el Lema C.6 en la página 393, que al ser aplicado dice que:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = j\omega Y(j\omega) \quad (6.100)$$

Sin embargo, debido a que el sistema de este ejemplo tiene una frecuencia natural en el eje imaginario (en el origen, para ser más exactos), ocurre que el producto  $j\omega Y(j\omega)$  incluye un producto de la forma  $j\omega\delta(\omega)$ , el que queda indefinido para  $\omega = 0$ . Consideremos un ejemplo adicional.

**Ejemplo 6.10.** Sea un sistema con la EDS:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t) = 3u(t) \quad (6.101)$$

Al aplicar transformación de Fourier se obtiene:

$$((j\omega)^2 + 4)Y(j\omega) = 3U(j\omega) \quad (6.102)$$

Observamos que  $y(t)$  contiene dos modos naturales complejos, los que combinados generan una señal sinusoidal de frecuencia 2 [rad/s]. Esto implica que

$Y(j\omega)$  debe incluir dos impulsos:  $\delta(\omega - 2)$  y  $\delta(\omega + 2)$ . Entonces el producto  $((j\omega)^2 + 4)Y(j\omega)$  queda indeterminado para  $\omega = \pm 2$ . El ignorar esta situación llevaría a la conclusión errónea a que la función de transferencia sería:

$$\frac{3}{(j\omega)^2 + 4} \quad (6.103)$$

Sin embargo, la respuesta del sistema a  $u(t) = \delta(t)$  está dada por:

$$h(t) = \frac{3}{2} \text{sen}(2t)\mu(t) \quad (6.104)$$

Así, el valor correcto de  $H(j\omega)$  es:

$$H(j\omega) = \frac{3}{(j\omega)^2 + 4} + j\frac{3}{2}(\delta(\omega + 2) - \delta(\omega - 2)) \quad (6.105)$$

□□□

La conclusión fundamental de esta subsección es que, para evitar los problemas analizados, debe usarse la definición de la transferencia de Fourier que señala que es igual a la transformada de Fourier de la respuesta del sistema a un impulso en la entrada.

### 6.3. La transformada de Fourier de tiempo discreto

Consideremos en esta sección el caso de las funciones no periódicas, definidas en tiempo discreto, y cómo se pueden hacer un desarrollo análogo para éstas que permita representar de alguna forma su contenido en frecuencia.

En primer lugar, recordemos las expresiones correspondientes a la representación en serie de Fourier de una función periódica definida en tiempo discreto, tal como se vio en el Capítulo 5. Sea  $y[t]$  una señal periódica de período  $N$ , entonces se puede representar mediante una serie de Fourier definida en tiempo discreto, o transformada de Fourier discreta, que no es más que una combinación lineal finita de  $N$  exponenciales complejas:

$$y[t] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j\theta_o n t}; \quad \text{donde } \theta_o = \frac{2\pi}{N} \quad (6.106)$$

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_o n t} \quad (6.107)$$

Consideremos ahora el caso en que el período  $N$  de la señal crece hasta infinito, es decir, la señal en estudio ya no es periódica. En este caso se puede hacer el siguiente desarrollo, totalmente análogo al caso de la transformación de Fourier para funciones de tiempo continuo, en la sección 6.2.

Sea  $\theta_n = n\theta_o$  y definamos la función:

$$Y[e^{j\theta_n}] = N \cdot C_n \quad (6.108)$$

Entonces, reemplazando en la representación en serie anterior, se obtiene:

$$y[t] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y[e^{j\theta_n}] e^{j\theta_n t} \quad (6.109)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} Y[e^{j\theta_n}] e^{j\theta_n t} \Delta\theta \quad (6.110)$$

El hacer  $N$  tender a infinito tiene varias implicancias. La primera de ellas es que la frecuencia fundamental  $\theta_o$  tiende a 0, es decir,  $\theta_o = \theta_{n+1} - \theta_n = \Delta\theta$ , ya que la separación entre frecuencias armónicas consecutivas es igual a la frecuencia fundamental. Por otro lado, la sumatoria (6.110) corresponde a una **suma de Riemann** [25] que en el límite, cuando  $N \rightarrow \infty$  ( $\Leftrightarrow \Delta\theta \rightarrow 0$ ), se convierte en una integral en la variable continua  $\theta$ .

El límite superior de la integral es:

$$\theta_{N-1} = \frac{2\pi}{N} \cdot (N-1) \quad (6.111)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \theta_{N-1} = 2\pi \quad (6.112)$$

Por tanto, cuando  $N \rightarrow \infty$  se tiene que:

$$y[t] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y[e^{j\theta}] e^{j\theta t} d\theta \quad (6.113)$$

Como las funciones reales de  $e^{j\theta}$  son periódicas en  $\theta$ , con período  $2\pi$ , la señal  $y[t]$  podría calcularse, a partir de (6.113), usando cualquier intervalo de integración de longitud  $2\pi$ .

La ecuación (6.113) dice que podemos representar la función de tiempo discreto  $y[t]$  como una integral que involucra la función  $Y(e^{j\theta})$ , definida  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ . Veamos ahora cuál es la expresión que permite obtener esta función. A partir de la definición hecha en (6.108) tenemos:

$$Y[e^{j\theta_n}] = N \cdot C_n = \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_n t} = \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_n t} \quad (6.114)$$

Cuando  $N \rightarrow \infty$  aparece la variable continua  $\theta$  y es necesario considerar **todos** los valores de la función temporal, ya que se supone se incluye el eje temporal completo (valores positivos y negativos de  $t$ . Por lo tanto:

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[t] e^{-j\theta t} \quad (6.115)$$

Esta función es la **transformada de Fourier de tiempo discreto** (DTFT, *Discrete-Time Fourier Transform*) de la función  $y[t]$ , mientras que la expresión (6.113) representa la **transformada de Fourier de tiempo discreto inversa**.

$$\mathcal{F}_d \{y[t]\} = Y(e^{j\theta}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[t]e^{-j\theta t} \quad (6.116)$$

$$\mathcal{F}_d^{-1} \{Y[e^{j\theta}]\} = y[t] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y[e^{j\theta}]e^{j\theta t} d\theta \quad (6.117)$$

A continuación, se consideran tres ejemplos para ilustrar lo anterior.

**Ejemplo 6.11.** Consideremos, como primera señal, un delta de Kronecker. Si calculamos su transformada de Fourier de tiempo discreto vemos que ésta se reduce a un único término:

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta[t]e^{-j\theta t} = \delta_K[0]e^{-j\theta \cdot 0} = 1 \quad (6.118)$$

es decir, se obtiene un espectro plano, en analogía al caso del espectro del delta de Dirac en tiempo continuo. En la Figura 6.10 se muestra el delta de Kronecker y la transformada de Fourier calculada, que en este caso resulta tener sólo parte real. Note la analogía con la transformada de Fourier de un delta de Dirac.

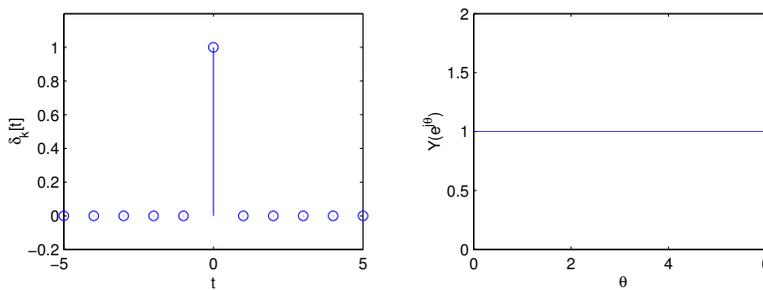


Figura 6.10: Delta de Kronecker y su transformada de Fourier

□□□

**Ejemplo 6.12.** Consideremos ahora la señal exponencial:

$$y[t] = \alpha^t \mu[t] \quad |\alpha| < 1 \quad (6.119)$$

su transformada de Fourier de tiempo discreto está dada por:

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[t]e^{-j\theta t} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t e^{-j\theta t} = \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\theta})^t \quad (6.120)$$

La expresión para  $Y[e^{j\theta}]$  resulta ser una serie geométrica convergente ya que  $|\alpha e^{-j\theta}| < 1$ . Por tanto:

$$Y[e^{j\theta}] = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\theta}} \quad (6.121)$$

La transformada  $Y[e^{j\theta}]$  puede ser reescrita en forma polar (módulo y ángulo):

$$Y[e^{j\theta}] = \frac{1}{1 - \alpha \cos(\theta) + j\alpha \sin(\theta)} \quad (6.122)$$

$$|Y[e^{j\theta}]| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha \cos(\theta))^2 + (\alpha \sin(\theta))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos(\theta) + \alpha^2}} \quad (6.123)$$

$$\angle Y[e^{j\theta}] = -\arctan\left(\frac{\alpha \sin(\theta)}{1 - \alpha \cos(\theta)}\right) \quad (6.124)$$

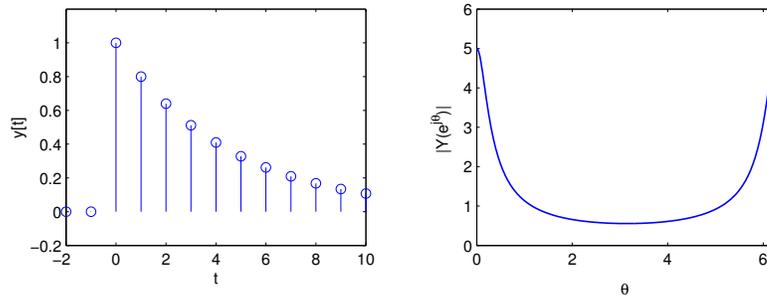


Figura 6.11: Señal  $y[t] = (0,8)^t \mu[t]$  y la magnitud de  $Y[e^{j\theta}]$ .

En la Figura 6.11 se muestra la señal en tiempo discreto y la magnitud de su transformada de Fourier cuando  $\alpha = 0,8$

□□□

**Ejemplo 6.13.** Consideremos ahora un pulso discreto definido según:

$$y[t] = \begin{cases} 1 & ; |t| \leq 5 \\ 0 & ; |t| > 5 \end{cases} \quad (6.125)$$

Su transformada de Fourier de tiempo discreto está dada por la expresión:

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-5}^5 e^{-j\theta t} \quad (6.126)$$

Se puede apreciar directamente que es una función real, ya que la suma de cada par de exponenciales complejas conjugadas se transforma en un coseno, es

decir:

$$Y[e^{j\theta}] = 1 + 2 \sum_{t=1}^5 \cos(\theta t) \quad (6.127)$$

Alternativamente, la transformada se puede obtener calculando la suma de la progresión geométrica de exponenciales:

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-5}^5 e^{-j\theta t} = e^{-j\theta(-5)} \frac{1 - e^{-j\theta(11)}}{1 - e^{-j\theta}} = \frac{e^{j\theta 5} - e^{-j\theta 6}}{1 - e^{-j\theta}} \quad (6.128)$$

Esta expresión no parece tener solo parte real, sin embargo, si se reescribe convenientemente, tenemos que:

$$Y[e^{j\theta}] = \frac{(e^{j\theta 5} - e^{-j\theta 6}) \cdot e^{j\frac{\theta}{2}}}{(1 - e^{-j\theta}) \cdot e^{j\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{j\theta \frac{11}{2}} - e^{-j\theta \frac{11}{2}}}{e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}}} = \frac{\text{sen}(\theta \frac{11}{2})}{\text{sen}(\theta \frac{1}{2})} \quad (6.129)$$

Note que la ecuación (B.46) del Apéndice B, establece justamente la propiedad que permite convertir la suma de cosenos en un cociente de senos.

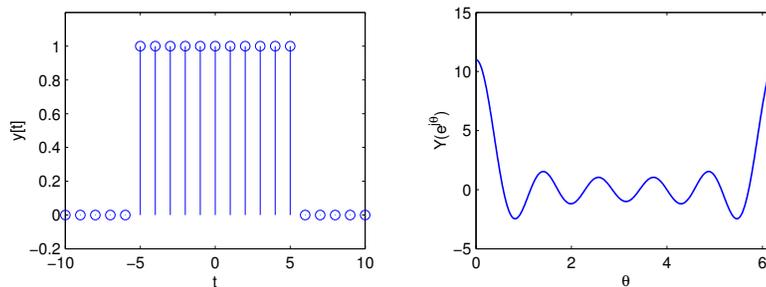


Figura 6.12: Señal  $y[t]$  y su transformada de Fourier de tiempo discreto  $Y[e^{j\theta}]$ .

En la Figura 6.12 se muestran los gráficos del pulso en tiempo discreto y de su transformada de Fourier.

□□□

En el Apéndice C se incluyen las propiedades más importantes de la transformada de Fourier de tiempo discreto (tabla C.3 en la página 412), además de una lista de transformadas simples que se pueden utilizar para el cálculo de otras más complejas (Tabla C.4 en la página 413).

### 6.3.1. Parseval y la energía de las señales de tiempo discreto

Los resultados deducidos por Parseval en el Apéndice C permiten también relacionar directamente las características de *energía* de una señal cualquiera

(ver subsección §2.3.7) con su transformada de Fourier de tiempo discreto. En el caso de señales de tiempo discreto, las ideas de potencia y energía no tienen la connotación física que poseen cuando se usan en el contexto de las señales de tiempo continuo. Sin embargo, son también conceptos útiles, especialmente si la secuencia de tiempo discreto se origina en el muestreo de una señal de tiempo continuo.

Para la señal real de tiempo discreto  $f[t]$  se define la energía como:

$$W = \sum_{t=-\infty}^{\infty} (f[t])^2 \quad (6.130)$$

Si la señal  $f[t]$  tiene energía finita en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , y su transformada de Fourier es  $F(e^{j\omega})$  entonces, aplicando el Teorema C.2 en la página 410, se tiene que:

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} (f[t])^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F[e^{j\theta}]|^2 d\theta \quad (6.131)$$

Observando el lado derecho de la ecuación, podemos calcular la fracción de la energía total que es aportada por un intervalo dado del espectro  $(\theta_a, \theta_b)$ .

### 6.3.2. Aplicación a sistemas lineales

Consideremos un sistema lineal de tiempo discreto definido por su ecuación recursiva (ERS):

$$\begin{aligned} y[t] + a_{n-1}y[t-1] + \dots + a_1y[t-n+1] + a_0y[t-n] \\ = b_mu[t] + b_{m-1}u[t-1] + \dots + b_1u[t-m+1] + b_0u[t-m] \end{aligned} \quad (6.132)$$

En que  $m$  y  $n$  son enteros positivos cualesquiera.

La solución de esta ecuación, se puede obtener usando el Lema 4.4 en la página 77, es decir, por convolución de la secuencia de entrada  $u[t]$  y la respuesta del sistema a un delta de Kronecker,  $h[t]$ . Esto lleva a:

$$y[t] = h[t] * u[t] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u[l]h[t-l] \quad (6.133)$$

Si ahora aplicamos la TFTD a ambos miembros de la ecuación, usando la propiedad establecida en el Lema C.15 en la página 409, se obtiene:

$$Y[e^{j\theta}] = H[e^{j\theta}]U[e^{j\theta}] \quad (6.134)$$

La función  $H[e^{j\theta}]$  en la ecuación (6.134) es exactamente la transformada de Fourier de la respuesta  $h[t]$  del sistema (6.132) a un delta de Kronecker en su entrada y corresponde a la **función de transferencia** del sistema de tiempo discreto.

Si aplicamos transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (6.132) tenemos:

$$Y[e^{j\theta}](1 + a_{n-1}e^{-j\theta} + \dots + a_1e^{-j\theta(n-1)} + a_0e^{-j\theta n}) = U[e^{j\theta}](b_m + b_{m-1}e^{-j\theta} + \dots + b_1e^{-j\theta(m-1)} + b_0e^{-j\theta}) \quad (6.135)$$

Así, en principio (ver análisis más abajo), podemos definir la función de transferencia como:

$$H[e^{j\theta}] = \frac{B[e^{j\theta}]}{A[e^{j\theta}]} \quad (6.136)$$

La función  $H[e^{j\theta}]$  que aparece en la expresión para la salida  $Y[e^{j\theta}]$  caracteriza al sistema mismo, ya que depende sólo de los coeficientes de la EDS (6.30), y no de la señal de entrada  $U[e^{j\theta}]$ .

En la mayoría de los casos,  $H[e^{j\theta}]$  es una función racional en  $e^{j\theta}$  y es descrita por (6.37). En este caso, la función de transferencia coincide con la ganancia al modo forzante  $e^{j\theta}$ . Sin embargo, existe una situación en que no es así. Ello ocurre cuando el sistema tiene frecuencias naturales simples sobre la circunferencia unitaria. Este problema se debe a que, en esa situación,  $y[k]$  contiene modos naturales que no decaen y, en consecuencia,  $H[e^{j\theta}]$  contiene deltas de Dirac y **no es correctamente descrita** por (6.136). Esto se analizará en forma más precisa en la subsección 6.3.5

Dado que la ERS tiene sólo coeficientes reales, la función de transferencia  $H[e^{j\theta}]$  cumple con  $H[e^{j\theta}] = (H[e^{-j\theta}])^*$ , lo que implica que:

$$\text{su magnitud es una función par en } \omega \Rightarrow |H[e^{j\theta}]| = |H[e^{-j\theta}]| \quad (6.137)$$

$$\text{su fase es una función impar en } \omega \Rightarrow \angle H[e^{j\theta}] = -\angle H[e^{-j\theta}] \quad (6.138)$$

**Ejemplo 6.14.** Consideremos el sistema de tiempo discreto definido por su ecuación recursiva:

$$y[t] - 1,6y[t-1] + 0,63y[t-2] = u[t] \quad (6.139)$$

Si aplicamos transformación de Fourier de tiempo discreto tenemos que:

$$Y[e^{j\theta}] - 1,6e^{-j\theta}Y[e^{j\theta}] + 0,63e^{-j\theta 2}Y[e^{j\theta}] = U[e^{j\theta}] \quad (6.140)$$

$$Y[e^{j\theta}](1 - 0,9e^{-j\theta})(1 - 0,7e^{-j\theta}) = U[e^{j\theta}] \quad (6.141)$$

Así la función de transferencia está dada por:

$$H[e^{j\theta}] = \frac{1}{(1 - 0,9e^{-j\theta})(1 - 0,7e^{-j\theta})} \quad (6.142)$$

La transformada de la salida queda entonces dada por:

$$Y[e^{j\theta}] = H[e^{j\theta}]U[e^{j\theta}] = \frac{U[e^{j\theta}]}{(1 - 0,9e^{-j\theta})(1 - 0,7e^{-j\theta})} \quad (6.143)$$

Analizaremos a continuación el comportamiento del sistema para distintas excitaciones.

### Entrada delta de Kronecker

En este caso:

$$U[e^{j\theta}] = 1 \quad \Rightarrow \quad Y[e^{j\theta}] = \frac{1}{(1 - 0,9e^{-j\theta})(1 - 0,7e^{-j\theta})} \quad (6.144)$$

Donde la transformada de la salida se debe separar en fracciones parciales para poder aplicar transformación inversa:

$$Y[e^{j\theta}] = \frac{4,5}{1 - 0,9e^{-j\theta}} - \frac{3,5}{1 - 0,7e^{-j\theta}} \quad (6.145)$$

Por tanto, la salida del sistema es:

$$y[t] = (4,5(0,9)^t - 3,5(0,7)^t)\mu[t] \quad (6.146)$$

Note que para esta excitación (delta de Kronecker)  $y[t] = h[t]$ .

### Entrada escalón unitario

En este caso,  $u[t] = \mu[t]$ , por lo tanto:

$$U[e^{j\theta}] = \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\ell\pi) \quad (6.147)$$

$$Y[e^{j\theta}] = \frac{1}{(1 - 0,9e^{-j\theta})(1 - 0,7e^{-j\theta})} \left( \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\ell\pi) \right) \quad (6.148)$$

La expresión de la transformada de Fourier de la secuencia de salida puede simplificarse separando en fracciones parciales y considerando el valor del término que acompaña a la sumatoria de deltas de Dirac sólo en las frecuencias en que éstos son distintos de cero, es decir, en  $\theta = 2\ell\pi$ . Sin embargo, notamos que:

$$H[e^{j\theta}]|_{\theta=2\ell\pi} = H[1] = \frac{100}{3}; \quad \forall \ell \in \mathbb{Z} \quad (6.149)$$

De esta forma:

$$Y[e^{j\theta}] = \frac{1}{(1 - 0,9e^{-j\theta})(1 - 0,7e^{-j\theta})(1 - e^{-j\theta})} + \frac{1}{(1 - 0,9e^{-j\theta})(1 - 0,7e^{-j\theta})} \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\ell\pi) \quad (6.150)$$

$$= \frac{-40,5}{1 - 0,9e^{-j\theta}} + \frac{8,17}{1 - 0,7e^{-j\theta}} + \frac{\frac{100}{3}}{1 - e^{-j\theta}} + \frac{100}{3} \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\ell\pi) \quad (6.151)$$

Por tanto la secuencia de salida es:

$$y[t] = \mathcal{F}_d^{-1} \left\{ \frac{-40,5}{1 - 0,9e^{-j\theta}} \right\} + \mathcal{F}_d^{-1} \left\{ \frac{8,17}{1 - 0,7e^{-j\theta}} \right\} + \mathcal{F}_d^{-1} \left\{ \frac{100}{3} + \frac{100}{3} \pi \delta(\theta) \right\} \quad (6.152)$$

$$= (-40,5(0,9)^t + 8,17(0,7)^t + 33,3)\mu[t] \quad (6.153)$$

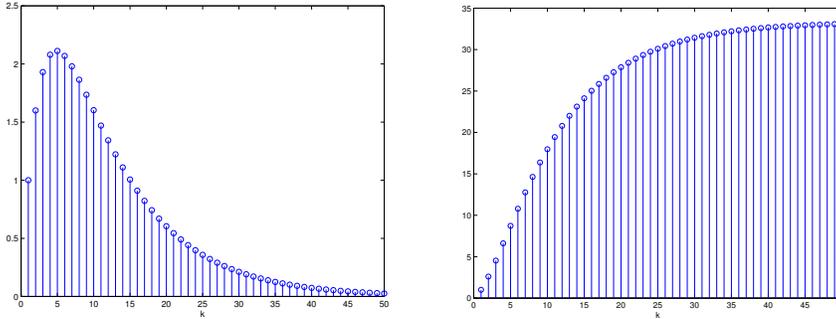


Figura 6.13: Respuesta a impulso y a escalón del ejemplo 6.14

La Figura 6.13 muestra los gráficos de las secuencias de correspondientes a la respuesta a impulso y a escalón unitario del sistema.

#### Entrada exponencial compleja

Ahora  $u[t] = e^{j\theta_o t}$  y, de la Tabla C.4 en la página 413, tenemos que su transformada de Fourier es:

$$U[e^{j\theta}] = 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_o + 2\ell\pi) \quad (6.154)$$

Por lo tanto la transformada de Fourier de la respuesta está dada por:

$$\begin{aligned} Y[e^{j\theta}] &= H[e^{j\theta}]U[e^{j\theta}] = H[e^{j\theta}] \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_o + 2\ell\pi) \\ &= 2\pi H[e^{j\theta_o}] \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_o + 2\ell\pi) \end{aligned} \quad (6.155)$$

Note que hemos usado la periodicidad en frecuencia de la función de transferencia, lo que implica:

$$H(e^{j(\theta_o+2\ell\pi)}) = H[e^{j\theta_o}] = |H[e^{j\theta_o}]|e^{j(\phi(\theta_o))} \quad \forall \ell \in \mathbb{Z} \quad (6.156)$$

Así, aplicando la transformación inversa, se obtiene:

$$y[t] = |H[e^{j\theta_o}]| e^{j(\theta_o t + \phi(\theta_o))} \quad (6.157)$$

□□□

### 6.3.3. La función de transferencia y la respuesta en frecuencia

La parte final del Ejemplo 6.14, en la sección precedente, muestra el vínculo entre la función de transferencia y la respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo discreto. Este resultado se generaliza en el siguiente lema.

**Lema 6.2.** *Considere un sistema estable de tiempo discreto con entrada  $u[t]$  y salida  $y[t]$ . Entonces, la respuesta del sistema a la señal de entrada  $u[t] = \cos(\theta_o t)$ ,  $\forall t$ , está dada por*

$$y[t] = A(\theta_o) \cos(\theta_o t + \phi(\theta_o)) \quad (6.158)$$

en que:

$$A(\theta_o) = |H[e^{j\theta_o}]| \quad (6.159)$$

$$\phi(\theta_o) = \angle H[e^{j\theta_o}] \quad (6.160)$$

y donde  $H[e^{j\theta}]$  es la transformada de Fourier de la respuesta a impulso del sistema  $h[t]$ .

#### **Demostración**

La respuesta a la excitación  $\cos(\theta_o t)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , puede ser calculada como la combinación de las respuestas a un par de exponenciales periódicas, usando la relación:

$$Y[e^{j\theta}] = H[e^{j\theta}]U[e^{j\theta}] \quad (6.161)$$

Si consideramos la entrada  $u[t] = \frac{1}{2}(e^{j\theta_o t} + e^{-j\theta_o t})$ , entonces:

$$Y[e^{j\theta}] = H[e^{j\theta}]\pi(\delta(\theta - \theta_o) + \delta(\theta + \theta_o)) \quad (6.162)$$

$$= \pi H[e^{j\theta_o}]\delta(\theta - \theta_o) + \pi H[e^{-j\theta_o}]\delta(\theta + \theta_o) \quad (6.163)$$

luego, la salida es:

$$y[t] = \frac{1}{2}H[e^{j\theta_o}]e^{j\omega_o t} + \frac{1}{2}H[e^{-j\theta_o}]e^{-j\theta_o t} \quad (6.164)$$

$$= \frac{1}{2}|H[e^{j\theta_o}]|e^{j\theta_o t + j\angle H[e^{j\theta_o}]} + \frac{1}{2}|H(j\omega_o)|e^{-j\theta_o t - j\angle H[e^{j\theta_o}]} \quad (6.165)$$

$$= |H[e^{j\theta_o}]| \cos(\theta_o t + \angle H[e^{j\theta_o}]) \quad (6.166)$$

□□□

### 6.3.4. Filtraje

La respuesta en frecuencia de los sistemas discretos puede ser caracterizada a través de  $H[e^{j\theta}]$ . Se aplican en este caso las mismas definiciones que en el caso de sistemas de tiempo continuo: frecuencias de corte, banda de paso, banda de rechazo, etc. Existe sin embargo un elemento que agrega complejidad al análisis,

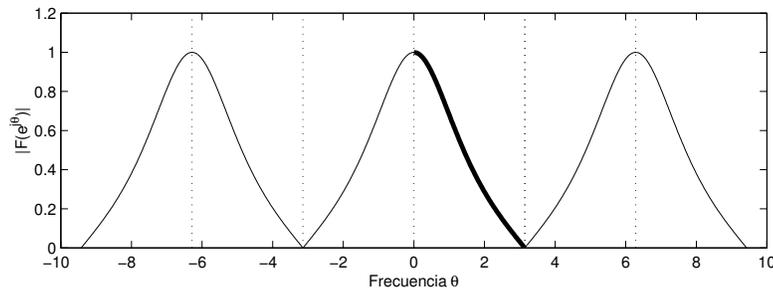


Figura 6.14: Respuesta en frecuencia (magnitud) de un sistema de tiempo discreto.

y él es la naturaleza periódica de  $H[e^{j\theta}]$ . Consideremos un sistema para el que la magnitud de la respuesta en frecuencia aparece descrita en la Figura 6.14.

El problema con el gráfico de la Figura 6.14 es que genera ambigüedades respecto de si se trata de un sistema pasa bajos, pasa banda, etc. El problema se resuelve si se considera que, cualquiera sea la señal procesada por el sistema, ella también tiene un espectro periódico. En consecuencia, la naturaleza filtrante se puede definir observando  $H[e^{j\theta}]$  sólo en  $\theta \in [0; \pi]$ , tal como se ha enfatizado en la Figura 6.14 con un trazo más grueso.

**Nota 6.2.** Existe una serie de métodos de diseño de filtros en tiempo discreto, o **filtros digitales**. Si bien muchos de ellos pueden implementarse en forma de algoritmos que procesan los datos de algún tipo de entrada discreta, debe tenerse en cuenta que existe una limitación fundamental similar a la comentada para filtros de tiempo continuo (ver Nota 6.1 en la página 134).

Para que un filtro sea causal (realizable), es decir, para que su respuesta a impulso satisfaga:

$$h[t] = 0 \quad \forall t < 0 \quad (6.167)$$

entonces la magnitud de su respuesta en frecuencia debe satisfacer la condición (necesaria y suficiente):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |H[e^{j\theta}]| d\theta > -\infty \quad (6.168)$$

Esto se traduce en que  $|H[e^{j\theta}]|$  puede ser cero sólo en un número **finito** de frecuencias, y no en intervalos del espectro (teorema de Paley-Wiener) [22, 15].

Para apreciar mejor esta limitación sugerimos al lector analizar el Problema 6.10 sobre el diseño de un filtro discreto ideal.

En resumen, no existen sistemas causales que filtren perfectamente frecuencias sobre una banda del espectro.

### 6.3.5. Caso singular en la función de transferencia. El caso de los sistemas discretos

Para el caso de los sistemas de tiempo discreto conviene recordar que la función de transferencia de un sistema lineal de tiempo discreto está definida sólo si su respuesta a un delta de Kronecker posee transformada de Fourier. Esto es equivalente a exigir que el sistema tenga sólo frecuencias naturales en el disco unitario **cerrado**, con la condición que si algunas de esas frecuencias naturales están sobre la circunferencia unitaria, ellas sean simples.

Es importante enfatizar además que el Lema 6.2 en la página 146, que iguala  $H[e^{j\theta}]$  con la respuesta en frecuencia, está formulado para **sistemas estables**. No podemos extender este resultado a sistemas que tienen frecuencias naturales sobre la circunferencia unitaria, aunque sean no repetidas. Veamos a través de un ejemplo, los resultados erróneos que surgen si no somos cuidadosos.

**Ejemplo 6.15.** *Un sistema con entrada  $u[t]$  y salida  $y[t]$ , tiene una ERS:*

$$y[t] - y[t - 1] = u[t] \quad (6.169)$$

*Observamos que el sistema tiene sólo una frecuencia natural, y ella está ubicada en  $\lambda = 1$ , es decir, se trata de una frecuencia natural sobre la circunferencia unitaria y de multiplicidad 1.*

*La respuesta en frecuencia,  $K[\theta]$  está dada por la ganancia al modo forzante  $e^{j\theta t}$ , y ella resulta de aplicar (4.36) a este caso particular:*

$$K[\theta] = \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1} \quad (6.170)$$

*Suponga que  $u[t] = a^t \mu[t]$ ,  $1 > a > 0$  y si, erróneamente, hacemos  $H[e^{j\theta}] = K[\theta]$ , entonces  $y[t]$  se podría calcular a partir de:*

$$Y[e^{j\theta}] = H[e^{j\theta}]U[e^{j\theta}] = \frac{e^{2j\theta}}{(e^{j\theta} - 1)(e^{j\theta} - a)} \quad (6.171)$$

*de donde se obtiene (vea el Problema 6.11):*

$$y[t] = \mathcal{F}_d^{-1} \left\{ \frac{1}{1-a} \left[ \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1} - \frac{ae^{j\theta}}{e^{j\theta} - a} \right] \right\} = \frac{1}{2(1-a)} (\text{signo}[t] - 2a^{t+1}\mu[t]) \quad (6.172)$$

*dando origen a una respuesta **no causal**, ya que la función  $\text{signo}[t]$  tiene valor  $-1$ ,  $\forall t < 0$ .*

*Para obtener la respuesta correcta, recordemos que la función de transferencia  $H[e^{j\theta}]$  es la transformada de Fourier de tiempo discreto de la respuesta del sistema a un delta de Kronecker. En este ejemplo, esa respuesta es  $h[t] = \mu[t]$ . Aplicando los resultados obtenidos en el Ejemplo C.12 en la página 406 se llega a:*

$$H[e^{j\theta}] = \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1} + \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\ell\pi) \quad (6.173)$$

lo cual lleva a

$$Y[e^{j\theta}] = \left( \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1} + \pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\ell\pi) \right) \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - a} \quad (6.174)$$

$$= \frac{e^{2j\theta}}{(e^{j\theta} - 1)(e^{j\theta} - a)} + \frac{\pi}{1-a} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\ell\pi) \quad (6.175)$$

Entonces, al expandir la expresión (6.175), se obtiene

$$y[t] = \mathcal{F}_d^{-1} \left\{ \frac{1}{2(1-a)} \left( \frac{2e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1} - \frac{2ae^{j\theta}}{e^{j\theta} - a} + 2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\ell\pi) \right) \right\} \quad (6.176)$$

$$= \frac{1}{2(1-a)} (\text{signo}[t] - 2a^{t+1}\mu[t] + 1) = \frac{1-a^{t+1}}{1-a} \mu[t] \quad (6.177)$$

que es la respuesta correcta.

□□□

El ejemplo precedente ilustra y explica el problema. Cuando el sistema tiene frecuencias naturales sobre la circunferencia unitaria, los modos naturales asociados no decaen, y la transformada de Fourier de cada uno de ellos sólo existe en el límite. Esta condición es acusada por la presencia de deltas de Dirac en el dominio de la frecuencia  $\theta$ . Así, la función de transferencia es una función racional más uno o varios deltas de Dirac en  $\theta$ .

La explicación de esta situación es análoga a la del caso continuo, en efecto, en el ejemplo tenemos que

$$(1 - e^{-j\theta})Y[e^{j\theta}] = U[e^{j\theta}] \quad (6.178)$$

Sin embargo, la presencia de una frecuencia natural sobre la circunferencia unitaria, en el punto (1;0) para ser exactos, genera un modo natural constante cuya Transformada de Fourier contiene deltas de Dirac, en  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ . Estos deltas están presentes en  $Y[e^{j\theta}]$ . En consecuencia, el lado izquierdo de (6.178) contiene un producto que se hace indefinido a todas esas frecuencias, ya que el término  $(1 - e^{-j\theta})$  se hace cero para esos mismos valores de  $\theta$ .

La conclusión fundamental de esta subsección es que, para evitar los problemas analizados, debe usarse la definición de la función de transferencia que señala que es igual a la Transformada de Fourier de la respuesta del sistema a un delta de Kronecker en la entrada.

## 6.4. La SFD, la TFD y la TFTD

### 6.4.1. Aspectos generales

La nomenclatura que incluye: *serie de Fourier de tiempo discreto* (SFD), *transformada de Fourier discreta* (TFD) y *transformada de Fourier de tiempo*

*discreto (TFTD)*, es usada extensamente en la literatura sobre señales de tiempo discreto. La similitud de términos puede provocar confusión, por lo que conviene hacer algunas precisiones y establecer conexiones, cuando ello es posible.

1. La SFD exponencial y la TFD son **sinónimos**. El conjunto de señales sobre las que operan es el de las señales de tiempo discreto, periódicas con período  $N$ , finito. Para calcular la SFD (o TFD) basta especificar la señal en un lapso igual a un período.
2. La TFTD es una transformación que se aplica a señales de tiempo discreto, no necesariamente periódicas, especificadas  $\forall t \in (-\infty, \infty)$ . Si la señal cuya TFTD se desea calcular es aperiódica, pero es sólo conocida en un intervalo temporal finito, sólo cabe suponer que la señal es cero fuera de ese intervalo.
3. La SFD y la TFD son funciones de la frecuencia, pero están sólo definidas en múltiplos enteros (positivos y negativos) de una frecuencia fundamental  $\theta_o = \frac{2\pi}{N}$ .
- 4 En cambio, la TFTD es una función de la frecuencia  $\theta$ , **definida para todo valor real**. Sin perjuicio de ello, y debido a que la TFTD es periódica en  $\theta$ , con periodo  $2\pi$ , basta especificar la TFTD en cualquier intervalo de frecuencia con longitud  $2\pi$ .

### 6.4.2. Conexiones

Suponga que  $y[t]$  es una señal periódica de período  $N$ , y suponga además que definimos una señal no periódica  $g[t]$  en la forma

$$g[t] = \begin{cases} y[t], & t \in [0, N-1]; \\ 0, & e.t.o.c. \end{cases} \quad (6.179)$$

En otras palabras,  $y[t]$  y  $g[t]$  son idénticas en el lapso de un período; fuera de él,  $g[t]$  es cero. Se dice que  $g[t]$  es igual a un **módulo periódico** de  $y[t]$ .

Entonces, la TFTD de  $g[t]$  está dada por

$$\mathcal{F}_d \{g[t]\} = G[e^{j\theta}] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} g[t]e^{-j\theta t} = \sum_{t=0}^{N-1} g[t]e^{-j\theta t} = \sum_{t=0}^{N-1} y[t]e^{-j\theta t} \quad (6.180)$$

Si comparamos la expresión en (6.180) con aquella para el cálculo de la TFD o SFD exponencial, dada en (5.98), vemos que

$$Y_n = \frac{1}{N} G[e^{j\theta}] \Big|_{\theta = \frac{2\pi n}{N}} \iff G[e^{jn\theta_o}] = NY_n \quad (6.181)$$

Lo anterior se expresa en palabras, diciendo que la TFD de  $y[t]$ ,  $Y_n$ , es igual a la TFTD de un módulo periódico,  $G[e^{j\theta}]$ , muestreada en frecuencia cada  $\theta_o$  [rad], y dividida por el período.

## 6.5. Problemas para el lector

**Problema 6.1.** Determine la transformada de Fourier de las siguientes funciones, ya sea mediante la definición o usando tablas y transformadas conocidas (ver Apéndice C):

1.  $y(t) = [\mu(t+T) - \mu(t-T)]t \quad ; T > 0$

2.  $y(t) = (1 - 2e^{-|t|})^2$

3.  $y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{t}{2\sigma}\right)^2} \quad (\text{Recuerde que } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi})$

**Problema 6.2.** Considere la función:

$$y(t) = \begin{cases} 4t(t+1) & ; -1 < t < 0 \\ -4t(t-1) & ; 0 < t < 1 \\ 0 & ; |t| \geq 1 \end{cases}$$

**6.2.1** Grafique la función.

**6.2.2** Determine la transformada de Fourier  $Y(j\omega)$  de la función  $y(t)$ .

**6.2.3** ¿Cuál es la serie de Fourier exponencial de  $y(t)$  considerándola sólo en el intervalo  $[-1,1]$ ?

**6.2.4** Grafique por separado la parte real e imaginaria de  $Y(j\omega)$  y compare con los coeficientes obtenidos para la serie de Fourier exponencial. Comente.

**Problema 6.3.** Demuestre que una función  $f(t)$  arbitraria (o de período infinito) puede expresarse en la **forma de Integral de Fourier**:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \text{sen}(\omega t)] d\omega$$

en que:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(\omega t) dt$$

¿Cómo se reducen las expresiones si  $f(t)$  es par o impar?

**Problema 6.4.** Usando la ecuación de Euler para exponenciales complejas:

**6.4.1** Demuestre que si  $y(t)$  es par, entonces su transformada de Fourier  $Y(j\omega)$  es real.

**6.4.2** Análogamente, demuestre que si  $y(t)$  es impar, entonces su transformada de Fourier  $Y(j\omega)$  es imaginaria pura.

---

**Problema 6.5.** Considere el sistema de segundo orden definido por:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 100y(t) = 100u(t)$$

Encuentre la respuesta del sistema mediante la transformación de Fourier cuando

**6.5.1**  $u(t) = \text{sen}(\omega_o t)\mu(t)$ , con condiciones iniciales cero.

**6.5.2**  $u(t) = \text{sen}(\omega_o t)$ .

**6.5.3** Grafique y compare las soluciones obtenidas en los puntos anteriores cuando  $\omega_o \neq 10$  y cuando  $\omega_o = 10$ . Comente.

---

**Problema 6.6.** Suponga que se quiere diseñar un sistema cuya característica en frecuencia sea:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & ; |\omega| < \omega_c \\ 0 & ; |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Es decir, este sistema actúa como **filtro ideal** ya que permite el paso de sinusoides de frecuencias menores que  $\omega_c$  sin afectarlas, mientras que aquellas de frecuencias mayores no aparecen en la salida.

**6.6.1** Grafique  $H(j\omega)$ .

**6.6.2** Determine cuál debiera ser la respuesta a impulso del sistema.

**6.6.3** ¿Qué puede comentar respecto del resultado obtenido?

---

**Problema 6.7.** Determine la transformada de Fourier de tiempo discreto de las siguientes funciones:

- $y[t] = (t + 1)\alpha^t\mu[t]$ , con  $|\alpha| < 1$
- $y[t] = \frac{2^t + 3^t}{6^t}\mu[t]$
- $y[t] = \cos(\theta_1 t + \phi)$ , con  $0 < \theta_1 < 2\pi$

---

**Problema 6.8.** Considere un pulso de tiempo discreto de amplitud  $A > 0$  y centrado en  $t = 0$ , definido por:

$$y[t] = \begin{cases} A & ; |t| \leq N \\ 0 & : |t| > N \end{cases} \quad N \in \mathbb{Z}^+$$

**6.8.1** Grafique el pulso en tiempo discreto para algunos valores de  $A$  y  $N$ .

**6.8.2** Determine la transformada de Fourier de  $y[t]$  (Sugerencia : use la ecuación B.2.35).

**6.8.3** Grafique la transformada de Fourier para distintos valores de  $N$ .

**6.8.4** Determine el valor de  $Y[e^{j\theta}]$  en función de  $N$ .

**6.8.5** Analice qué sucede para valores extremos de  $N$ , es decir, cuando  $N = 0$  y cuando  $N \rightarrow \infty$ .

**Problema 6.9.** Determine la respuesta a un delta de Kronecker y a un escalón unitario de los sistemas de tiempo discreto dados por sus ERS:

**6.9.1**  $y[t] - y[t - 1] = 2u[t - 7]; \quad y[-1] = 1$

**6.9.2**  $y[t] = u[t - 1] - 0,5u[t - 2] + 0,2u[t - 3]$

**6.9.3**  $y[t] - 1,1y[t - 1] + 0,24y[t - 2] = u[t - 2]; \quad y[-1] = -1; \quad y[-2] = 1$

**Problema 6.10.** Tenemos un sistema de tiempo discreto el queremos que su respuesta en frecuencia sea igual a:

$$H[e^{j\theta}] = \begin{cases} 1 & ; |\theta| < \theta_c \\ 0 & ; \theta_c < |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

Es decir, nos interesa diseñar un filtro ideal que elimine perfectamente todas las componentes de frecuencia fuera de la banda  $[-\theta_c, \theta_c]$ .

**6.10.1** Determine su respuesta a un delta de Kronecker.

**6.10.2** Determine, si es posible, su respuesta a un escalón de tiempo discreto.

**6.10.3** ¿Qué puede comentar respecto del resultado obtenido?

*Comente.*

**Problema 6.11.** Considere la señal  $f[t] = \text{signo}[t]$ .

**6.11.1** Demuestre que su transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) está dada por

$$\frac{2e^{j\theta}}{e^{j\theta} - 1}$$

. Sugerencia: use el hecho que  $\text{signo}[t] = 2\mu[t] + 1$

**6.11.2** ¿Por qué se comete un error si se calcula la TFTD deseada con  $\mu[t] + \mu[-t]$ , aplicando las propiedades del Lema C.13 ?



## Capítulo 7

# Análisis bajo excitaciones arbitrarias. La transformada de Laplace

### 7.1. Introducción

Entre los métodos disponibles para el estudio de los sistemas dinámicos, lineales y de tiempo continuo, uno en particular resulta ser especialmente útil: la transformada de Laplace. Las principales ventajas de este método se pueden resumir en lo siguiente:

- Permite el análisis de sistemas lineales estables e inestables.
- Se puede aplicar a una vasta gama de señales no acotadas.
- Permite considerar las condiciones iniciales del sistema.
- La EDS es transformada en una ecuación algebraica, que puede ser manejada de manera más simple.

### 7.2. Definición de la transformada

Considere una señal de tiempo continuo  $y(t)$ , definida para  $0 \leq t < \infty$ . La transformada de Laplace asociada a  $y(t)$ , y su transformada inversa están definidas como:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}y(t)dt \quad (7.1)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}Y(s)ds \quad (7.2)$$

$Y(s)$  es la transformada de Laplace de  $y(t)$ . El par transformada y su transformada inversa están bien definidas si existe  $\sigma \in \mathbb{R}$ , y una constante positiva  $k < \infty$  tales que:

$$|y(t)| < ke^{\sigma t}; \forall t \geq 0 \quad (7.3)$$

La región  $\Re\{s\} \geq \sigma$ , donde  $\sigma$  es el mínimo valor que satisface (7.3), se conoce como la **región de convergencia** de la transformada.

Suponemos que el lector ha conocido estas ideas anteriormente en algún curso de Matemáticas, si bien se presenta en el Apéndice D una revisión de la transformada de Laplace, sus propiedades y las transformadas de algunas funciones simples. También se incluye una revisión del método de fracciones parciales, el cual resulta de utilidad para obtener transformadas de Laplace inversas para funciones racionales.

En este capítulo nos concentraremos en esta transformada como herramienta para el análisis de los sistemas lineales.

## 7.3. Aplicación a sistemas lineales: la función de transferencia

### 7.3.1. Definición y propiedades de la función de transferencia

Como ya hemos visto, una gran cantidad y variedad de sistemas de interés, pueden ser representados mediante un modelo lineal. Como se vio en el Capítulo 1, esto se consigue linealizando la o las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema en el tiempo en torno a un punto de equilibrio o, más generalmente, en torno a un punto de operación. Para el caso de sistemas de una entrada y una salida, el proceso de linealización desemboca en la obtención de una ecuación diferencial del sistema (EDS), cuya forma general es:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t) \quad (7.4)$$

Como se señala en el Apéndice D, la transformada de la  $\ell$ -ésima derivada de una función es:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^\ell y(t)}{dt^\ell}\right\} = s^\ell Y(s) - s^{\ell-1}y(0^-) - \dots - \frac{d^{\ell-1}y(0^-)}{dt^{\ell-1}} \quad (7.5)$$



Por tanto, si aplicamos esto a la EDS (7.4) tenemos que:

$$\begin{aligned} s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) \\ = b_m s^m U(s) + \dots + b_0 U(s) + f(s, x_0) \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde  $f(s, x_0)$  es una función que depende de la variable  $s$  y de las  $n$  condiciones iniciales de la salida  $y(t)$  y sus derivadas. Es importante destacar que:

$$f(s, x_0) = \mathbf{p}(s)^T \mathbf{x}_0 \quad (7.7)$$

donde  $\mathbf{p}(s)$  es un vector que contiene polinomios en  $s$  y  $\mathbf{x}_0$  es un vector que contiene las condiciones iniciales ya mencionadas. Esta estructura revela la linealidad del sistema, puesto que la homogeneidad y superposición respecto de las condiciones iniciales resultan evidentes.

Ahora si suponemos **condiciones iniciales iguales a cero**, tenemos que:

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (7.8)$$

donde se define la función:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (7.9)$$

que se forma con los polinomios que contienen los coeficientes de la ecuación (7.4) original:

$$A(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \quad (7.10)$$

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 \quad (7.11)$$

La función racional  $H(s)$  es la **función de transferencia** en el dominio de Laplace. La representación (7.9) es muy útil para describir características y propiedades de un sistema tales como estabilidad y velocidad, además de entregar información en el momento de diseñar sistemas de control, filtros u otras aplicaciones.

**Ejemplo 7.1.** Consideremos un sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} = u(t) \quad (7.12)$$

Su función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s} \quad (7.13)$$

□□□

A continuación definiremos algunos conceptos que se encuentran estrechamente ligados a la definición de la función de transferencia de un sistema. Para esto consideremos su definición dada por las ecuaciones (7.9), (7.10) y (7.11). Por simplicidad, supondremos que los polinomios  $B(s)$  y  $A(s)$  no se hacen cero simultáneamente para algún valor de la variable compleja  $s$ . Así, definimos entonces los siguientes términos:

- (i) Las  $m$  raíces de la ecuación  $B(s) = 0$  son los **ceros** del sistema. Ellos hacen además que  $H(s) = 0$ .
- (ii) Las  $n$  raíces de la ecuación  $A(s) = 0$  son los **polos** del sistema. Ellos hacen además que  $H(s) \rightarrow \infty$ .
- (iii) Si  $A(s) = 0$  tiene  $n_k$  raíces en  $s = \lambda_k$ , decimos que el polo  $\lambda_k$  tiene **multiplicidad**  $n_k$ .
- (iv) La diferencia de grado entre  $A(s)$  y  $B(s)$ , es decir,  $n - m$  se denomina el **grado relativo** del sistema.
- (v) Si  $m < n$  decimos que el modelo es **estrictamente propio**. Esto implica que el grado relativo del sistema es positivo.
- (vi) Si  $m = n$  decimos que el modelo es **bipropio**. Esto implica que el grado relativo del sistema es cero.
- (vii) Si  $m \leq n$  decimos que el modelo es **propio**.
- (viii) Si  $m > n$  decimos que el modelo es **impropio**, o que tiene grado relativo negativo.

Estas definiciones nos ayudarán a apreciar la forma en que se relaciona la salida de un sistema con su entrada, tal como pone en evidencia la definición (7.9), pero la simplicidad reside en que la relación se establece mediante la función racional  $H(s)$ , es decir, las derivadas han desaparecido. Si bien para llegar a esta relación las condiciones iniciales se han supuesto cero, sabemos que en caso de sistemas estables, el efecto de éstas desaparece después de un tiempo.

La función de transferencia de un sistema lineal describe en forma algebraica sus propiedades de entrada-salida.

En forma similar a aquella que se utilizó en el análisis de Fourier, la función de transferencia puede ser definida en base a la respuesta a impulso, con condiciones iniciales iguales a cero. Si recordamos como se definió la función de transferencia  $H(s)$  al aplicar transformada de Laplace a la EDS del sistema definido en (7.4), podemos escribir la salida del sistema según la ecuación (7.8). Se puede apreciar que si a ambos lados de esta expresión, se aplica transformada de Laplace inversa, tenemos que (vea la Tabla D.1 en la página 437):

$$Y(s) = H(s)U(s) \iff y(t) = h(t) * u(t) \quad (7.14)$$

En que:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\} \quad (7.15)$$

Por lo tanto, podemos afirmar que:



La función de transferencia  $H(s)$  de un sistema de tiempo continuo, definida en (7.9), es igual a la transformada de Laplace de la respuesta  $h(t)$  del sistema a un impulso (Delta de Dirac) en la entrada, cuando las condiciones iniciales son iguales a cero.

En la mayoría de los casos de interés, la función de transferencia es una función racional en  $s$ . Sin embargo, cuando el sistema tiene un retardo  $\tau$ , la expresión general para la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-s\tau} \quad (7.16)$$

La función de transferencia en MATLAB puede definirse mediante vectores con los coeficientes de los polinomios  $A(s)$  y  $B(s)$ , y el comando `tf` :

```
MATLAB
>> A=[1 3 2],B=[1 1]

A =
     1     3     2

B =
     1     1

>> H=tf(B,A)

Transfer function:
      s + 1
-----
s^2 + 3 s + 2
```

O bien, definiendo la variable  $s$ :

```

MATLAB
>> s=tf([1 0],[1])

Transfer function:
s

>> H=(s+1)/(s^2+2*s+1)

Transfer function:
  s + 1
-----
s^2 + 2 s + 1

```

### 7.3.2. Función de transferencia en dominios de Laplace y Fourier

Cuando el sistema tiene todas sus frecuencias naturales en el SPI cerrado, con la restricción que aquellas frecuencias en el eje imaginario sean simples, las funciones de transferencia en ambos dominios existen. El elemento común es conceptual: **en ambos casos, la función de transferencia corresponde a la respectiva transformada de la respuesta a impulso con condiciones iniciales iguales a cero.**

La definición y la estructura de  $H(s)$  parecen ser idénticas a la definición y la estructura de la función de transferencia en el dominio de Fourier, bastando hacer una simple sustitución de  $s$  por  $j\omega$ . Sin embargo, esto **no** siempre es correcto. La diferencia es que cuando el sistema tiene frecuencias naturales (simples) en el eje imaginario, la función de transferencia en Fourier incluye deltas de Dirac en frecuencia. Esto se origina en el hecho que la respuesta a impulso del sistema contiene modos naturales que no decaen y para los cuales la transformada de Fourier existe sólo en el límite. En cambio, para el mismo sistema, la función de transferencia en Laplace siempre es finita para valores imaginarios de  $s$ , esto se logra eligiendo un  $\sigma$  positivo.

**Ejemplo 7.2.** Consideremos el sistema con la EDS:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (7.17)$$

donde  $a_1 \geq 0$ .

La función de transferencia, en el dominio de Laplace, es:

$$H_{\mathcal{L}}(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + 1}; \quad \forall \Re\{s\} > 0 \quad (7.18)$$

En cambio, en el caso de Fourier, debemos distinguir dos casos.



(i) Caso  $a_1 > 0$  :

En este caso, las frecuencias naturales están en el SPI abierto, por lo tanto, los modos naturales son absolutamente integrables y la función de transferencia en el dominio de la transformación de Fourier es:

$$H_{\mathcal{F}}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + a_1 j\omega + 1} \quad (7.19)$$

En este caso:

$$H_{\mathcal{F}}(j\omega) = H_{\mathcal{L}}(s)|_{s=j\omega} \quad (7.20)$$

(ii) Caso  $a_1 = 0$  :

En este caso, las frecuencias naturales están sobre el eje imaginario y los modos naturales combinados corresponden a una senoide. Más específicamente, la respuesta a impulso, con condiciones iniciales iguales a cero es:

$$h(t) = \text{sen}(t)\mu(t) \quad (7.21)$$

En consecuencia (vea la Tabla C.2 en la página 399, con  $\omega_o = 1$ ) la función de transferencia en el dominio de la transformación de Fourier es:

$$H_{\mathcal{F}}(j\omega) = \frac{j\pi}{2} (\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)) + \frac{1}{(j\omega)^2 + 1} \quad (7.22)$$

Se observa que, en este caso, no se cumple (7.20).

□□□

La relación entre transformada de Fourier y transformada de Laplace se analiza en forma más detallada en la sección §7.8.

### 7.3.3. Función de transferencia y respuesta en frecuencia

Considere un sistema con función de transferencia  $H(s)$ . Suponga que  $H(s)$  es estable, salvo por un conjunto finito de polos en el eje  $j\omega$ . Si la entrada a este sistema es  $u(t) = e^{j\omega_o t}$ , con  $|H(j\omega_o)| < \infty$ , entonces la transformada de Laplace de la respuesta es:

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s - j\omega_o} = \frac{H(j\omega_o)}{s - j\omega_o} + Y_r(s) \quad (7.23)$$

donde  $Y_r(s)$  es la transformada de Laplace de la componente natural de la respuesta. Entonces  $y(t) = |H(j\omega_o)|e^{j(\omega_o t - \phi(\omega_o))}$ , donde  $\phi(\omega_o) = \angle H(j\omega_o)$ . Este resultado dice que si la entrada al sistema es  $u(t) = \cos(\omega_o t)$ , entonces la respuesta contiene una senoide de la misma frecuencia, con amplitud  $|H(j\omega_o)|$  y

fase igual a  $\angle H(j\omega_o)$ . Esto es válido incluso si  $H(s)$  tiene un (o más) polo en  $s = j\omega_o$ , ya que entonces  $|H(j\omega_o)|$  tendería a infinito, lo cual es consistente con el hecho que la respuesta del sistema contendría una oscilación de frecuencia  $\omega_o$ , pero de amplitud creciendo polinomialmente en el tiempo.

La respuesta en frecuencia  $K(\omega)$  de un sistema lineal con función de transferencia  $H(s)$  se puede calcular reemplazando  $s$  por  $j\omega$ .

Para finalizar, veamos un caso en que la transformada de Laplace permite, de manera similar a la transformada de Fourier, analizar la respuesta de un sistema a una señal sinusoidal.

**Ejemplo 7.3.** Consideremos nuevamente el sistema del Ejemplo 7.5 definido por su EDS:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (7.24)$$

Supongamos que como entrada al sistema se elige una señal sinusoidal de frecuencia  $\omega$ , por ejemplo:

$$u(t) = \cos(\omega t) \quad (7.25)$$

Con esto y con ayuda de MAPLE podemos llegar de manera directa a una expresión para la transformada de Laplace de la salida y aplicarle transformación inversa:

```
MAPLE
>with(inttrans):
>assume(omega>0):
>U(s):=laplace(cos(omega*t),t,s);
>H(s):=1/(s^2+s+1);
>Y(s):=H(s)*U(s);
>y(t):=invlaplace(Y(s),s,t);
```

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (7.26)$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (7.27)$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (7.28)$$

$$y(t) = \frac{1 - \omega^2}{-\omega^2 + 1 + \omega^4} \cos(\omega t) + \frac{\omega}{-\omega^2 + 1 + \omega^4} \text{sen}(\omega t) + \{\text{modos naturales}\} \quad (7.29)$$

Los modos naturales del sistema decaen a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , por tanto podemos concentrarnos sólo en la componente particular de la salida. Las componentes seno y coseno pueden combinarse en un solo término:

$$y(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) + \{\text{modos naturales}\} \quad (7.30)$$

donde  $A(\omega)$  y  $\phi(\omega)$  son la amplitud y ángulo de desfase, respectivamente definidos por:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{-\omega^2 + 1 + \omega^4}} \quad (7.31)$$

$$\phi(\omega) = -\arctan\left\{\frac{-\omega}{1 - \omega^2}\right\} \quad (7.32)$$

En estas expresiones se aprecia como la amplitud y la fase de la señal de salida dependen de la frecuencia  $\omega$ , es decir, corresponden a la respuesta en frecuencia del sistema, tal como se espera de la relación establecida en la subsección §7.3.3. Para este sistema la respuesta en frecuencia es

$$K(\omega) = H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (7.33)$$

La magnitud,  $A(\omega)$ , y la fase,  $\phi(\omega)$ , de  $H(j\omega)$  se muestran en la Figura 7.1, la que se puede construir con los comandos de MATLAB :

MATLAB

```
>>H=tf(1,[1 1 1]); w=[0:0.01:5];
>>h=freqresp(H,w);hw=h(:);
>>subplot(2,1,1);plot(w, abs(hw));
>>subplot(2,1,2);plot(w, unwrap(angle(hw))*180/pi);
```

□□□

## 7.4. Respuesta a impulso y respuesta a escalón

Como ya hemos visto, la función de transferencia está asociada a la respuesta a impulso del sistema. Por otro lado sabemos que si se aplica un impulso a la entrada, la respuesta *contiene solamente los modos naturales del sistema*; esto nos permite estudiar su comportamiento natural, que es independiente de la señal de entrada (características del transiente, velocidad de respuesta, etc.), a partir del análisis de la función  $H(s)$ .

Debido a la idealización implícita en la definición de un impulso es mucho más frecuente estudiar la dinámica natural de un sistema con la ayuda de la respuesta a escalón, es decir, cuando  $U(s) = 1/s$ .

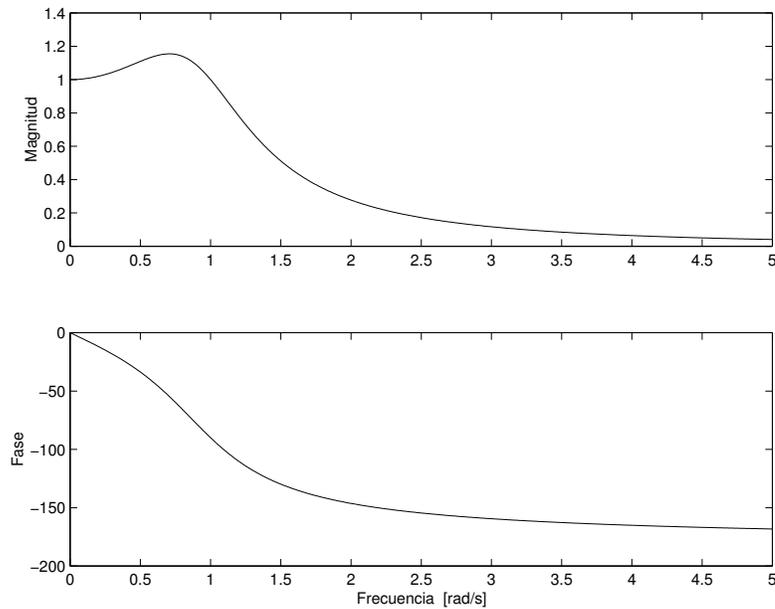


Figura 7.1: Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del sistema en Ejemplo 7.3.

La definición (7.9) nos permite expresar la **respuesta a escalón unitario** del sistema como:

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s} \quad (7.34)$$

Lo cual, **suponiendo que el sistema no tiene polos en el origen**, corresponde a:

$$y(t) = y_{\infty} + \text{modos naturales del sistema} \quad (7.35)$$

donde  $y_{\infty} = H(0)$ , en virtud del Teorema del Valor Final (ver Teorema D.2 en la página 434). Si el sistema es estable, entonces los modos naturales decaen exponencialmente a cero. Luego, para sistemas estables, la respuesta en estado estacionario está dada por la constante  $y_{\infty}$ . Note que si  $H(s)$  tiene uno o más ceros en  $s = 0$ , entonces  $y_{\infty} = 0$ .

**Ejemplo 7.4.** Consideremos el sistema definido por su EDS:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2u(t) \quad (7.36)$$

Si aplicamos transformada de Laplace a ambos lados, suponiendo condiciones

iniciales iguales a cero, podemos obtener la función de transferencia del sistema:

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = 2U(s) \quad (7.37)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 5s + 4} \quad (7.38)$$

La respuesta del sistema cuando  $u(t)$  es un Delta de Dirac se obtiene directamente de  $H(s)$

$$U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = H(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 4} \quad (7.39)$$

Donde podemos aplicar transformada inversa separando en fracciones parciales<sup>1</sup>, o bien con ayuda de MAPLE :

```
MAPLE
>with(inttrans):
>U(s):=laplace(Dirac(t),t,s);
>Y(s):=2/(s^2+5*s+4)*U(s);
>Y(s):=convert(Y(s),parfrac,s);
>y(t):=invlaplace(Y(s),s,t);
```

$$U(s) = 1 \quad (7.40)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 4} \quad (7.41)$$

$$Y(s) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+4} \right) \quad (7.42)$$

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \quad (7.43)$$

La respuesta a escalón unitario se puede obtener de manera similar

$$U(s) = \mathcal{L}\{\mu(t)\} = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 4} \cdot \frac{1}{s} \quad (7.44)$$

Donde se aplica transformada inversa:

```
MAPLE
>with(inttrans):
>U(s):=laplace(Heaviside(t),t,s);
>Y(s):=2/(s^2+5*s+4)*U(s);
>y(t):=invlaplace(Y(s),s,t);
```

<sup>1</sup>Este método se detalla en el Apéndice D.

$$U(s) = \frac{1}{s} \quad (7.45)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+4)} \quad (7.46)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-4t} \quad (7.47)$$

En la Figura 7.2 se puede apreciar tanto la respuesta a escalón recién obtenida así como la respuesta a impulso. Éstas se generaron en MATLAB, con los comandos `impulse` y `step`, que usan como argumento el sistema definido mediante su función de transferencia:

MATLAB

```
>>G=tf([2],[1 5 4]);
>>subplot(2,1,1),impulse(G);
>>subplot(2,1,2),step(G);
```

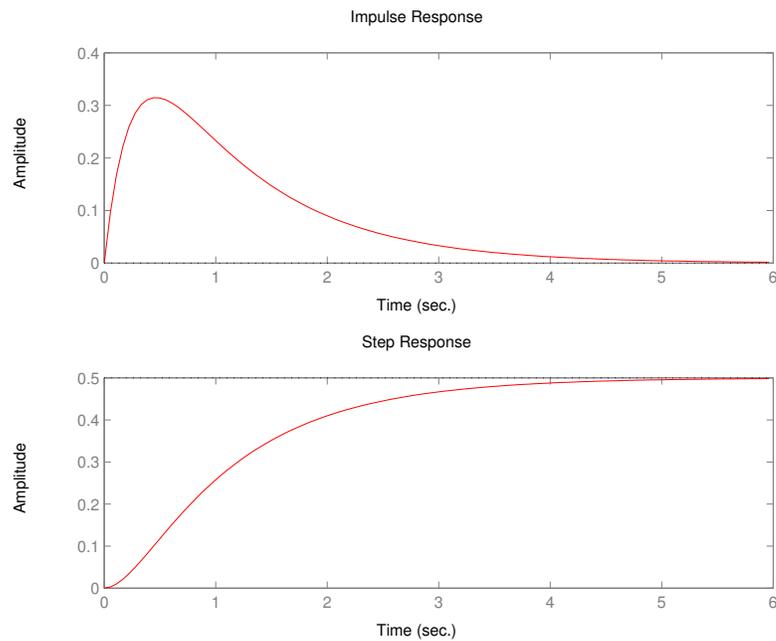


Figura 7.2: Respuestas a impulso y a escalón en Ejemplo 7.4

□□□

Es útil definir también un conjunto de parámetros que describen ciertas propiedades de la dinámica del sistema. Para identificar estos parámetros a definir consideremos una función de transferencia dada por:

$$G(s) = 9 \frac{-s + 1}{s^2 + 4s + 9} \quad (7.48)$$

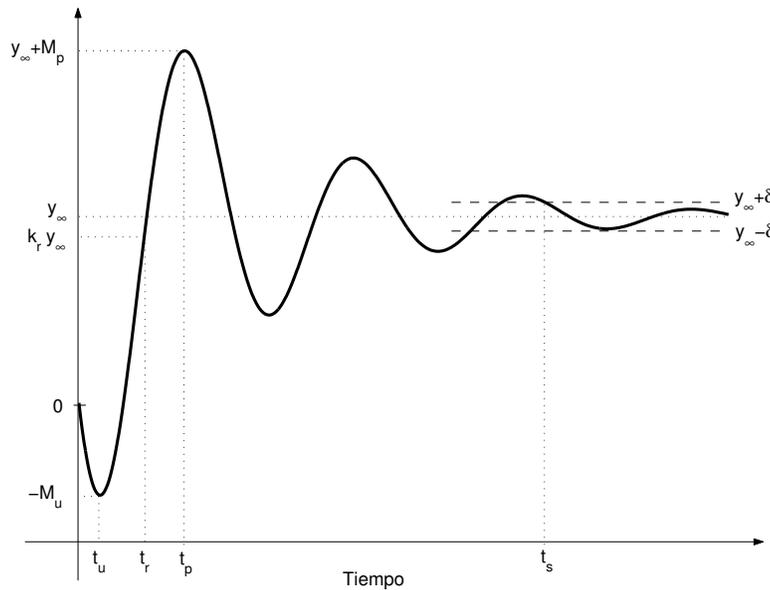


Figura 7.3: Índices definidos en la respuesta a escalón

La respuesta a escalón del sistema se muestra en la Figura 7.3. Entonces podemos definir los siguientes índices:

**Respuesta estacionaria,  $y_\infty$ :** el valor final de la respuesta a escalón, siempre y cuando la función de transferencia tenga todos sus polos en el SPI abierto.

**Tiempo de levantamiento (Rise time),  $t_r$ :** el instante de tiempo en que la respuesta a escalón alcanza por primera vez un fracción  $k_r < 1$  del valor de la respuesta estacionaria  $y_\infty$ . Usualmente se considera  $k_r = 1$ ; sin embargo, esta definición varía de autor a autor, por lo tanto debe tenerse claro de qué se está hablando al utilizarla.

**Sobre-respuesta (Overshoot),  $M_p$ :** el valor máximo que alcanza la respuesta a escalón, usualmente expresado como el porcentaje en que se sobrepasa la respuesta estacionaria  $y_\infty$ .

Índice	Definición	Valor en el ejemplo
$y_\infty$	respuesta estacionaria	1
$t_r$	tiempo de levantamiento	1.0
$M_p$	sobre-respuesta	0.5
$M_u$	máx. contra-respuesta	1.5
$t_s$	tiempo de asentamiento	1.8

Tabla 7.1: Índices de la respuesta a escalón para el sistema modelado por (7.48)

**Máxima contra-respuesta (Undershoot),  $M_u$**  : el máximo (en valor absoluto) que la respuesta a escalón alcanza bajo el cero.

**Tiempo de asentamiento (Settling time),  $t_s$**  : el tiempo luego del cual la respuesta a escalón queda confinada a una banda de desviación  $\pm\delta$ , alrededor del respuesta estacionaria. Esta desviación,  $\delta$ , se define generalmente como un porcentaje de  $y_\infty$ , del 2% o 5%.

Para el ejemplo en particular, definido en la ecuación (7.48) y cuya respuesta a escalón aparece en la Figura 7.3, el valor de los índices definidos se muestra en la Tabla 7.1.<sup>2</sup>

## 7.5. Respuesta a condiciones iniciales y señales arbitrarias.

De la misma manera que en la sección precedente se obtuvo las respuestas a impulso y a escalón del sistema, la transformada de Laplace permite obtener la respuesta del sistema cuando la entrada pertenece a una clase más general de señales. Sin embargo, la ventaja principal de esta transformada sobre la transformada de Fourier, es que permite *incluir el efecto de las condiciones iniciales*. Esto se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 7.5.** Consideremos el sistema definido por su EDS:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (7.49)$$

Obtengamos primero la salida del sistema cuando la entrada  $u(t)$  es cero, y las iniciales son  $y(0^-) = 1$  e  $y'(0^-) = 1$ . Si aplicamos transformada de Laplace, recordando la propiedad (7.5), tenemos que:

<sup>2</sup>Note que para este ejemplo en particular, hemos elegido un valor inusualmente grande para  $\delta$ , para una mejor visualización.

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + sY(s) - y(0^-) + Y(s) = 0 \quad (7.50)$$

$$s^2Y(s) - s - 1 + sY(s) - 1 + Y(s) = 0 \quad (7.51)$$

$$Y(s)(s^2 + s + 1) = s + 2 \quad (7.52)$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 + s + 1} \quad (7.53)$$

Donde, para obtener la transformada inversa, podemos observar que  $Y(s)$  tiene polos complejos, por lo que no es conveniente usar la expansión en fracciones parciales. Lo que sí se puede hacer es llevar  $Y(s)$  a la forma de la transformada del seno y del coseno con un corrimiento en  $s$ . Este corrimiento corresponde a una exponencial en el tiempo (vea (D.53) en el Apéndice D):

$$Y(s) = \frac{s + 2}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \quad (7.54)$$

$$= \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{3} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \quad (7.55)$$

Por tanto, la respuesta a las condiciones iniciales dadas es:

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \quad (7.56)$$

En la Figura 7.4 se puede apreciar el punto de partida y la pendiente inicial de la señal  $y(t)$ .

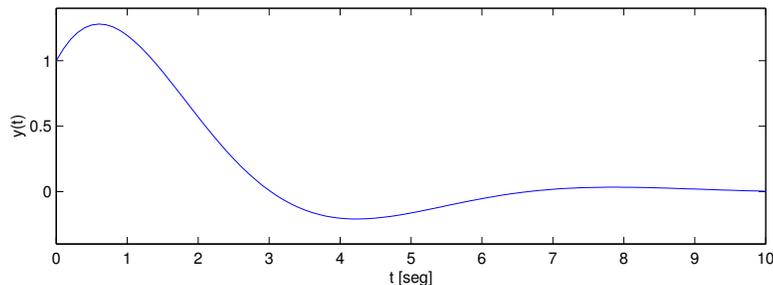


Figura 7.4: Respuesta a condiciones iniciales para el ejemplo 7.5

Es importante recalcar en este ejemplo que las condiciones iniciales que se insertan en los cálculos, al aplicar la transformada de Laplace, corresponden a  $t = 0^-$ . En otras palabras, son los valores de la función  $y(t)$  y de su derivada **justo antes** que el sistema comience a evolucionar bajo el efecto de la entrada

(que, en el ejemplo previo, es cero). Este alcance es importante pues, en ciertos casos, se puede producir una discontinuidad en la salida del sistema en el instante  $t = 0$ , es decir,  $y(0^+) \neq y(0^-)$ . Veamos esto en un ejemplo.

**Ejemplo 7.6.** Considere la red eléctrica de la Figura 7.5 en que se conecta la batería de  $1[V]$  en  $t = 0$ , y todas las condiciones iniciales son cero.

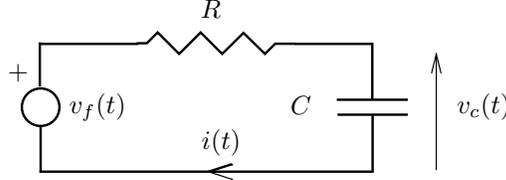


Figura 7.5: Circuito RC

Por ley de voltajes de Kirchoff tenemos:

$$v_f(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad (7.57)$$

$$\mu(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (7.58)$$

Derivando a ambos lados y aplicando la transformada de Laplace, con condición inicial cero:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) \quad (7.59)$$

$$s \frac{1}{s} = R[sI(s) - i(0^-)] + \frac{1}{C} I(s) \quad (7.60)$$

Despejando se obtiene:

$$I(s) = \frac{C}{sRC + 1} \quad (7.61)$$

Si aplicamos el Teorema del Valor Inicial (vea Apéndice D), tenemos que:

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sC}{sRC + 1} = \frac{1}{R} \quad (7.62)$$

Evidentemente, ésta es diferente a la corriente inicial, dada en  $t = 0^-$ . Esto se comprueba observando que la transformada inversa de  $I(s)$  es discontinua en  $t = 0$ :

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/R}{s + 1/RC}\right\} = \frac{1}{R} e^{-t/RC} \mu(t) \quad (7.63)$$

□□□

Consideremos ahora el caso en que la entrada es una señal arbitraria.

**Ejemplo 7.7.** Consideremos el mismo sistema del Ejemplo 7.6, pero en que ahora la entrada es un pulso definido como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t \leq 10 \\ 0 & ; t > 10 \end{cases} \quad (7.64)$$

Las condiciones iniciales son iguales a cero, por simplicidad. Note que no habría problemas en considerar el efecto de éstas, ya sea incluyéndolas en el desarrollo mediante transformada de Laplace, o bien, dada la linealidad del sistema, calculando su efecto en la salida por separado y sumándolo al efecto de la señal de entrada.

La función de transferencia del sistema, si se aplica transformada de Laplace, es:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (7.65)$$

La transformada de Laplace del pulso  $u(t)$  puede obtenerse sin problema, ya que esta función se expresa en términos de escalones y se puede utilizar la propiedad de corrimiento temporal, que se traduce en una exponencial en  $s$  (vea (D.38) en el Apéndice D):

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\mu(t - t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$$

Por lo tanto:

$$u(t) = \mu(t) - \mu(t - 10) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} - e^{-10s}\frac{1}{s} \quad (7.66)$$

Luego, la transformada de la salida es:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{1 - e^{-10s}}{s(s^2 + s + 1)} \quad (7.67)$$

Note que para obtener la inversa, dado que la exponencial sólo representa un corrimiento en el tiempo, podemos concentrarnos sólo en la parte **racional** de  $Y(s)$ , para luego aplicarle dicha traslación temporal. Es decir, consideremos:

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \quad (7.68)$$

donde se observa que tenemos la forma de la transformada de un escalón, del seno y del coseno, éstas últimas con un corrimiento en la variable  $s$ . Este corrimiento en  $s$  corresponde a una exponencial en el tiempo (Apéndice D), por lo tanto:

$$f(t) = \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \right] \mu(t) \quad (7.69)$$

Luego la salida es:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (1 - e^{-10s})F(s) \} = f(t) - f(t - 10) \quad (7.70)$$

es decir:

$$\begin{aligned} y(t) = & \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \right] \mu(t) \\ & - \left[ 1 - e^{-\frac{1}{2}(t-10)} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-10)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-10)\right) \right) \right] \mu(t-10) \end{aligned} \quad (7.71)$$

En la Figura 7.6 se muestra el pulso de entrada  $u(t)$  y la correspondiente respuesta del sistema,  $y(t)$ .

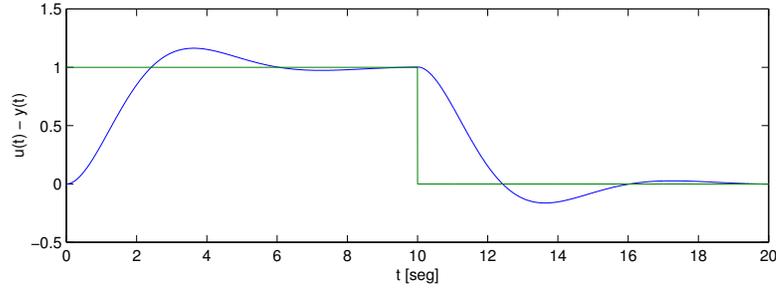


Figura 7.6: Pulso de entrada y respuesta del sistema del ejemplo 7.7.

## 7.6. Estabilidad

Hasta aquí hemos visto que la respuesta de un sistema que tiene una función de transferencia  $H(s)$  es de la forma:

$$Y(s) = H(s)U(s) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\beta_{ki}}{(s - \lambda_k)^i} \quad (7.72)$$

Donde el valor de cada  $\beta_{ki}$  depende de las condiciones iniciales, y donde hemos supuesto que cada polo ubicado en  $s = \lambda_k$ , tiene multiplicidad  $n_k$ . Esta suposición implica a su vez que  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ .

Recordando la definición de **estabilidad**, un sistema es estable si cualquier entrada acotada produce una salida también acotada, para cualquier condición inicial acotada. Si observamos la ecuación (7.72) podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable es que sus polos, en el denominador de las fracciones del segundo término de la ecuación, den origen a señales que decaigan exponencialmente. Esto se traduce en que los polos del sistema deben tener parte real estrictamente negativa, es decir, deben estar ubicados sobre el **semiplano izquierdo (SPI) abierto** del plano complejo  $\overline{s}$ . Esta condición establece que, para sistemas continuos, el límite de estabilidad en un plano complejo  $\overline{s}$  en que se ubican sus polos, es el eje imaginario .

**Ejemplo 7.8.** *Consideremos el sistema del ejemplo 7.1. Los polos de su función de transferencia están ubicados en  $s = -2$  y  $s = 0$ . Éstos **no** están en el SPI abierto (el 0 está en el SPI cerrado). Por tanto el sistema no es estable. Se deja al lector el verificar, usando la transformada de Laplace, que una entrada constante (diferente de cero) produce una salida que crece indefinidamente.*

□□□

### 7.6.1. Análisis de polinomios

La discusión anterior pone de manifiesto la importancia de conocer la ubicación de los polos de un sistema, para establecer si se trata o no de un sistema estable. Sin embargo, el determinar la ubicación exacta de las raíces de la ecuación:

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (7.73)$$

puede ser una tarea bastante engorrosa cuando  $n \geq 3$ . Por esto en el análisis del polinomio  $A(s)$ , más que determinar exactamente sus raíces, lo que nos interesa es poder asegurar si éstas tienen o no parte real estrictamente negativa. Para esto, consideremos el polinomio  $p(s)$  definido como:

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (7.74)$$

donde  $a_i \in \mathbb{R}$ .

El problema a estudiar se refiere a determinar si este polinomio tiene o no todas sus raíces con parte real estrictamente negativa, o de manera equivalente, si tiene o no raíces con parte real mayor o igual que cero. La idea puede naturalmente ser resuelta calculando las  $n$  raíces de  $p(s)$ . Sin embargo en muchas aplicaciones resulta de especial interés estudiar la relación entre los coeficientes del polinomio con la ubicación de sus raíces.

Los polinomios que tienen todas sus raíces en el semiplano izquierdo cerrado se conocen como polinomios **Hurwitz**. Si sus raíces tienen parte real estrictamente negativa, es decir, se ubican sobre el SPI abierto, los denominaremos **estrictamente Hurwitz**.

Del polinomio definido en (7.74) podemos observar interesantes propiedades que por supuesto son válidas para los polinomios en general. Las que nos interesan en este caso son aquellas que nos entregan información sobre el signo de la parte real de las raíces, como las que se detallan a continuación:

**Propiedad 1** El coeficiente  $a_{n-1}$  cumple con:

$$a_{n-1} = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (7.75)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son las raíces de  $p(s)$ .

Esta propiedad es directa de notar que el polinomio  $p(s)$  puede escribirse como:

$$p(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) \quad (7.76)$$

entonces, al expandir el producto (7.76) y observar el coeficiente que acompaña a la potencia  $(n-1)$ -ésima de  $s$ , se obtiene (7.75).

**Propiedad 2** El coeficiente  $a_0$  cumple con:

$$a_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (7.77)$$

Esta propiedad también se obtiene de expandir el producto (7.76) y observar el término constante.

**Propiedad 3** Si todas las raíces de  $p(s)$  tienen parte real negativa, entonces  $a_i > 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Para demostrar esta propiedad procedemos de la siguiente forma:

- a) Las raíces de  $p(s)$  pueden ser reales o complejas, y si complejas deben aparecer en pares conjugados (dado que  $p(s)$  es un polinomio con coeficientes reales).
- b) En base a lo anterior, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existen  $n_1$  raíces reales y  $n_2$  pares de raíces complejas. Por lo tanto  $n_1 + 2n_2 = n$ .
- c) Si todas las raíces tienen parte real negativa, entonces se pueden expresar como:

$$\lambda_i = -|\alpha_i| \quad i = 1, 2, \dots, n_1 \quad (7.78)$$

$$\lambda_{n_1+i} = \lambda_{n_1+n_2+i}^* = -|\sigma_i| + j\omega_i \quad i = 1, 2, \dots, n_2 \quad (7.79)$$

- d) De esta forma, tenemos que

$$p(s) = \prod_{i=1}^{n_1} (s + |\alpha_i|) \prod_{l=1}^{n_2} \{(s + |\sigma_l|)^2 + \omega_l^2\} \quad (7.80)$$

donde, el segundo producto ha agrupado, en factores cuadráticos, los pares conjugados.

- e) De (7.80) se observa que  $p(s)$  corresponde al producto de polinomios de primer y segundo orden, cuyos coeficientes son todos reales y positivos. Como los coeficientes de  $p(s)$  son suma de productos de los coeficientes de estos polinomios de primer y segundo orden, la propiedad queda demostrada.

Note que esta propiedad es necesaria para que  $p(s)$  sea un polinomio estrictamente Hurwitz, pero no es suficiente, **excepto en el caso en que  $n = 1$  y  $n = 2$ .**

**Propiedad 4** Si alguno de los coeficientes es negativo o cero, entonces una o más raíces de  $p(s)$  tienen parte real positiva o cero. Esta propiedad se deduce directamente de la propiedad anterior.

### 7.6.2. Algoritmo de Routh-Hurwitz

Además de los criterios que nos entregan las propiedades anteriores, uno de los métodos clásicos para determinar la naturaleza Hurwitz de un polinomio es el algoritmo de Routh, también conocido como algoritmo o criterio de Routh-Hurwitz, que a continuación se explica.

Consideremos un polinomio  $p(s)$  de grado  $n$ , definido como:

$$p(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (7.81)$$

$s^n$	$\gamma_{0,1}$	$\gamma_{0,2}$	$\gamma_{0,3}$	$\gamma_{0,4}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\gamma_{1,3}$	$\gamma_{1,4}$	$\dots$
$s^{n-2}$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{2,3}$	$\gamma_{2,4}$	$\dots$
$s^{n-3}$	$\gamma_{3,1}$	$\gamma_{3,2}$	$\gamma_{3,3}$	$\gamma_{3,4}$	$\dots$
$s^{n-4}$	$\gamma_{4,1}$	$\gamma_{4,2}$	$\gamma_{4,3}$	$\gamma_{4,4}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$s^2$	$\gamma_{n-2,1}$	$\gamma_{n-2,2}$			
$s^1$	$\gamma_{n-1,1}$				
$s^0$	$\gamma_{n,1}$				

Tabla 7.2: Arreglo de Routh

El algoritmo de Routh se basa en la construcción del arreglo numérico que se muestra en la Tabla 7.2. donde los términos de las dos primeras filas se calculan

según:

$$\gamma_{0,i} = a_{n+2-2i}; \quad i = 1, 2, \dots, m_0 \quad (7.82)$$

$$\gamma_{1,i} = a_{n+1-2i}; \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (7.83)$$

con  $m_0 = (n + 2)/2$  y  $m_1 = m_0 - 1$  para  $n$  par y  $m_1 = m_0$  para  $n$  impar.

Mientras que los términos de la tercera fila en adelante se calculan según

$$\gamma_{k,j} = \frac{\gamma_{k-1,1} \gamma_{k-2,j+1} - \gamma_{k-2,1} \gamma_{k-1,j+1}}{\gamma_{k-1,1}} \quad ; \quad k = 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m_j \quad (7.84)$$

donde  $m_j = \max\{m_{j-1}, m_{j-2}\} - 1$ , mientras que se asigna valor cero al coeficiente  $\gamma_{k-1,j+1}$ , cuando no está definido en el arreglo de Routh 7.2.

Una vez construido el arreglo de Routh podemos aplicar el siguiente resultado:

Dado un polinomio  $p(s)$  como el definido en (7.81) y el arreglo asociado a él 7.2, entonces el número de raíces de  $p(s)$  con parte real mayor que cero es igual a número de *cambios de signo* en la primera columna del arreglo.

La demostración del criterio de Routh está más allá del alcance del libro, pero un tratamiento más completo del tema se puede hallar, por ejemplo, en [14, 32].

**Ejemplo 7.9.** Para ilustrar el uso del algoritmo de Routh-Hurwitz consideremos el siguiente sistema:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{d y(t)}{dt} + 3y(t) = u(t) \quad (7.85)$$

Su función de transferencia está dada por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 2s + 3} \quad (7.86)$$

Por tanto, para la estabilidad debemos analizar las raíces del polinomio denominador:

$$p(s) = s^3 + s^2 + 2s + 3 \quad (7.87)$$

El arreglo de Routh en este caso es:

$s^3$	1	2
$s^2$	1	3
$s^1$	$\frac{2-3}{1} = -1$	0
$s^0$	3	0

Donde se observa de inmediato que en la primera columna aparece un  $-1$ , por tanto existen raíces con parte real positiva. Lo que se puede confirmar, por ejemplo, con ayuda de MATLAB. Éste permite obtener las raíces de un polinomio dados sus coeficientes, mediante el comando `roots` :

```

MATLAB
>> roots([1 1 2 3])

ans =
    0.1378 + 1.5273i
    0.1378 - 1.5273i
   -1.2757

```

□□□

## 7.7. Polos, ceros y la respuesta temporal

A continuación examinaremos algunas propiedades fundamentales de los polos y ceros de la función de transferencia de un sistema, y su influencia sobre las características de la respuesta de un sistema lineal.

Consideremos una función de transferencia de la forma general:

$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - \beta_i)}{\prod_{l=1}^n (s - \alpha_l)} \quad (7.88)$$

donde  $\alpha_l \in \mathbb{C}$  y  $\beta_i \in \mathbb{C}$ . Si suponemos que no hay valores de  $l$  y de  $i$  tales que  $\alpha_l = \beta_i$  entonces,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son los ceros y los polos de la función de transferencia, respectivamente. El grado relativo, antes definido es  $n_r \triangleq n - m$ .

Estaremos particularmente interesados en aquellos ceros ubicados en el eje imaginario o en su cercanía, y en aquellos polos ubicados en el semiplano derecho. Los polos y ceros ubicados en estas regiones juegan un rol fundamental en la dinámica del sistema.

Una clase especial de función de transferencia es aquella que tiene todos sus ceros y sus polos en el semiplano izquierdo (SPI) del plano complejo  $[s]$ . Tradicionalmente éstas se denominan **funciones de transferencia de fase mínima**. Sin embargo, de aquí en adelante usaremos este nombre para referirnos simplemente a funciones de transferencia sin ceros en el semiplano derecho (SPD), que tengan o no polos en él. Diremos que un cero tiene *fase no mínima* si se encuentra ubicado en el SPD cerrado, de otra forma se denominará cero de fase mínima. Si hablamos de una **función de transferencia estable** nos referimos a que todos sus polos se ubican sobre el SPI abierto; si decimos que **inestable**, es porque al menos uno de sus polos se encuentra en el SPD cerrado. Los polos en sí mismos también se pueden denominar *estables* o *inestables*, si se encuentran dentro o fuera del SPI abierto, respectivamente <sup>3</sup>.

A continuación examinaremos la influencia sobre la respuesta transiente de un sistema de los polos y ceros de su función de transferencia.

<sup>3</sup>En ocasiones, por abuso de lenguaje, los ceros de fase no mínima también se les denomina ceros *inestables*, dado que se encuentran en la región del plano  $s$  en que los polos son inestables.

### 7.7.1. Polos

Como el lector recordará de sus cursos de matemáticas, una función racional siempre puede descomponerse en fracciones parciales, tal es el caso también de la función de transferencia de un sistema en la variable  $s$ . Cada uno de los términos de esta expansión contiene ya sea un polo real simple, un par de polos complejos conjugados o múltiples combinaciones de polos repetidos. Por tanto, para conocer el efecto de los polos en la respuesta transitoria de un sistema basta conocer el efecto ocasionado por los polos de primer y segundo orden y su interacción.

Un polo de primer orden contribuye a la descomposición en fracciones parciales, en general, con un término de la forma:

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \quad (7.89)$$

Mientras que un polo de segundo orden contribuye a la expansión con un término:

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} \quad (7.90)$$

Cada polo genera un término específico que coincide justamente con cada uno de los **modos naturales** en la respuesta del sistema a un impulso en la entrada. Estos modos están presentes también en la respuesta a cualquier entrada al sistema (excepto en casos muy excepcionales cuando hay coincidencia de polos con ceros). El tipo de modo natural asociado a cada polo de un sistema depende de la ubicación de éste sobre el plano complejo  $\boxed{s}$ , exactamente equivalente a la ubicación de cada frecuencia natural  $\lambda$  sobre un plano complejo, como se vio en el Capítulo 3. Para ilustrar esto podemos apreciar en la Figura 7.7 las diferentes respuestas a impulso de un sistema que tiene por función de transferencia:

$$H_1(s) = \frac{1}{s - p} \quad (7.91)$$

para los polos ubicados sobre el eje real, y

$$H_2(s) = \frac{1}{(s - (a + bj))(s - (a - bj))} \quad (7.92)$$

para los polos complejos, que aparecen emparejados con su conjugado.

En virtud de estas analogías es que nos referiremos, en general, como *polos rápidos* a aquellos que se encuentran más alejados del límite de estabilidad que los demás polos del sistema. Esto es equivalente que considerar que la respuesta transiente asociada a estos polos desaparece más rápido que aquella asociada a los otros polos, tal como puede apreciarse en la Figura 7.7 al comparar la respuesta a impulso de un sistema con un polo en  $p_2 = -4$  con las demás. Por otro lado llamaremos *polos dominantes* o *polos lentos* a aquellos que se

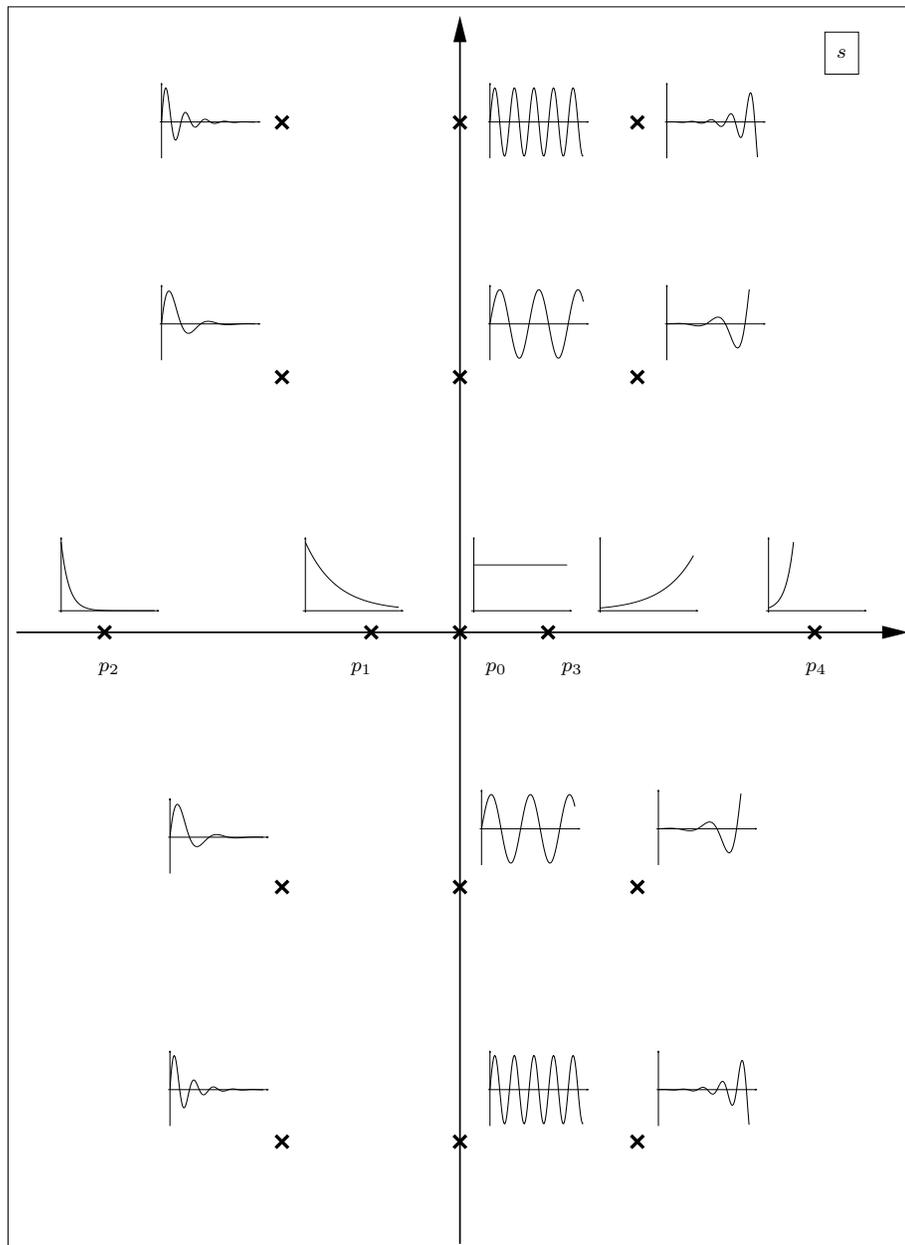


Figura 7.7: Respuesta a impulso de diferentes sistemas de acuerdo a la ubicación de sus polos en el plano complejo

encuentran en el SPI abierto, pero más cercanos al límite de estabilidad que el resto de los polos de sistema. Esto equivale a decir que el transiente asociado a los polos dominantes decae más lento que los demás modos naturales, como también puede apreciarse en la figura 7.7, para el polo en  $p_1$ .

Por ejemplo, si tenemos un sistema cuyos polos están ubicados en  $(-1; -2 \pm j6; -4; -5 \pm j3)$ , podemos decir que el polo dominante es  $-1$  y los polos rápidos son los que se encuentran en  $-5 \pm j3$ .

### 7.7.2. Ceros

En general, el efecto de la ubicación de los polos en la dinámica de un sistema puede entenderse sin demasiada dificultad dada su directa relación con la estabilidad y las características generales de la respuesta del sistema. De hecho en la literatura sobre sistemas y su estabilidad se puede encontrar mucha más información que la aquí detallada.

Por el contrario, el efecto de los ceros en el análisis del comportamiento de un sistema a menudo ha sido subestimado. Sin embargo, en los últimos años se ha retomado el estudio del efecto de los ceros sobre la respuesta de un sistema, que ahora son reconocidos por su importancia, por ejemplo, al definir criterios de diseño de sistemas de control.

Es así como, mientras que los polos de un sistema están asociados a la presencia de sus modos naturales aislados, los ceros reflejan de algún modo la **interacción** entre éstos, por ejemplo, en el caso en que la salida de un sistema está formada por la suma de modos naturales diferentes. Además, a pesar que la ubicación de los polos determina los modos naturales de un sistema, es la ubicación de los ceros la que determina la *proporción* en que los modos aparecen combinados en la salida. En estas combinaciones los modos naturales toman diferente fuerza, pudiendo ser su efecto, en algunos casos, casi imperceptible. De hecho, la ubicación relativa de polos y ceros tiene directa relación con los conceptos de observabilidad y controlabilidad, como se detalla en el Capítulo 10.

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo.

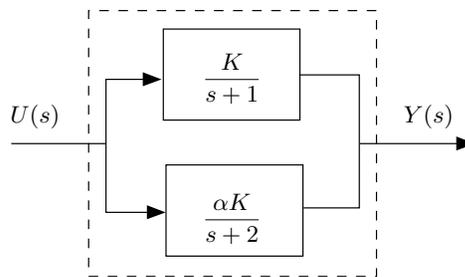


Figura 7.8: Sistema con interacción aditiva entre dos estados

**Ejemplo 7.10.** Consideremos el sistema de la Figura 7.8, cuya función de transferencia sistema está dada por:

$$Y(s) = \left( \frac{K}{s+1} + \frac{\alpha K}{s+2} \right) U(s) \quad (7.93)$$

$$G(s) = K \frac{(1+\alpha)s + (2+\alpha)}{(s+1)(s+2)} \quad (7.94)$$

Este sistema tiene sus polos en  $s = -1, -2$  y un cero en  $s = \frac{-(2+\alpha)}{1+\alpha}$ . Es decir, la ubicación está directamente relacionada con el peso de cada uno de los modos naturales en la respuesta del sistema, por ejemplo, a un impulso unitario en la entrada:

$$y(t) = K(e^{-t} + \alpha e^{-2t}) \quad (7.95)$$

Si tomamos un valor pequeño,  $\alpha = 0,1$ , la función de transferencia es:

$$G(s) = 1,1K \frac{(s+1,909)}{(s+1)(s+2)} \quad (7.96)$$

En ésta puede observarse la cercanía del cero al polo en  $s = -2$ . La respuesta a impulso será en este caso:

$$y(t) = 1,1K(e^{-t} + 0,1e^{-2t}) \quad (7.97)$$

En que se aprecia la pequeña magnitud con que aparece el modo natural más rápido. Es decir, el cero a medida que se acerca al polo en  $s = -2$  produce una **cuasi-cancelación**, que será total cuando  $\alpha = 0$ . En este último caso definitivamente no aparece este modo natural en la salida del sistema, ya que el polo ha sido cancelado, y la función de transferencia se ha reducido a:

$$G(s) = \frac{K}{s+1} \quad (7.98)$$

Invitamos al lector a estudiar el caso análogo cuando  $\alpha$  alcanza valores muy grandes y cuál es su efecto sobre el otro modo natural del sistema. Además puede analizarse qué sucede con el sistema cuando el parámetro  $\alpha$  toma valores negativos. ¿Qué pasa si  $\alpha = -1$  o  $\alpha = -2$  ?

□□□

Al igual como antes se definieron los polos rápidos y lentos de un sistema, pueden definirse de manera análoga los *ceros rápidos* y *lentos*. Ceros rápidos son aquellos que están más alejados del límite de estabilidad que los polos dominantes del sistema, por otro lado los ceros lentos son aquellos que se encuentran más cerca del límite de estabilidad que los polos dominantes del sistema. Para apreciar el efecto de los ceros presentamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 7.11.** Efecto de los ceros en la respuesta a escalón.

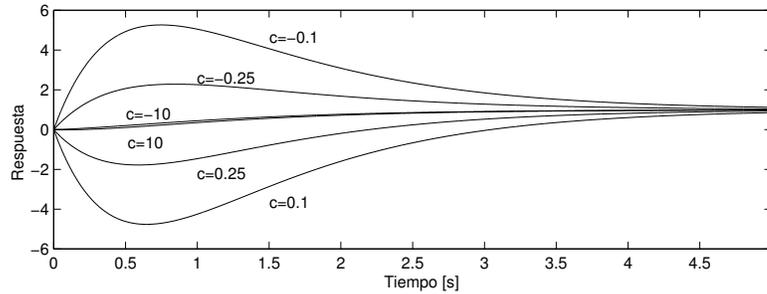


Figura 7.9: Efecto de la ubicación de los ceros sobre la respuesta a escalón

Considere un sistema cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{-s + c}{c(s + 1)(0,5s + 1)} \quad (7.99)$$

Esta estructura de la función de transferencia permite estudiar el efecto de la ubicación de un cero en la respuesta del sistema sin alterar la ubicación de los polos ni la ganancia a continua.

En este sistema observamos dos modos naturales:  $e^{-t}$  y  $e^{-2t}$ . El primero de éstos estará casi ausente de la respuesta a medida que  $c$  se acerca a  $-1$ . Algo análogo sucede para el segundo modo a medida que  $c$  se acerca a  $-2$ . Esta situación de cuasi cancelaciones también fue mencionada en el ejemplo anterior.

La situación más general se aprecia en la figura 7.9. En ella, se indica el valor de  $c$  al lado de cada una de las respuestas graficadas. Podemos apreciar que un cero rápido, i.e.  $|c| \gg 1$ , no afecta significativamente la respuesta transiente. Cuando el cero es lento y estable obtenemos un gran overshoot, mientras que cuando es lento, pero inestable, el undershoot es el que crece en magnitud. El efecto de los ceros puede parecer demasiado crítico en este ejemplo, en que ambos superan el 400%, sin embargo, el lector puede verificar que puede ser aún mayor si el cero es más cercano al origen.

□□□

### 7.7.3. Respuesta inversa o contrarespuesta (*undershoot*)

La Figura 7.3 en la página 167 sugiere que existen casos en los que, en la presencia de una excitación mayor que cero, la respuesta del sistema se hace negativa durante algún lapso de tiempo no despreciable. Este comportamiento también aparece en la Figura 7.9. Un resultado muy fuerte es el siguiente.

**Lema 7.1.** Considere un sistema lineal estable con función de transferencia  $H(s)$ , y con un cero real en  $s = c$ , donde  $c > 0$ , entonces la respuesta a un escalón positivo se hace negativa durante uno o más lapsos no despreciables.

**Demostración**

La respuesta del sistema está dada por:

$$Y(s) = H(s) \frac{K}{s} \quad ; \quad K > 0 \quad (7.100)$$

Entonces:

$$H(s) \frac{K}{s} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt; \quad \Re\{s\} > 0 \quad (7.101)$$

Note que la región de convergencia queda determinada, por un lado, por el hecho que el sistema es estable, por lo cual la transformada de  $h(t)$  está bien definida para  $\Re\{s\} \geq 0$  y, por otro lado, por el hecho que la respuesta a un escalón está bien definida para  $\Re\{s\} > 0$ . En consecuencia, la región de convergencia para  $y(t)$  es  $\Re\{s\} > 0$ .

Si ahora, en la ecuación (7.101), hacemos  $s = c$  (note que, por ser  $c > 0$ , está en la región de convergencia) obtenemos, aplicando el hecho que  $H(c) = 0$ :

$$H(c) \frac{K}{c} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-ct} dt = 0 \quad (7.102)$$

Como la integral es cero, y  $e^{-ct} > 0, \forall t$ , necesariamente  $y(t)$  debe ser negativa en uno o más intervalos de tiempo.

□□□

El lema precedente se puede generalizar para cualquier entrada  $u(t)$  acotada, pues en dicho caso  $U(s)$  no posee polos en el SPD abierto, y la demostración continúa siendo válida. En lo medular, el lema justifica y asegura la presencia de *undershoot*, como el sugerido en la Figura 7.3 en la página 167. Sin embargo, este comportamiento inverso se puede manifestar en diferentes formas, tal como ilustra la Figura 7.10.

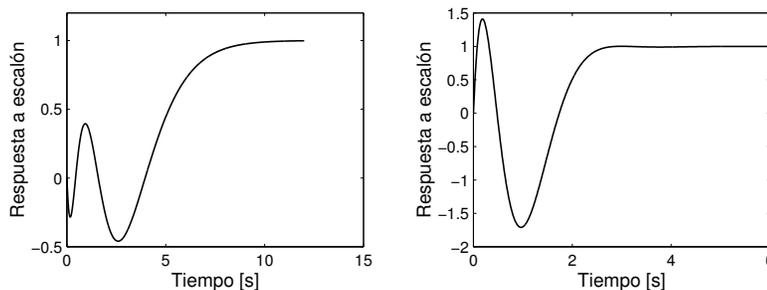


Figura 7.10: Distintas formas de respuesta inversa

#### 7.7.4. Sistema canónico de segundo orden

Para el caso de un par de polos complejos conjugados, es usual estudiar un sistema canónico estable de segundo orden con la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7.103)$$

donde  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ) es conocido como el *factor de amortiguamiento* y  $\omega_n$ , como la *frecuencia natural no amortiguada*. También definimos, para uso futuro, la *frecuencia natural amortiguada*,  $\omega_d$ , como:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (7.104)$$

Este sistema tiene dos polos complejos conjugados,  $s_1$  y  $s_2$ , definidos por:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = \omega_n e^{\pm j(\pi - \beta)} \quad (7.105)$$

donde  $\beta$  es el ángulo definido por  $\cos \beta = \xi$ .

Para este sistema, la transformada de Laplace de su respuesta a escalón unitario está dada por:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s} = \frac{\omega_n^2}{[(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2]s} \quad (7.106)$$

Realizando una expansión en fracciones parciales se llega a:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (7.107)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left[ \sqrt{1 - \xi^2} \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \xi \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] \quad (7.108)$$

Aplicando, finalmente, la transformada de Laplace inversa obtenemos:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\omega_d t + \beta) \quad (7.109)$$

Las características principales de esta respuesta aparecen en la Figura 7.11, donde  $y_\infty = 1$  y  $T_d = 2\pi/\omega_d$ .

Podemos también calcular los indicadores descritos en la Figura 7.3 en la página 167.

**Tiempo de levantamiento.** Para este caso, usamos  $k_r = 1$  (refiérase a la Figura 7.3 en la página 167) obteniendo:

$$\frac{e^{-\xi\omega_n t_r}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\omega_d t_r + \beta) = 0 \quad (7.110)$$

De aquí se llega a:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (7.111)$$

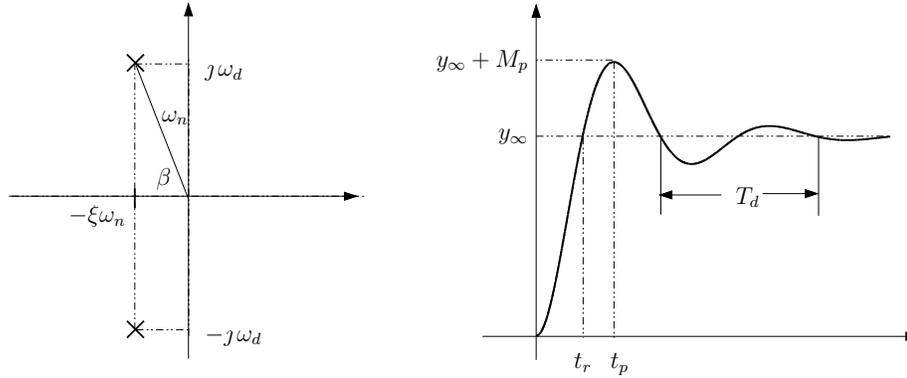


Figura 7.11: Localización de los polos y respuesta a escalón unitario de un sistema canónico de segundo orden.

**Sobrerrespuesta (*overshoot*).** La máxima sobrerrespuesta,  $M_p$ , y el instante en el cual éste ocurre,  $t_p$ , pueden ser calculados derivando  $y(t)$ , y luego igualando a cero esta derivada:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} [-\xi\omega_n \text{sen}(\omega_d t + \beta) + \omega_d \text{cos}(\omega_d t + \beta)] \quad (7.112)$$

Así, tenemos que  $\omega_d t_p = \pi$  y el instante en que ocurre la sobrerrespuesta,  $t_p$ , es:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T_d}{2} \quad (7.113)$$

A su vez, la magnitud de la sobrerrespuesta está dada por:

$$M_p = y(t_p) - 1 = -\frac{e^{-\frac{\pi\xi\omega_n}{\omega_d}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\pi + \beta) = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (7.114)$$

Las expresiones anteriores sugieren que un valor pequeño para  $\xi$  genera un tiempo de levantamiento pequeño, al costo de una gran sobrerrespuesta. También podemos apreciar que la velocidad de decaimiento y, como consecuencia, el tiempo de asentamiento, están determinados por el producto  $\xi\omega_n$  (corresponde a la magnitud de la parte real de los polos).

Aunque este sistema canónico parece ser un caso muy particular, ocurre que con frecuencia, y en distintas aplicaciones, el sistema bajo estudio está *dominado* por un par de polos complejos conjugados. Por otro lado, las fórmulas desarrolladas para calcular los indicadores de la respuesta a escalón no son aplicables a sistemas no canónicos; sin embargo, los conceptos asociados tiene validez conceptual.

## 7.8. Relaciones entre las transformadas de Laplace y de Fourier

Al terminar este capítulo observamos que hemos desarrollado una forma de describir las señales y los sistemas lineales de tiempo continuo, usando una transformada alternativa a la de Fourier, descrita en el Capítulo 6. Es, por lo tanto, de interés precisar similitudes y diferencias. Para estos efectos, consideraremos una señal  $h(t)$ , la que puede corresponder, como caso especial, a la respuesta de un sistema a un delta de Dirac, con condiciones iniciales iguales a cero. Denotaremos por  $H_{\mathcal{F}}(j\omega)$  y por  $H_{\mathcal{L}}(s)$ , las transformadas de Fourier y de Laplace, respectivamente. El análisis comparativo arroja los siguientes resultados:

- R.1 La transformada de Fourier, cuando existe, requiere conocer  $h(t) \forall t \in \mathbb{R}$ . En cambio, la transformación de Laplace sólo requiere conocer  $h(t), \forall t \geq 0$ . Se debe agregar que algunos autores definen la transformada de Laplace **bilateral**, la que está también dada por (7.1), pero con el límite inferior de la integral igual a  $-\infty$ .
- R.2 La transformación de Fourier requiere que  $|h(t)|$  sea acotado  $\forall t \in \mathbb{R}$ . En cambio la transformación de Laplace sólo requiere que exista un número  $\sigma \in \mathbb{R}$ , tal que  $|h(t)e^{-\sigma t}|$  esté acotado  $\forall t > 0$ . En rigor, la transformada de Fourier existe aunque  $|h(t)|$  no sea acotada, siempre que el conjunto de puntos donde esto ocurra tenga medida cero [38]. Una afirmación análoga se puede hacer para la transformación de Laplace.
- R.3 Si  $h(t)$  es acotada, pero no converge a cero para  $t \rightarrow \pm\infty$ , entonces su transformada de Fourier contiene deltas de Dirac en frecuencia. Ése no es el caso de la transformación de Laplace.
- R.4 Si  $|h(t)|$  es integrable, lo cual implica que converge a cero para  $t \rightarrow \infty$ , y si además  $h(t) = 0, \forall t < 0$ , entonces

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H_{\mathcal{F}}(j\omega) = \mathcal{L}\{h(t)\}|_{s=j\omega} = H_{\mathcal{L}}(j\omega) \quad (7.115)$$

- R.5 Si  $h(t)$  no es absolutamente integrable, pero  $H_{\mathcal{F}}(j\omega)$  existe, entonces la relación (7.115) no se cumple, aunque  $h(t) = 0 \forall t < 0$ . Esto ocurre, por ejemplo cuando  $h(t)$  es la respuesta a impulso de Dirac de un sistema lineal, con condiciones iniciales iguales a cero y con una o más frecuencias naturales **no repetidas** en el eje imaginario. Estas condiciones dicen que  $H_{\mathcal{L}}(s)$  tiene polos en el eje imaginario, digamos en  $s = j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_p$ , y que  $H_{\mathcal{F}}(j\omega)$  contiene deltas de Dirac en esas mismas frecuencias.
- R.6 Si se cumplen las condiciones especificadas en R.5, es posible obtener  $H_{\mathcal{F}}(j\omega)$  a partir de  $H_{\mathcal{L}}(s)$ . Para ello basta expandir  $H_{\mathcal{L}}(s)$  en fracciones parciales y luego considerar en forma separada las fracciones asociadas a

polos en el eje imaginario. Para ellas se usan los siguientes resultados:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_\ell}{s - j\omega_\ell} \right\} = A_\ell e^{j\omega_\ell t} \mu(t) \quad (7.116)$$

$$\mathcal{F} \{ A_\ell e^{j\omega_\ell t} \mu(t) \} = \frac{A_\ell}{s - j\omega_\ell} + \pi A_\ell \delta(\omega - \omega_\ell) \quad (7.117)$$

donde

$$A_\ell = \lim_{s \rightarrow j\omega_\ell} (s - j\omega_\ell) H_{\mathcal{L}}(s) \quad (7.118)$$

**Ejemplo 7.12.** Suponga que un sistema tiene la función de transferencia dada por

$$H_{\mathcal{L}}(s) = \frac{8(s+1)(s+2)}{s(s+4)(s^2+4)} \quad (7.119)$$

donde se observa que el sistema tiene un polo estable y tres polos en el eje imaginario, en  $s = 0$ ,  $s = j2$  y  $s = -j2$ . Al expandir en fracciones parciales se obtiene

$$H_{\mathcal{L}}(s) = \frac{-0,6}{s+4} + \frac{1}{s} + \frac{-0,2 - j1,4}{s - j2} + \frac{-0,2 + j1,4}{s + j2} \quad (7.120)$$

Por lo cual

$$H_{\mathcal{F}}(j\omega) = \frac{-0,6}{j\omega + 4} + \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + \frac{-0,2 - j1,4}{j\omega - j2} + \frac{-0,2 + j1,4}{j\omega + j2} + \pi \{ (-0,2 - j1,4)\delta(\omega - 2) + (-0,2 + j1,4)\delta(\omega + 2) \} \quad (7.121)$$

□□□

La ecuación precedente permite inducir la fórmula general para estos casos, la que resulta ser:

$$H_{\mathcal{F}}(j\omega) = H_{\mathcal{L}}(j\omega) + \pi \sum_{\ell=1}^p A_\ell \delta(\omega - \omega_\ell) \quad (7.122)$$

donde  $A_\ell$  está dada por (7.118) y  $\{j\omega_1, \dots, j\omega_p\}$  son los polos de  $H_{\mathcal{L}}(s)$  en el eje imaginario.

## 7.9. Problemas para el lector

**Problema 7.1.** Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$(i) \quad y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$(ii) \quad y(t) = te^{-at}, \text{ en que } a > 0$$

$$(iii) \quad y(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 < t < 1 \\ 2 - t & ; 1 \leq t < 2 \\ -3 + t & ; 2 \leq t < 3 \\ 0 & ; t \geq 3 \end{cases}$$

$$(iv) \quad y(t) = \frac{1}{2^t}$$

**Problema 7.2.** Para los siguientes sistemas:

$$(i) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{d y(t)}{dt} - 6y(t) = u(t)$$

$$(ii) \quad \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{d y(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d u(t)}{dt} - u(t)$$

$$(iii) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{d y(t)}{dt} - 6y(t) = u(t)$$

$$(iv) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 16 \frac{d y(t)}{dt} + 100y(t) = 100u(t)$$

**7.2.1** Determine su función de transferencia,

**7.2.2** Determine si son o no estables,

**7.2.3** Determine y grafique su respuesta a impulso, y

**7.2.4** Determine y grafique su respuesta a escalón.

**Problema 7.3.** Considere un sistema definido por su ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{d y(t)}{dt} + y(t) = \frac{d u(t)}{dt} + 3u(t)$$

**7.3.1** Determine la función de transferencia del sistema.

**7.3.2** Determine la salida del sistema a entrada cero y condiciones iniciales  $\dot{y}(0) = 1$  y  $y(0) = -1$ . Grafique.

**7.3.3** Determine la salida del sistema si la entrada es  $u(t) = \mu(t) - \mu(t - 2)$ . Grafique.

**Problema 7.4.** Para el sistema:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \alpha\frac{du(t)}{dt} + \beta u(t)$$

**7.4.1** Determine condiciones sobre  $\alpha$  y  $\beta$  de manera que en la respuesta a impulso aparezca sólo el modo natural dominante.

**7.4.2** Si  $u(t) = 0$ ,  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1$  determine la condiciones iniciales de manera que en la respuesta homogénea sólo aparezca el modo natural dominante.

**7.4.3** Repita los dos puntos anteriores, pero para el modo rápido del sistema.

**Problema 7.5.** Considere el circuito de la Figura 7.12.

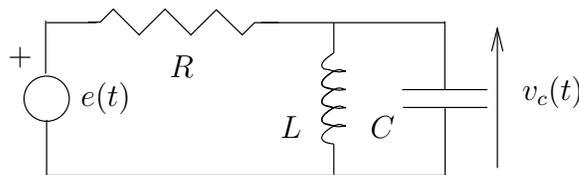


Figura 7.12: Circuito RLC

**7.5.1** Determine la función de transferencia considerando como entrada la fuente de voltaje  $e(t)$  y como salida el voltaje en el condensador  $v_C(t)$

**7.5.2** Si  $R = 1000$  [ $\Omega$ ],  $C = 1000$  [ $\mu F$ ] y  $L = 0,1$  [ $H$ ], determine la respuesta a un escalón de 5 [ $V$ ] en  $e(t)$ .

**Problema 7.6.** Se sabe que la respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario en su entrada (con condiciones iniciales iguales a cero) está dada por:

$$g(t) = (2 - 2e^{-4t} + te^{-4t})\mu(t)$$

Determine la función de transferencia del sistema.

**Problema 7.7.** Considere el siguiente modelo no lineal:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + [2 + 0,1u(t)^2]\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = u(t) + 0,1e^{-u(t)}$$

Linealice el sistema en torno a un punto de operación  $(u_Q, y_Q)$ , determine su función de transferencia y analice la evolución de los polos cuando  $u_Q \in [-0,5, 0,5]$ .

**Problema 7.8.** Considere la siguiente función de transferencia de un sistema:

$$H(s) = \frac{s^2 + 13s + 30}{s^3 + 4s^2 - 7s - 10}$$

**7.8.1** Haga un esquema con la ubicación de todos los polos y ceros del sistema en el plano complejo  $s$ , clasificándolos de acuerdo a su velocidad (lentos y rápidos).

**7.8.2** Determine la respuesta del sistema si se somete a un impulso unitario en la entrada.

**7.8.3** Determine la salida del sistema si las condiciones iniciales son  $\ddot{y}(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  e  $y(0) = -2$ .

**Problema 7.9.** Considere la siguiente función de transferencia de un sistema que depende de un parámetro  $K \geq 0$ :

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 - s + 1 + K(s+1)}$$

**7.9.1** Determine para qué rango de valores del parámetro  $K$  los el sistema es estable.

**7.9.2** Haga un esquema en el plano complejo de cómo varía la ubicación de los polos al variar el parámetro  $K$  (por ejemplo, para  $K = 0, 0.5, 1, 2$ ).

**7.9.3** Para cada uno de los valores de  $K$  considerados en 7.9.2 determine y grafique la respuesta del sistema a un escalón unitario (con condiciones iniciales iguales a cero).

**Problema 7.10.** Dado el sistema definido por su función de transferencia

$$G(s) = \frac{-s + b^2}{s^2 + bs + b^2}$$

**7.10.1** Determine la respuesta del sistema si la entrada es un impulso unitario y las condiciones iniciales son cero.

**7.10.2** Determine la respuesta del sistema a un escalón unitario, con condiciones iniciales cero.

**7.10.3** Determine los parámetros de la respuesta a escalón de la Tabla 7.1, y verifíquelos graficando la simulación para algunos valores del parámetro  $b$ .

**Problema 7.11.** *Determine la respuesta e escalón de los siguientes sistemas definidos por su función de transferencia y con condiciones iniciales cero, y grafique para algunos valores de los parámetros  $a, b, c, K > 0$*

$$\begin{aligned} (i) \quad G_1(s) &= \frac{K(-s+a)}{(s+a)(s+K)} \\ (ii) \quad G_2(s) &= \frac{K(-s+a)(-s+b)}{(s+a)(s+b)(s+K)} \\ (iii) \quad G_3(s) &= \frac{K(-s+a)(-s+b)(-s+c)}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+K)} \end{aligned}$$

*¿Que puede decir del efecto de los ceros sobre la respuesta del sistema?*

**Problema 7.12.** *Una forma de verificar el grado relativo de la función de transferencia de un sistema es a través de su respuesta a escalón. Demuestre que si  $p(t)$  es la respuesta a un escalón de un sistema con función de transferencia  $G(s)$ , entonces:*

$$\left. \frac{dp(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \iff \quad \text{grado relativo de } G(s) \geq 2$$



## Capítulo 8

# Análisis bajo excitaciones arbitrarias. La transformada Zeta

De los métodos disponibles para el estudio de los sistemas lineales dinámicos, de tiempo discreto, uno en particular resulta ser especialmente útil: la Transformación Zeta. Ésta puede entenderse como el análogo, en tiempo discreto, de la transformada de Laplace estudiada en el Capítulo 7.

Las principales ventajas de este método se pueden resumir en lo siguiente:

- Permite el análisis de sistemas lineales estables e inestables.
- Se puede aplicar a una vasta gamas de señales no acotadas.
- Permite incluir las condiciones iniciales del sistema.
- Transforma a la ecuación recursiva del sistema en una expresión algebraica, que resulta simple de manejar.

### 8.1. Definición de la transformada

Dada una señal de tiempo discreto  $f[t]$ ,  $0 \leq t < \infty$ . La transformada Zeta asociada a  $f[t]$ , y su transformada Zeta inversa están definidas por:

$$\mathcal{Z} \{f[t]\} = F[z] = \sum_{t=0}^{\infty} f[t]z^{-t} \quad (8.1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \{F[z]\} = f[t] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F[z]z^{t-1} dz \quad (8.2)$$

La curva cerrada  $\Gamma$  sobre la que se calcula la integral compleja que define la transformada Zeta inversa (E.2) es tal, que debe encerrar a todas las singularidades de  $Y[z]$  [6]. La fundamentación de estas afirmaciones se desarrolla en el Apéndice E. También se incluyen en ese apéndice las propiedades más importantes de la Transformación Zeta.

En este capítulo nos concentraremos en el uso de esta transformación para el análisis de sistemas lineales de tiempo discreto.

## 8.2. Aplicación a sistemas lineales: la función de transferencia

### 8.2.1. Definición y propiedades de la función de transferencia

Como ya hemos visto, una gran cantidad y variedad de sistemas de interés, pueden ser modelados en forma lineal. Esto se consigue linealizando la o las ecuaciones de recursión que describen el comportamiento del sistema en el tiempo (ver Capítulo 1), en torno a un punto de equilibrio o más generalmente, en torno a un punto de operación. Para el caso de sistemas de una entrada y una salida, el proceso de linealización desemboca en la obtención de una ecuación de recursión, la ERS, de la forma general:

$$y[t] + a_{n-1}y[t-1] + \dots + a_1y[t-n+1] + a_0y[t-n] = b_mu[t] + b_{m-1}u[t-1] + \dots + b_1u[t-m+1] + b_0u[t-m] \quad (8.3)$$

con  $a_0$  y  $b_0$  diferentes de cero.

Cuando se aplica transformación Zeta a la ERS se puede usar una de las propiedades en el Apéndice E, la que nos indica que la transformada de una señal desplazada en el tiempo puede expresarse como:

$$\mathcal{Z}\{y[t-t_0]\} = Y[z]z^{-t_0} + y[-1]z^{-t_0+1} + \dots + y[-t_0+1]z^{-1} + y[-t_0] \quad (8.4)$$

donde  $t_0 \in \mathbb{N}$ .

Si aplicamos esta propiedad a la ERS (8.3) tenemos que:

$$Y[z] + a_{n-1}z^{-1}Y[z] \dots + a_1z^{-n+1}Y[z] + a_0z^{-n}Y[z] = b_mU[z] + \dots + b_0z^{-m}U[z] + f(z^{-1}, x_o) \quad (8.5)$$

donde  $f(z^{-1}, x_o)$  es una función que depende de la variable  $z$  y de las  $n$  condiciones iniciales de la salida  $y[t]$ , expresadas como  $y[-1], y[-2], \dots, y[-n]$ .

Dada la naturaleza lineal del sistema debe cumplirse que:

$$f(z^{-1}, x_o) = [\mathbf{p}(z^{-1})]^T \mathbf{x}_o \quad (8.6)$$

donde  $\mathbf{p}(z^{-1})$  es un vector que contiene polinomios en  $z^{-1}$  y  $\mathbf{x}_o$  es un vector que contiene las condiciones iniciales ya mencionadas. Esta estructura es una expresión de la linealidad del sistema (homogeneidad y superposición respecto de las condiciones iniciales).

**Nota 8.1.** Note también que se ha supuesto que  $u[-1] = u[-2] = \dots = u[-m] = 0$ . Esto no es restrictivo, porque siempre es posible encontrar una secuencia de entrada  $u[t]$ , no nula  $\forall t < -m$ , tal que  $y[t]$  satisfaga las condiciones iniciales establecidas.  $\square\square\square$

Para ilustrar estas ideas, consideramos un ejemplo en donde además analizaremos algunas alternativas para el cálculo de la transformación inversa.

**Ejemplo 8.1.** Considere un sistema con la ERS:

$$y[t] - 0,7y[t-1] + 0,1y[t-2] = 0,8u[t-1] \quad (8.7)$$

Suponga que la entrada es un escalón unitario, es decir,  $u[t] = 1, \forall t \geq 0$ , y que las condiciones iniciales son  $y[-1] = 2$  e  $y[-2] = -1$ . Nos interesa calcular la evolución de la salida  $y[t]$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Solución**

Aplicamos transformada Zeta a la ERS, obteniendo:

$$Y[z] - 0,7(z^{-1}Y[z] + y[-1]) + 0,1(z^{-2}Y[z] + z^{-1}y[-1] + y[-2]) = 0,8z^{-1}U[z] \quad (8.8)$$

Esto lleva a:

$$Y[z] = \frac{0,8z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}} U[z] + \frac{(0,7 - 0,1z^{-1})y[-1] - 0,1y[-2]}{1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}} \quad (8.9)$$

Entonces, para este ejemplo:

$$f(z^{-1}, x_0) = [\mathbf{p}(z^{-1})]^T \mathbf{x}_0 = [0,7 - 0,1z^{-1} \quad -0,1] \begin{bmatrix} y[-1] \\ y[-2] \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Reordenando de manera de obtener polinomios en  $z$  en vez de polinomios en  $z^{-1}$ , y reemplazando las condiciones iniciales, se llega a:

$$Y[z] = \underbrace{\frac{0,8z}{z^2 - 0,7z + 0,1}}_{Y_u[z]} U[z] + \underbrace{\frac{1,5z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,7z + 0,1}}_{Y_x[z]} \quad (8.11)$$

donde  $Y_u[z]$  e  $Y_x[z]$  denotan las transformadas de la respuesta a entrada con condiciones iniciales iguales a cero y de la respuesta a condición inicial, con entrada cero, respectivamente.

De manera de hacer más simple el cálculo de la transformada Zeta inversa, y al igual que en el caso de la transformada de Laplace (Capítulo 7), usamos la expansión en fracciones parciales:

$$Y_u[z] = \frac{0,8z}{(z - 0,5)(z - 0,2)} \frac{z}{z - 1} = \frac{4}{3(z - 0,2)} - \frac{4}{3(z - 0,5)} + \frac{2}{z - 1} \quad (8.12)$$

Así, podemos utilizar la Tabla E.2 en la página 464 para obtener la transformación inversa:

$$y_u[t] = \frac{4}{3} ((0,2)^{t-1} - (0,5)^{t-1}) \mu[t-1] + 2\mu[t-1] \quad ; \quad \forall t \geq 0 \quad (8.13)$$

Análogamente:

$$Y_x[z] = \frac{1,5z^2 - 0,2z}{(z-0,5)(z-0,2)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{15(z-0,2)} + \frac{11}{12(z-0,5)} \quad (8.14)$$

Aplicando transformación inversa se llega a:

$$y_x[t] = \frac{3}{2} \delta[t] - \frac{1}{15} (0,2)^{t-1} \mu[t-1] + \frac{11}{12} (0,5)^{t-1} \mu[t-1] \quad ; \quad \forall t \geq 0 \quad (8.15)$$

Finalmente, la respuesta completa es  $y[t] = y_u[t] + y_x[t]$ .

Sin embargo, una forma alternativa para calcular  $y[t]$  es la siguiente:

$$Y[z] = z \left[ \frac{0,8z}{(z-0,5)(z-0,2)(z-1)} + \frac{1,5z-0,2}{(z-0,5)(z-0,2)} \right] \quad (8.16)$$

$$= z \left[ \frac{5}{15(z-0,2)} - \frac{5}{6(z-0,5)} + \frac{2}{z-1} \right] \quad (8.17)$$

$$= \frac{z}{3(z-0,2)} - \frac{5z}{6(z-0,5)} + \frac{2z}{z-1} \quad (8.18)$$

Al aplicar ahora transformación inversa se llega a:

$$y[t] = 2 + \frac{1}{3} (0,2)^t - \frac{5}{6} (0,5)^t \quad ; \quad \forall t \geq 0 \quad (8.19)$$

Lo que se ha hecho en esta segunda forma de calcular  $\mathcal{Z}^{-1}\{\circ\}$  es aprovechar la presencia de un factor  $z$  en el numerador. Así las fracciones parciales pueden, en el paso siguiente, recibir de vuelta ese factor  $z$ . Este proceso evita un corrimiento temporal en la transformación inversa, ya que, como puede verse en el Apéndice E:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-a} \right\} = a^t \mu[t] \quad \neq \quad \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z-a} \right\} = a^{t-1} \mu[t-1] \quad (8.20)$$

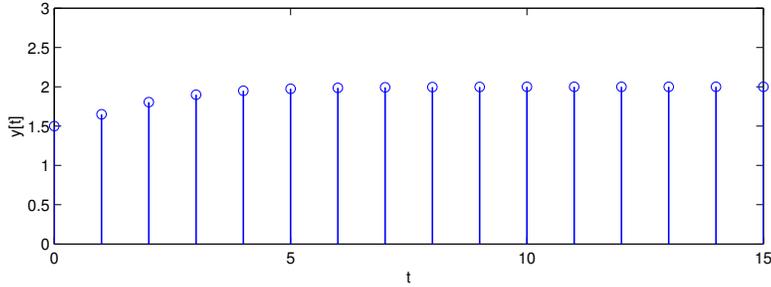
El lector puede comprobar que ambas expresiones obtenidas previamente para  $y[t]$  son equivalentes y corresponden a la señal en la Figura 8.1.

□□□

Volvamos ahora a considerar la forma general de la ERS y supongamos **condiciones iniciales iguales a cero**. Entonces tenemos que:

$$Y[z] = H[z]U[z] \quad (8.21)$$



Figura 8.1: Salida  $y[t]$  para el Ejemplo 8.1.

Donde se define la función:

$$H[z] = \frac{B[z]}{A[z]} \quad (8.22)$$

que se forma con los polinomios que contienen los coeficientes de la ecuación (8.3) original:

$$A[z] = z^m(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0) \quad (8.23)$$

$$B[z] = z^n(b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0) \quad (8.24)$$

La definición de los polinomios  $A[z]$  y  $B[z]$  acusa la presencia de una *cancelación*. En realidad, se ha elegido esta forma para los polinomios de modo de incluir los tres casos posibles:  $n < m$ ,  $n = m$  y  $n > m$ . Para clarificar esto ilustraremos los tres diferentes casos.

**Ejemplo 8.2 (Caso  $n < m$ ).** Sea la ERS:

$$y[t] - 0,8y[t-1] + 0,4y[t-2] - 0,1y[t-3] = 0,2u[t-3] - 0,7u[t-4] \quad (8.25)$$

En este caso,  $n = 3$ , con  $a_{n-1} = a_2 = -0,8$ ,  $a_{n-2} = a_1 = 0,4$  y  $a_{n-3} = a_0 = -0,1$ . Por otro lado  $m = 4$ , con  $b_m = b_4 = 0$ ,  $b_{m-1} = b_3 = 0$ ,  $b_{m-2} = b_2 = 0$ ,  $b_{m-3} = b_1 = 0,2$  y  $b_{m-4} = b_0 = -0,7$ .

Entonces, la función de transferencia es:

$$H[z] = \frac{z^3(0,2z - 0,7)}{z^4(z^3 - 0,8z^2 + 0,4z - 0,1)} = \frac{0,2z - 0,7}{z(z^3 - 0,8z^2 + 0,4z - 0,1)} \quad (8.26)$$

□□□

**Ejemplo 8.3 (Caso  $n = m$ ).** Sea la ERS:

$$y[t] - 0,8y[t-1] + 0,4y[t-2] - 0,1y[t-3] = 0,2u[t-2] - 0,7u[t-3] \quad (8.27)$$

En este caso también  $n = 3$ , con  $a_{n-1} = a_2 = -0,8$ ,  $a_{n-2} = a_1 = 0,4$  y  $a_{n-3} = a_0 = -0,1$ . Por otro lado  $m = 3$ , con  $b_m = b_3 = 0$ ,  $b_{m-1} = b_2 = 0$ ,  $b_{m-2} = b_1 = 0,2$ , y  $b_{m-3} = b_0 = -0,7$ .

Entonces, la función de transferencia es:

$$H[z] = \frac{z^3(0,2z - 0,7)}{z^3(z^3 - 0,8z^2 + 0,4z - 0,1)} = \frac{0,2z - 0,7}{z^3 - 0,8z^2 + 0,4z - 0,1} \quad (8.28)$$

□□□

**Ejemplo 8.4 (Caso  $n > m$ ).** Sea la ERS:

$$y[t] - 0,8y[t - 1] + 0,4y[t - 2] - 0,1y[t - 3] = 0,2u[t - 1] - 0,7u[t - 2] \quad (8.29)$$

En este caso nuevamente  $n = 3$ , con  $a_{n-1} = a_2 = -0,8$ ,  $a_{n-2} = a_1 = 0,4$  y  $a_{n-3} = a_0 = -0,1$  Por otro lado  $m = 2$ , con  $b_m = b_2 = 0$ ,  $b_{m-1} = b_1 = 0,2$  y  $b_{m-2} = b_0 = -0,7$

Entonces, la función de transferencia es:

$$H[z] = \frac{z^3(0,2z - 0,7)}{z^2(z^3 - 0,8z^2 + 0,4z - 0,1)} = \frac{z(0,2z - 0,7)}{z^3 - 0,8z^2 + 0,4z - 0,1} \quad (8.30)$$

□□□

En lo sucesivo, supondremos que los polinomios  $B[z]$  y  $A[z]$  son coprimos, es decir, todos los factores comunes en  $H[z]$  han sido eliminados por cancelación. Los grados de  $B[z]$  y  $A[z]$  serán redefinidos como  $\tilde{m}$  y  $\tilde{n}$  respectivamente.

La función racional  $H[z]$  es la **función de transferencia** en el dominio Zeta. La representación (8.22) es muy útil para describir características y propiedades de un sistema tales como estabilidad y velocidad, además de entregar información para el diseño de sistemas de control, filtros y otras aplicaciones.

A continuación repetiremos algunos conceptos ligados a la definición de la función de transferencia de un sistema. Son los mismos que para el caso de la transformación de Laplace y su reiteración está orientada a enfatizar los aspectos comunes existentes en el dominio del tiempo continuo y en el dominio del tiempo discreto. Así, definimos entonces los siguientes términos.

- (i) Las  $\tilde{m}$  raíces de la ecuación  $B[z] = 0$  son los **ceros** del sistema. Ellos hacen además que  $H[z] = 0$ .
- (ii) Las  $\tilde{n}$  raíces de la ecuación  $A[z] = 0$  son los **polos** del sistema. Ellos hacen además que  $H[z] \rightarrow \infty$ .
- (iii) Si  $A[z] = 0$  tiene  $n_t$  raíces en  $z = \lambda_t$ , decimos que el polo  $\lambda_t$  tiene **multiplicidad**  $n_t$ .
- (iv) La diferencia de grado entre  $A[z]$  y  $B[z]$ , es decir,  $\tilde{m} - \tilde{n}$  se denomina el **grado relativo** del sistema.
- (v) Si  $\tilde{m} < \tilde{n}$  decimos que el modelo es **estrictamente propio**. Esto implica que el grado relativo del sistema es positivo.

- (vi) Si  $\tilde{m} = \tilde{n}$  decimos que el modelo es **bipropio**. Esto implica que el grado relativo del sistema es cero.
- (vii) Si  $\tilde{m} \leq \tilde{n}$  decimos que el modelo es **propio**.

Note que el polinomio  $A[z]$  corresponde al *polinomio característico* de la ERS, multiplicado por  $z^\ell$ , donde  $\ell \in \mathbb{N}$  tiene un valor que depende del caso específico. De esta forma, el conjunto de los polos de  $H[z]$  incluye un conjunto de  $\ell$  polos en el origen más las frecuencias naturales que se pueden calcular de la ERS.

La definición nos ayudarán a apreciar la forma en que se relaciona la salida de un sistema con su entrada, tal como pone en evidencia la definición (8.22). Sin embargo, la simplicidad reside en que la relación se establece mediante la función racional  $H[z]$ , es decir, los desplazamientos temporales han desaparecido. Si bien para llegar a esta relación las condiciones iniciales se han supuesto iguales a cero, sabemos que en el caso de sistemas estables, su efecto se extingue exponencialmente en el tiempo. Además, la ERS siempre se puede reconstituir a partir de la función de transferencia, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 8.5.** *Considere un sistema lineal de tiempo discreto, con función de transferencia*

$$H[z] = \frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{0,5(z + 1,5)}{z^2(z^2 - 0,3z + 0,4)} \quad (8.31)$$

*Se desea reconstruir la ERS que relaciona la entrada  $u[t]$  con la respuesta  $y[t]$ .*

*Para ese propósito, primero llevamos a  $H[z]$  a un cociente de polinomios en  $z^{-1}$ , multiplicando y dividiendo por  $z^{-4}$ , con lo que se obtiene*

$$H[z] = \frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{0,5(z^{-3} + 1,5z^{-4})}{1 - 0,3z^{-1} + 0,4z^{-2}} \\ \iff (1 - 0,3z^{-1} + 0,4z^{-2})Y[z] = 0,5(z^{-3} + 1,5z^{-4})U[z] \quad (8.32)$$

*Finalmente, al aplicar la propiedad (8.4) en sentido inverso, se llega a:*

$$y[t] - 0,3y[t - 1] + 0,4y[t - 2] = 0,5u[t - 3] + 0,75u[t - 4] \quad (8.33)$$

En forma similar a aquella que se utilizó en el análisis de Fourier, la función de transferencia puede ser definida en base a la respuesta a impulso, con condiciones iguales a cero. Si recordamos como se definió la función de transferencia  $H[z]$  al aplicar transformación Zeta a la ERS del sistema (8.3), podemos escribir la salida del sistema según la ecuación (8.21). Se puede apreciar que si a ambos lados de esta expresión, se aplica transformación Zeta inversa (vea la Tabla E.1 en la página 463), tenemos que:

$$Y[z] = H[z]U[z] \iff y[t] = h[t] * u[t] \quad (8.34)$$

En que:

$$h[t] = \mathcal{Z}^{-1} \{H[z]\} \quad (8.35)$$

Por lo tanto, podemos afirmar que:

La función de transferencia  $H[z]$  de un sistema de tiempo discreto, definida en (8.22), es igual a la transformada Zeta de la respuesta  $h[t]$  del sistema a un delta de Kronecker en la entrada, cuando las condiciones iniciales son cero.

A diferencia del caso de tiempo continuo, la función de transferencia  $H[z]$  es **siempre** una función racional en  $z$ . La existencia de un retardo puro, digamos de  $t_o$  unidades, implica simplemente la existencia de  $t_o$  polos en el origen.

La relación entre la ERS, la respuesta a delta de Kronecker  $h[t]$  y la función de transferencia  $H[z]$  se describe en la Figura 8.2. A esos vínculos se ha agregado la respuesta a escalón unitario, con condiciones iniciales iguales a cero,  $g[t]$ .

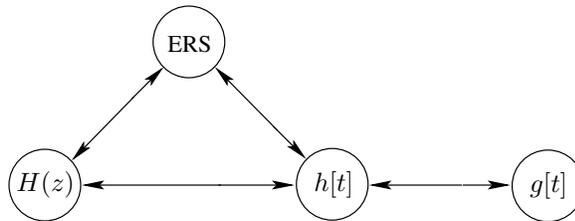


Figura 8.2: Relaciones entre ERS, función de transferencia y respuestas a delta y a escalón.

### 8.2.2. Función de transferencia en dominios de Fourier y Zeta

Cuando el sistema tiene frecuencias naturales en el disco unitario cerrado, con la restricción que aquellas frecuencias sobre la circunferencia unitaria sean simples, las funciones de transferencia en ambos dominios existen. El elemento común es conceptual: **en ambos casos, la función de transferencia es igual a la correspondiente transformada de la respuesta a un delta de Kronecker, con condiciones iniciales iguales a cero.**

La definición y la estructura de  $H[z]$  parecen ser idénticas a la definición y la estructura de la función de transferencia en el dominio de Fourier, bastando hacer una simple sustitución de  $z$  por  $e^{j\theta}$ . Sin embargo, esto no siempre es correcto. La diferencia es que cuando el sistema tiene frecuencias naturales (simples) sobre la circunferencia unitaria, la función de transferencia en Fourier incluye deltas de Dirac en frecuencia (tal como se demuestra en el Apéndice C). Esto se origina en el hecho que la respuesta a impulso del sistema contiene

modos naturales que no decaen y para los cuales la integral que define la transformada de Fourier existe sólo en el límite. En cambio, para el mismo sistema, la función de transferencia en Zeta no contiene impulsos en frecuencia, debido a que se puede elegir un radio de convergencia mayor que 1 (ver Apéndice E).

**Ejemplo 8.6.** Consideremos el sistema con la ERS:

$$y[t] - ay[t - 1] + a^2y[t - 2] = a\frac{\sqrt{3}}{2}u[t - 1] \quad (8.36)$$

donde  $0 < a \leq 1$ .

La función de transferencia en el dominio de la transformación Zeta es:

$$H_z[z] = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - az + a^2}; \quad \forall |z| > 1 \quad (8.37)$$

En cambio, en el dominio de Fourier, debemos distinguir dos casos:

(i) Caso  $a < 1$  :

En este caso, las frecuencias naturales están dentro del disco unitario abierto, por lo tanto, los modos naturales son absolutamente sumables<sup>1</sup> y la TFTD es:

$$H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}] = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j\theta}}{[e^{j\theta}]^2 - ae^{j\theta} + a^2} \quad (8.38)$$

En este caso:

$$H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}] = H_{\mathcal{Z}}[z]|_{z=e^{j\theta}} \quad (8.39)$$

De esa forma,  $H_{\mathcal{Z}}(e^{j\theta})$  es también igual la respuesta en frecuencia del sistema.

(ii) Caso  $a = 1$  :

En este caso, las frecuencias naturales están sobre la circunferencia unitaria y los modos naturales combinados corresponden a una senoide. Más específicamente, la respuesta a un delta de Kronecker, con condiciones iniciales iguales a cero es:

$$h[t] = \text{sen}(\pi t/3)\mu[t] \quad (8.40)$$

En consecuencia (vea Tabla C.4 en la página 413, con  $\theta_o = \pi/3$ ) la TFTD es:

$$H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}] = \frac{j\pi}{2} \left( \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + \theta_o + 2\ell\pi) - \delta(\theta - \theta_o + 2\ell\pi) \right) + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j\theta}}{[e^{j\theta}]^2 - e^{j\theta} + 1} \quad (8.41)$$

Se observa que en este caso, no se cumple (8.39).

<sup>1</sup>Recuerde que una secuencia  $f[t]$ , definida  $\forall t \in \mathbb{N}$  es absolutamente sumable si y sólo si  $\sum_{t=0}^{\infty} |f[t]| < \infty$ .

□□□

La relación entre la transformación de Fourier y transformación Zeta se estudia en mayor detalle en la Sección §8.7.

### 8.2.3. Función de transferencia y respuesta en frecuencia

Considere un sistema con función de transferencia  $H[z]$ . Suponga que  $H[z]$  es estable, salvo por un conjunto finito de polos en la circunferencia unitaria. Si la entrada a este sistema es  $u[t] = e^{j\theta_o t}$ , con  $|H[e^{j\theta_o}]| < \infty$ , entonces la transformada Zeta de la respuesta es:

$$Y[z] = H[z] \frac{z}{z - e^{j\theta_o}} = z \frac{H[e^{j\theta_o}]}{z - e^{j\theta_o}} + Y_r[z] \quad (8.42)$$

donde  $Y_r[z]$  corresponde a la transformada Zeta de la respuesta natural. Entonces  $y[t] = |H[e^{j\theta_o}]| e^{j(\theta_o t - \phi(\theta_o))}$ , donde  $\phi(\theta_o) = \angle H[e^{j\theta_o}]$ . Este resultado dice que si la entrada al sistema es  $u(t) = \cos(\theta_o t)$ , entonces la respuesta contiene una senoide de la misma frecuencia, con amplitud  $|H[e^{j\theta_o}]|$  y fase igual a  $\angle H[e^{j\theta_o}]$ . Esto es válido incluso si  $H[z]$  tiene un (o más) polo en  $z = e^{j\theta_o}$ , ya que entonces  $|H[e^{j\theta_o}]|$  tendería a infinito, lo cual es consistente con el hecho que la respuesta del sistema contendría una oscilación de frecuencia  $\theta_o$ , pero de amplitud creciendo polinomialmente en el tiempo (ver Problema 8.10).

La respuesta en frecuencia  $K[\theta]$  de un sistema lineal con función de transferencia  $H[z]$  se puede calcular reemplazando  $z$  por  $e^{j\theta}$ .

## 8.3. Respuesta a impulso y respuesta a escalón.

Como ya hemos visto, la función de transferencia está unívocamente asociada a la respuesta a impulso del sistema. Por otro lado, sabemos que si se aplica un impulso a la entrada, la respuesta *contiene solamente los modos naturales del sistema*; esto nos permite estudiar su comportamiento natural, independiente de la señal de entrada (características del transiente, velocidad de respuesta, etc.) a partir del análisis de la función  $H[z]$ .

Análogamente al caso de sistemas de tiempo continuo, la respuesta a escalón es también usada para describir el sistema, aunque en este caso, ello no se debe a la dificultad para generar el delta.

La definición (8.22) nos permite expresar la **respuesta a escalón unitario** del sistema como:

$$Y[z] = H[z] \frac{z}{z - 1} \quad (8.43)$$

Lo cual, **suponiendo que el sistema no tiene polos en  $z = 1$** , corresponde a:

$$y[t] = y_\infty + \text{modos naturales del sistema} \quad (8.44)$$

donde  $y_\infty = H[1]$ , en virtud del Teorema del Valor Final (ver Teorema E.2 en la página 461). Si el sistema es estable, entonces los modos naturales decaen exponencialmente a cero, por tanto, la respuesta en estado estacionario está dada por la constante  $y_\infty$ . Note además que si  $H[z]$  tiene uno o más ceros en  $z = 1$ , entonces  $y_\infty = 0$ .

Es conveniente recalcar que la respuesta a escalón unitario contiene los modos naturales del sistema, por lo que revela aspectos fundamentales del comportamiento dinámico del mismo.

También es conveniente recordar que existe una relación simple entre la respuesta a escalón  $g[t]$  y la respuesta a delta de Kronecker  $h[t]$ , dada por:

$$h[t] = g[t] - g[t - 1] \quad (8.45)$$

**Ejemplo 8.7.** Considere el sistema definido por su ERS:

$$y[t] - 1,75y[t - 1] + 0,8y[t - 2] = -0,2u[t] + 0,25u[t - 1] \quad (8.46)$$

Su función de transferencia es:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{-0,2z^2 + 0,25z}{z^2 - 1,75z + 0,8} \quad (8.47)$$

La respuesta a delta de Kronecker puede ser calculada mediante la metodología usual, ya empleada en el Capítulo 7 en el contexto de sistemas de tiempo continuo y la transformada de Laplace. Esa respuesta se obtiene al descomponer  $H[z]$  en fracciones parciales de manera conveniente para poder obtener la transformada Zeta inversa, con ayuda de la Tabla E.2 en la página 464.

En MATLAB la función de transferencia en tiempo discreto, al igual que en tiempo continuo, se define mediante el comando `tf` en el que se especifica un tercer argumento correspondiente al tiempo de muestreo (ver Capítulo 11). Este se mantiene indefinido, al hacer el tercer parámetro igual a  $-1$ . De esta forma la respuesta a delta de Kronecker y a escalón pueden obtenerse mediante los comandos `dimpulse` y `dstep`, respectivamente. En la Figura 8.3 se muestran las respuestas a delta de Kronecker y a escalón unitario para el sistema en particular. Estas respuestas se obtienen con los siguientes comandos:

```
MATLAB
>> H=tf([-0.2 0.25 0],[1 -1.75 0.8],-1)

Transfer function:
-0.2 z^2 + 0.25 z
-----
z^2 - 1.75 z + 0.8

Sampling time: unspecified
>> subplot(2,1,1),stem(impulse(H))
>> subplot(2,1,2),stem(step(H))
```

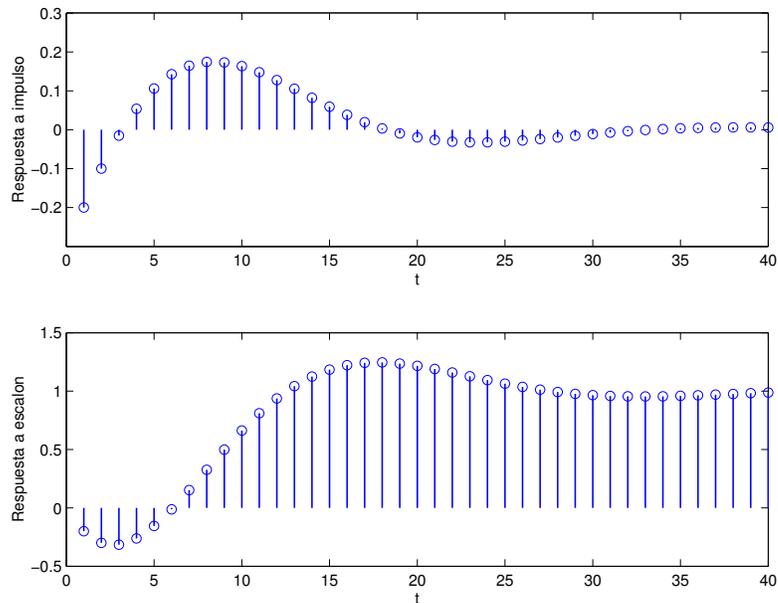


Figura 8.3: Respuesta a delta Kronecker y a escalón unitario para el Ejemplo 8.7.

□□□

De igual forma que en el caso de tiempo continuo, en la respuesta a escalón de sistemas de tiempo discreto puede definirse un conjunto de parámetros que describen ciertas propiedades de su dinámica. Sin embargo, en este caso, el cálculo de algunos de estos parámetros se complica pues la variable independiente, el tiempo  $t$ , es discreta. Así, el hacer cero una derivada para calcular un máximo o un mínimo se hace difícil por dos factores: la derivada no está definida y, por otro lado, el cálculo del instante asociado debe restringirse a valores enteros.

En la Figura 8.3 se muestra una respuesta a escalón unitario con condiciones iniciales iguales a cero. Se observa que se pueden asignar los mismos elementos caracterizadores que en el caso de tiempo continuo.

Un asunto de interés tiene que ver con el hecho que una señal cualquiera  $f[t]$  (no sólo la respuesta a escalón o la respuesta a impulso), puede ser igual a cero durante los primeros  $d$  instantes. Ello se explica con el siguiente análisis.

Sea una señal  $f[t]$  con transformada  $F[z]$  dada por:

$$F[z] = \frac{B_f[z]}{A_f[z]} \quad (8.48)$$

donde  $A_f[z]$  y  $B_f[z]$  son polinomios de la forma:

$$A_f[z] = z^p + \alpha_{p-1}z^{p-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 \quad (8.49)$$

$$B_f[z] = \beta_qz^q + \beta_{q-1}z^{q-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0; \quad \beta_q \neq 0 \quad (8.50)$$

para números enteros  $p$  y  $q$  no negativos. Observe que dado que  $F[z]$  debe poder expresarse en serie de potencias no positivas de  $z$ , es necesario que  $p \geq q$ .

La expansión de  $F[z]$  en potencias de  $z^{-1}$  se obtiene dividiendo  $B_f[z]$  por  $A_f[z]$ , esto lleva a:

$$F[z] = \beta_qz^{-p+q} + (\beta_{q-1} - \beta_q\alpha_{p-1})z^{-p+q-1} + \dots \quad (8.51)$$

Esta ecuación demuestra que el primer valor de  $f[t]$  distinto de cero ocurre en el instante  $t = p - q$ , con  $f[p - q] = \beta_q$ . El resultado principal se puede resumir en el siguiente lema:

**Lema 8.1.** *Considere una señal  $f[t]$  y su transformada  $F[z]$ , cociente de polinomios en  $z$ , con grado relativo  $d$ , entonces  $f[t] = 0$  para  $t = 0, 1, \dots, d - 1$*

□□□

Cuando este lema se aplica a la respuesta a escalón unitario, con condiciones iniciales iguales a cero, se deduce que ésta es cero en los primeros  $d$  instantes, donde  $d$  es el grado relativo de la función de transferencia  $H[z]$ . En rigor, el Lema 8.1 se aplica al producto  $H[z]U[z]$ , pero en este caso  $U[z]$  es  $\frac{z}{z-1}$ , es decir, su grado relativo es cero, por lo tanto el grado relativo de  $H[z]U[z]$  es igual al grado relativo de  $H[z]$ .

## 8.4. Respuesta a condiciones iniciales y excitaciones arbitrarias.

De la misma manera que en la sección precedente se obtuvo las respuestas a impulso y a escalón del sistema, la transformada Zeta permite obtener la respuesta del sistema cuando la entrada pertenece a un tipo más general de señales. En esta tarea, las principales ventajas que tiene esta transformación sobre la transformación de Fourier, son que se puede aplicar a una amplia gama de excitaciones no acotadas, y que permite incluir el efecto de las condiciones iniciales.

Consideremos primero un ejemplo.

**Ejemplo 8.8.** *Considere un sistema con ERS:*

$$y[t] + a_1y[t - 1] + a_2y[t - 2] = b_1u[t - 3] + b_0u[t - 4] \quad (8.52)$$

*Entonces al aplicar la transformada Zeta (en el marco de la Nota 8.1 en la página 195) se obtiene:*

$$Y[z] = \frac{b_1z^{-3} + b_0z^{-4}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} U[z] + \frac{-a_1y[-1] - a_2z^{-1}y[-1] - a_2y[-2]}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (8.53)$$

lo cual lleva a:

$$Y[z] = \underbrace{\frac{b_1 z + b_0}{z^2(z^2 + a_1 z + a_2)} U[z]}_{Y_u[z] = \mathcal{Z}\{\mathbf{T}\langle 0, u[t]\rangle\}} + \underbrace{\frac{-(a_1 y[-1] + a_2 y[-2])z^2 - a_2 y[-1]z}{z^2 + a_1 z + a_2}}_{Y_x[z] = \mathcal{Z}\{\mathbf{T}\langle x_0, 0 \rangle\}} \quad (8.54)$$

□□□

Este ejemplo permite inducir algunos resultados generales:

- (i) Tanto la respuesta a entrada,  $y_u[t]$  como la respuesta a condiciones iniciales,  $y_x[t]$ , contienen los modos naturales del sistema.
- (ii) El denominador de  $Y_u[z]$  difiere del de  $Y_x[z]$ , no sólo debido al denominador de  $U[z]$ , sino que además en un conjunto de polos en  $z = 0$ . Estos **no son frecuencias naturales del sistema**, sino que se originan en que el máximo retardo de  $u(t)$  en la ERS (8.3) es mayor que el máximo retardo de la respuesta  $y(t)$  en la misma ERS. aplica la excitación.
- (iii) La transformada  $Y_u[z]$  contiene los polos de  $U[z]$ ; éstos explican la presencia de modos forzados, lo cual es consistente con lo planteado en la subsección 4.3.6 en la página 71.
- (iv) Si el grado relativo de  $H[z]$  es mayor que cero (como ocurre usualmente), entonces  $y_u[0] = 0$ .
- (v) Salvo para especiales valores de las condiciones iniciales, el grado relativo de  $Y_x[z]$  es cero, así  $y_x[0] \neq 0$ , lo cual lleva, salvo para esos valores especiales, a que  $y[0] \neq 0$ .

## 8.5. Estabilidad

Hasta aquí hemos visto que la respuesta de un sistema que tiene una función de transferencia  $H[z]$  es de la forma:

$$Y[z] = H[z]U[z] + \sum_{t=1}^p \sum_{i=1}^{n_t} \frac{\alpha_{ti}}{(z - \lambda_t)^i} \quad (8.55)$$

Donde el valor de cada  $\alpha_{ti}$  depende de las condiciones iniciales, y donde hemos supuesto que cada polo ubicado en  $z = \lambda_t$ , tiene multiplicidad  $n_t$ . Esta suposición implica a su vez que  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$ , donde  $n$  es el orden de la ERS, es decir, es el número de autovalores del sistema.

Si recordamos la definición de estabilidad, tenemos que un sistema es **estable** cuando cualquier entrada acotada produce una salida también acotada, para cualquier condición inicial acotada. Si observamos la ecuación (8.55) podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable es que los polos de éste, que aparecen en las fracciones del segundo término de la ecuación, den origen a señales que decaigan exponencialmente. Esto se traduce

en que los polos del sistema deben tener magnitud estrictamente menor que uno, es decir, deben estar ubicados sobre el **disco unitario abierto** (centrado en el origen) del plano complejo  $\mathbb{Z}$ . Es decir, para sistemas discretos, el límite de estabilidad en el plano complejo  $\mathbb{Z}$  es la **circunferencia unitaria** (centrada en el origen).

**Ejemplo 8.9.** Consideremos un sistema con función de transferencia:

$$H[z] = \frac{(z - 0,2)}{z^3(z - 1)(z - 0,8)} \quad (8.56)$$

Esta función tiene tres polos en el origen, que se originan en un retardo de tres unidades y en la estructura de la ERS (vea ecuaciones (8.23) y (8.24)). Estos polos sólo introducen retardos en los modos naturales. Los otros polos de su función de transferencia están ubicados en  $z = 1$ , y  $z = 0,8$ . Estos últimos polos corresponden a frecuencias naturales del sistema. Uno de éstos, el ubicado en  $z = 1$ , no está en el disco unitario abierto, sino que justo sobre el límite de estabilidad. Por tanto el sistema no es estable. Se deja al lector el verificar que una entrada constante, diferente de cero, produce una respuesta que crece indefinidamente.

□□□

### 8.5.1. Análisis de polinomios

Al igual que en el caso de sistemas de tiempo continuo, es posible estudiar la estabilidad de un sistema de tiempo discreto analizando el polinomio denominador de su función de transferencia, sin calcular explícitamente las raíces de ese polinomio.

Supongamos que el denominador mencionado sea un polinomio de la forma:

$$p[z] = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (8.57)$$

Entonces se trata de determinar si existen o no raíces de este polinomio cuya magnitud sea igual o mayor que 1, o equivalentemente, si todas las raíces están en el disco unitario abierto en el plano complejo  $\mathbb{Z}$ . Diremos que los polinomios que tiene esta propiedad son **polinomios estables**.

A semejanza de lo que ocurre en el caso de sistemas de tiempo continuo, podemos aprovechar algunas propiedades del polinomio (8.57) para descartar algunas situaciones. Dos de estas propiedades son especialmente útiles.

**Propiedad 1** El coeficiente  $a_{n-1}$  cumple con:

$$a_{n-1} = -a_n \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (8.58)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son las raíces de  $p[z]$ .

Esta propiedad es directa al notar que el polinomio  $p[z]$  puede escribirse como:

$$p[z] = a_n \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \quad (8.59)$$

entonces, al expandir el producto (8.59) y observar el coeficiente que acompaña a la potencia  $(n - 1)$ -ésima de  $z$ , se obtiene (8.58).

**Propiedad 2** El coeficiente  $a_0$  cumple con:

$$a_0 = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (8.60)$$

Esta propiedad también se puede demostrar expandiendo el producto (8.59) y observando el término constante.

La primera propiedad dice que para que el polinomio  $p[z]$  sea estable, entonces es **necesario** que  $|a_{n-1}| < n|a_n|$  ya que cada raíz de  $p[z]$  debe tener magnitud menor que 1. El resultado se obtiene al utilizar la desigualdad triangular: *el módulo de la suma es menor que la suma de los módulos*.

La segunda propiedad dice que la estabilidad de  $p[z]$  exige como condición necesaria que  $|a_0| < |a_n|$ . Este resultado se obtiene al considerar que cada factor  $\lambda_i$  en (8.60) debe tener magnitud menor que uno.

Las dos propiedades precedentes ayudan a descartar algunos polinomios bajo análisis. El lector debe recordar que estas propiedades **son necesarias pero no suficientes** para asegurar estabilidad. También conviene tener presente que, a diferencia del caso de tiempo continuo, un polinomio puede ser estable aunque algunas de sus raíces sean positivas; esto implica que los coeficientes de un polinomio  $p[z]$  estable pueden ser positivos, negativos o cero.

Una vez superada la etapa de la inspección se requiere un método de análisis que proporcione una respuesta categórica sobre la estabilidad o inestabilidad del polinomio. Una de las formas de realizar el estudio es transformar el problema en uno en que podamos aplicar el algoritmo de Routh y, en general, todos los resultados de la Sección §7.6.1. Con este objetivo se puede usar, por ejemplo, la transformación bilineal:

$$z = \frac{w + 1}{w - 1} \iff w = \frac{z + 1}{z - 1} \quad (8.61)$$

donde  $w$  es una variable compleja auxiliar. Si expresamos la variable  $w$  en término de su parte real  $\zeta$  y su parte imaginaria  $\psi$ , es decir  $w = \zeta + j\psi$  entonces (8.61) se puede escribir como:

$$z = \frac{w + 1}{w - 1} = \frac{\zeta + 1 + j\psi}{\zeta - 1 + j\psi} \implies |z| = \sqrt{\frac{(\zeta + 1)^2 + \psi^2}{(\zeta - 1)^2 + \psi^2}} \quad (8.62)$$

De la ecuación (8.62) se puede ver que  $\zeta > 0$  si y sólo si  $|z| < 1$ . También se puede ver  $w$  está en el eje imaginario ( $\zeta = 0$ ) si y sólo si  $z$  está sobre la

circunferencia unitaria ( $|z| = 1$ ). Así, si definimos la función racional  $P_w(w)$  como:

$$P_w(w) = p[z] \Big|_{z=\frac{w+1}{w-1}} \quad (8.63)$$

entonces el polinomio  $p[z]$  tiene todas sus raíces al interior del disco unitario si y sólo si el polinomio numerador de  $P_w(w)$  tiene todas sus raíces al interior del semi-plano izquierdo. Por lo tanto, podemos usar el criterio de Routh para probar el polinomio numerador de  $P_w(w)$  y así estudiar la estabilidad de  $p[z]$ .

**Ejemplo 8.10.** *Considere el polinomio  $p[z] = z^3 - 0,8z^2 - 0,25z + 0,2$ . Se trata de determinar si todas sus raíces al interior del disco unitario. Para ello primero calculamos  $P_w(w)$ , obteniendo:*

$$P_w(w) = \frac{0,15w^3 + 1,85w^2 + 4,65w + 1,35}{(w-1)^3} \quad (8.64)$$

Luego aplicamos Routh al numerador de  $P_w(w)$ , construyendo el arreglo:

$w^3$	0,15	4,65
$w^2$	1,85	1,35
$w^1$	4,5405	
$w^0$	1,35	

Como no hay cambios de signo en la primera columna, sabemos que todos los ceros de  $P_w(w)$  están al interior del semi-plano izquierdo, lo cual implica que todas las raíces de  $p[z]$  están estrictamente al interior del disco unitario.

□□□

El método de la transformación bilineal, aunque efectivo, puede llegar a ser muy engorroso para polinomios de grado elevado. También hace más difícil estudiar problemas de estabilidad condicionada a parámetros. Para evitar estos inconvenientes, se puede utilizar un algoritmo o criterio alternativo desarrollado por Jury.

Consideremos el polinomio en (8.57) y el arreglo de la Tabla 8.1. Este arreglo se construye como se indica, paso a paso, a continuación:

- (i) La primera fila se construye directamente con los coeficientes de polinomio original en orden descendente, i.e.  $\gamma_{n,\ell} = a_\ell$ ,  $\ell = n, n-1, \dots, 0$ .
- (ii) La segunda fila se construye a partir de la primera fila con los mismos coeficientes, pero en orden ascendente.
- (iii) La tercera fila es calculada a partir de las dos inmediatamente anteriores de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\gamma_{n-1,n-\ell} = \frac{1}{\gamma_{n,n}} \begin{vmatrix} \gamma_{n,n} & \gamma_{n,\ell-1} \\ \gamma_{n,n} & \gamma_{n,n-\ell+1} \end{vmatrix} \quad \ell = 1, 2, \dots, n \quad (8.65)$$

Note que esta fila tiene un elemento menos que las dos anteriores.

$z^n$	$\gamma_{n,n}$	$\gamma_{n,n-1}$	$\gamma_{n,n-2}$	$\cdots$	$\gamma_{n,1}$	$\gamma_{n,0}$
	$\gamma_{n,0}$	$\gamma_{n,1}$	$\gamma_{n,2}$	$\cdots$	$\gamma_{n,n-1}$	$\gamma_{n,n}$
$z^{n-1}$	$\gamma_{n-1,n-1}$	$\gamma_{n-1,n-2}$	$\gamma_{n-1,n-3}$	$\cdots$	$\gamma_{n-1,0}$	
	$\gamma_{n-1,0}$	$\gamma_{n-1,1}$	$\gamma_{n-1,2}$	$\cdots$	$\gamma_{n-1,n-1}$	
	$\vdots$					
$z^0$	$\gamma_{0,0}$					

Tabla 8.1: Arreglo de Jury

- (iv) La cuarta fila se construye a partir de la tercera fila con los mismos coeficientes, pero en orden inverso.
- (v) La quinta fila se construye a partir de las dos filas precedentes usando (8.65) con los coeficientes correspondientes. Esta regla de construcción se aplica también a todas las filas impares que siguen, hasta la  $(2n + 1)$ -ésima, es decir, hasta calcular  $\gamma_{0,0}$ . En cada una de estas filas, el número de coeficientes se reduce en uno.
- (vi) La sexta fila, así como todas las filas pares que siguen, se construyen con los mismos coeficientes de la fila impar inmediatamente anterior, pero en orden inverso.

Jury formuló un teorema de estabilidad cuyas condiciones se verifican usando el arreglo de la tabla 8.1. El teorema se enuncia a continuación, sin demostración, ya que ella excede el marco de este texto. El lector interesado puede consultar [23].

**Teorema 8.1.** *El polinomio  $p[z]$  dado en (8.57), con  $a_n > 0$ , tiene todas sus raíces estrictamente al interior del círculo unitario si y sólo si  $\gamma_{\ell,\ell} > 0$  para  $\ell = 0, 1, \dots, n - 1$ . □□□*

A continuación mostramos un ejemplo del algoritmo, tanto en su mecánica como en sus potenciales aplicaciones.

**Ejemplo 8.11.** *Considere el polinomio  $p[z] = z^3 - 0,5z^2 - 0,64z + 0,32$ . Entonces  $n = 3$ ,  $a_n = 1 > 0$  y el arreglo de Jury resultante se muestra en la Tabla 8.2.*

*Los términos de la tercera, quinta y séptima fila se calculan siguiendo el procedimiento general descrito precedentemente, así:*

$\mathbf{z}^3$	$\gamma_{3,3} = 1$	$\gamma_{3,2} = -0,5$	$\gamma_{3,1} = -0,64$	$\gamma_{3,0} = 0,32$
	0,32	-0,64	-0,5	1
$\mathbf{z}^2$	$\gamma_{2,2} = 0,8976$	$\gamma_{2,1} = -0,2952$	$\gamma_{2,0} = -0,48$	
	-0,48	-0,2952	0,8976	
$\mathbf{z}^1$	$\gamma_{1,1} = 0,6409$	$\gamma_{1,0} = -0,4531$		
	-0,4531	0,6409		
$\mathbf{z}^0$	$\gamma_{0,0} = 0,3206$			

Tabla 8.2: Arreglo de Jury. Ejemplo 8.11

$$\gamma_{2,2} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0,32 \\ 0,32 & 1 \end{vmatrix}; \quad \gamma_{2,1} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & -0,64 \\ 0,32 & -0,5 \end{vmatrix}; \quad \gamma_{2,0} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,32 & -0,64 \end{vmatrix} \quad (8.66)$$

$$\gamma_{1,1} = \frac{1}{0,8976} \begin{vmatrix} 0,8976 & -0,48 \\ -0,48 & 0,8976 \end{vmatrix}; \quad \gamma_{1,0} = \frac{1}{0,8976} \begin{vmatrix} 0,8976 & -0,2952 \\ -0,48 & -0,2952 \end{vmatrix} \quad (8.67)$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{1}{0,6409} \begin{vmatrix} 0,6409 & -0,4531 \\ -0,4531 & 0,6409 \end{vmatrix} \quad (8.68)$$

Al aplicar el teorema de Jury observamos que  $\gamma_{3,3} = a_3 > 0$  y que  $\gamma_{\ell,\ell} > 0$ ,  $\forall \ell \in \{0, 1, 2\}$ . En consecuencia el polinomio  $p[z]$  tiene todas sus raíces dentro del disco unitario.

□□□

Para apreciar el uso del algoritmo de Jury en estudios de estabilidad relativa o condicional, consideraremos un ejemplo adicional.

**Ejemplo 8.12.** Sea un polinomio  $p[z] = z^2 + az + 0,8$ . Se trata de estudiar bajo qué condiciones este polinomio tiene sus dos raíces con módulo menor que uno. Note que  $n = 2$  y  $a_n = a_2 = 1 > 0$ .

Primero construimos el arreglo de Jury, el que aparece en la Tabla 8.3.

$\mathbf{z}^2$	$\gamma_{2,2} = 1$	$\gamma_{2,1} = a$	$\gamma_{2,0} = 0,8$
	0,8	a	1
$\mathbf{z}^1$	$\gamma_{1,1} = 0,36$	$\gamma_{1,0} = 0,2a$	
	0,2a	0,36	
$\mathbf{z}^0$	$\gamma_{0,0} = 1 - \frac{a^2}{1,8^2}$		

Tabla 8.3: Arreglo de Jury. Ejemplo 8.12

El arreglo de la tabla muestra que la condición requerida por el teorema de Jury ( $\gamma_{1,1} > 0$ ,  $\gamma_{0,0} > 0$ ) se cumple si y sólo si  $-1,8 < a < 1,8$ .

□□□

## 8.6. Polos, ceros y la respuesta temporal

A continuación examinaremos algunas propiedades fundamentales de los polos y ceros de la función de transferencia de un sistema de tiempo discreto, y su influencia sobre las características de la respuesta de un sistema lineal.

Consideremos una función de transferencia de la forma general:

$$H[z] = K \frac{\prod_{i=1}^m (z - \beta_i)}{z^d \prod_{l=1}^n (z - \alpha_l)} \quad (8.69)$$

donde  $\alpha_l \in \mathbb{C}$  y  $\beta_i \in \mathbb{C}$ . Si suponemos que no hay valores de  $l$  y de  $i$  tales que  $\alpha_l = \beta_i$  entonces,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son los ceros y los polos de la función de transferencia, respectivamente (a estos últimos hay que agregar los  $d$  polos en el origen).

Estaremos particularmente interesados en aquellos ceros ubicados sobre la circunferencia unitaria o en su cercanía, y en aquellos polos al exterior del disco unitario. Los polos y ceros ubicados en estas regiones juegan un rol fundamental en la dinámica del sistema.

Una clase especial de función de transferencia es aquella que tiene todos sus ceros y sus polos al interior del disco unitario en el plano complejo  $\boxed{z}$ . Tradicionalmente éstas se denominan **funciones de transferencia de fase mínima**. Sin embargo, a similitud de la nomenclatura usada en sistemas de tiempo continuo, reservaremos ese nombre para referirnos simplemente a funciones de transferencia sin ceros fuera del disco unitario, que tengan o no polos en él. Diremos que un cero tiene *fase no mínima* si tiene magnitud mayor o, al menos, igual a uno, de otra forma se denominará cero de fase mínima. Si hablamos de una **función de transferencia estable** nos referimos a que todos sus polos se ubican sobre el disco unitario abierto; si decimos que **inestable**, es porque al menos uno de sus polos se encuentra fuera del disco unitario, o sobre el borde de este último. Los polos en si mismos también se pueden denominar *estables* o *inestables*, si se encuentran dentro o fuera del disco unitario abierto, respectivamente <sup>2</sup>.

A continuación examinaremos la influencia de los polos y ceros sobre la respuesta transitoria de un sistema.

### 8.6.1. Polos

Las funciones que se originan al aplicar la transformación Zeta a las ERS de sistemas lineales, son funciones racionales y siempre pueden descomponerse

<sup>2</sup>En ocasiones, por abuso de lenguaje, a los ceros de fase no mínima también se les denomina ceros *inestables*, dado que se encuentran en la región del plano  $\boxed{z}$  en que los polos son inestables.

en fracciones parciales. Cada uno de los términos de esta expansión contiene ya sea un polo real simple, un par de polos complejos conjugados o múltiples combinaciones de polos repetidos. Por tanto, para conocer el efecto de los polos en la respuesta transiente de un sistema basta conocer el efecto ocasionado por los polos de primer y segundo orden y su interacción.

Un polo de primer orden contribuye a la descomposición en fracciones parciales, en general, con un término de la forma:

$$H_1[z] = \frac{K_1(1-a)}{z-a} \quad (8.70)$$

donde  $K_1$  es la ganancia a continua.

Mientras que un polo de segundo orden contribuye a la expansión con un término:

$$H_2[z] = K_2 \frac{1 - 2\rho \cos \theta_o + \rho^2}{z^2 - 2z\rho \cos \theta_o + \rho^2} \quad (8.71)$$

donde  $K_2$  es la ganancia a continua.

En el Capítulo 4 se describió gráficamente la relación entre la ubicación de las frecuencias naturales (simples) y los modos naturales. Dado que los polos de  $H[z]$ , salvo aquellos ubicados en el origen, son iguales a las frecuencias naturales, es conveniente repetir la descripción gráfica de esa relación.

Cada polo genera un término específico que coincide justamente con cada uno de los **modos naturales** en la respuesta del sistema a un impulso en la entrada. Estos modos están presentes también en la respuesta a cualquier entrada al sistema (excepto en casos muy excepcionales cuando hay coincidencia de polos con ceros). El tipo de modo natural asociado a cada polo de un sistema depende de la ubicación de éste sobre el plano complejo  $\boxed{z}$ , exactamente equivalente a la ubicación de cada frecuencia natural  $\lambda$  sobre un plano complejo, como se vio en el Capítulo 4. Para ilustrar esto podemos apreciar en la Figura 8.4 las diferentes respuestas a impulso de un sistema de un único polo.

En forma análoga a lo que ocurre con los sistemas continuos en el tiempo, nos referiremos, en general, como *polos rápidos* a aquellos que se encuentran más cercanos al origen del plano  $\boxed{z}$ . Esto es equivalente a considerar que la respuesta transitoria asociada a estos polos desaparece más rápido que aquella asociada a los otros polos, tal como puede apreciarse en la figura 8.4. Por otro lado, llamaremos *polos dominantes* o *polos lentos* a aquellos que se encuentran al interior del disco unitario, pero más cercanos al límite de estabilidad (circunferencia unitaria) que el resto de los polos de sistema. Esto equivale a decir que el transiente asociado a los polos dominantes decae más lentamente que los demás modos naturales.

Por ejemplo, si tenemos un sistema cuyos polos están ubicados en  $(-0,5; -0,6 \pm j0,6; -0,2; -0,2 + j0,3)$ , podemos decir que los polos dominantes son  $-0,6 \pm j0,6$  y el polo más rápido es el que se encuentra en  $-0,2$ .

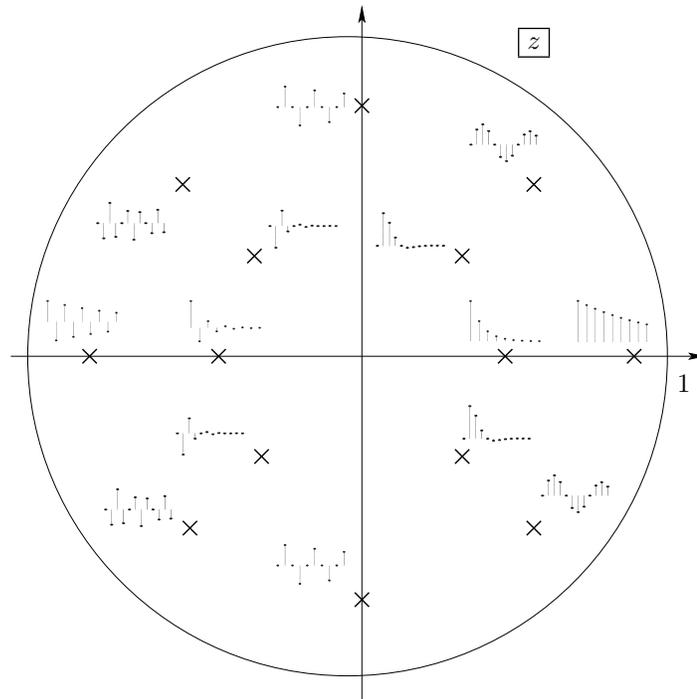


Figura 8.4: Relación entre la ubicación de los polos (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso decreciente).

### 8.6.2. Ceros

En general, el efecto de la ubicación de los polos en la dinámica de un sistema puede entenderse sin demasiada dificultad dada su directa relación con la estabilidad y las características generales de la respuesta del sistema. De hecho en la literatura sobre sistemas y su estabilidad se puede encontrar mucha más información que la aquí detallada. Por el contrario, a menudo se ha subestimado el efecto de los ceros en el análisis del comportamiento de un sistema. Sin embargo, en los últimos años se ha vuelto a dar un vistazo al efecto de los ceros sobre la respuesta de un sistema, que ahora son reconocidos por su importancia, por ejemplo, al definir criterios de diseño de sistemas de control. Es así como, mientras que los polos de un sistema están asociados a la presencia de sus modos naturales aislados, los ceros reflejan de algún modo la **interacción** entre éstos, por ejemplo, en el caso en que la salida de un sistema está formada por la suma de dos modos naturales diferentes. Además, a pesar que la ubicación de los polos determina los modos naturales de un sistema, es la ubicación de los ceros la que determina la *proporción* en que los modos aparecen combinados en la salida. En estas combinaciones los modos naturales toman diferente fuerza, pudiendo ser

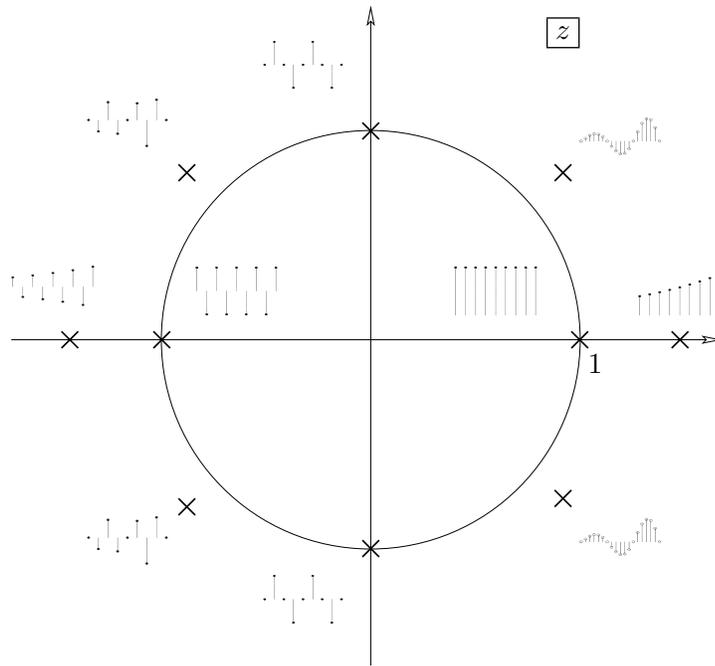


Figura 8.5: Relación entre la ubicación de los polos (de multiplicidad uno) y los modos naturales (caso no decreciente).

su efecto, en algunos casos, casi imperceptible. De hecho, la ubicación relativa de polos y ceros tiene directa relación con los conceptos de observabilidad y controlabilidad, como se detalla en el Capítulo 10.

Veamos esto a través de un ejemplo.

**Ejemplo 8.13.** Consideremos el sistema de la Figura 8.6, cuya función de transferencia sistema esta dada por:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{U[z]} = \frac{\alpha}{z - 0,5} + \frac{1 - \alpha}{z - 0,8} = \frac{(0,3\alpha + 0,2)z - (0,3\alpha + 0,1)}{(z - 0,5)(z - 0,8)} \quad (8.72)$$

Este sistema tiene sus polos en  $p_1 = 0,5$  y  $p_2 = 0,8$  y un cero en  $c_1 = \frac{3\alpha+1}{3\alpha+2}$ . Es decir, la ubicación está directamente relacionada con el peso de cada uno de los modos naturales en la respuesta del sistema, por ejemplo, a un impulso unitario en la entrada:

$$y[t] = \alpha(0,5)^t + (1 - \alpha)(0,8)^t \quad (8.73)$$

Si tomamos un valor de  $\alpha$  cercano a cero, por ejemplo  $\alpha = 0,01$ , la función de transferencia es:

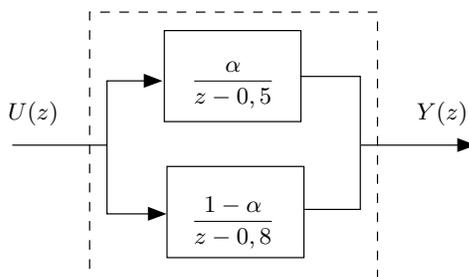


Figura 8.6: Sistema discreto con interacción aditiva entre dos estados.

$$H[z] = 0,203 \frac{(z - 0,5074)}{(z - 0,5)(z - 0,8)} \quad (8.74)$$

En esta puede observarse la cercanía del cero al polo en  $z = 0,5$ . La respuesta a impulso será en este caso:

$$y[t] = 0,01(0,5)^t + 0,99(0,8)^t \quad (8.75)$$

En que se aprecia la pequeña magnitud con que aparece el modo natural más rápido. Es decir, a medida que el cero se acerca al polo en  $z = 0,5$  se produce una **cuasi-cancelación**, que será total cuando  $\alpha = 0$ .

Invitamos al lector a estudiar el caso análogo cuando  $\alpha$  se acerca a 1 y cuál es su efecto sobre el otro modo natural del sistema. Además puede analizarse qué sucede con el sistema cuando el parámetro  $\alpha$  toma valores negativos. ¿Qué pasa si  $\alpha = -1/3$  o  $\alpha = -2/3$  ?

□□□

### 8.6.3. Respuesta inversa o contrarespuesta (*undershoot*)

La Figura 8.3 en la página 204 sugiere que existen casos en los que, en la presencia de una excitación mayor que cero, la respuesta del sistema se hace negativa durante algún lapso no despreciable. Existe un resultado análogo al Lema 7.1 en la página 182, respecto del rol de algunos ceros que están ubicados fuera del círculo unitario.

**Lema 8.2.** Considere un sistema lineal estable con función de transferencia  $H[z]$ , y con un cero real en  $z = c$ , donde  $c > 1$ , entonces la respuesta a un escalón positivo se hace negativa durante uno o más lapsos no despreciables.

#### **Demostración**

La respuesta del sistema está dada por:

$$Y[z] = H[z] \frac{Kz}{z-1}; \quad K > 0 \quad (8.76)$$

Entonces:

$$H[z] \frac{Kz}{z-1} = \sum_{t=0}^{\infty} y[t]z^{-t}; \quad |z| > 1 \quad (8.77)$$

Note que la región de convergencia queda determinada, por un lado, por el hecho que el sistema es estable, por lo cual la transformada de  $h[t]$  está bien definida para  $|z| \geq 1$  y, por otro lado, por el hecho que la respuesta a un escalón está bien definida para  $|z| > 1$ . En consecuencia, la región de convergencia para  $y[t]$  es  $|z| > 1$ .

Si ahora, en la ecuación (8.77), hacemos  $z = c$  (note que, por ser  $c > 1$ , está en la región de convergencia) obtenemos, aplicando el hecho que  $H[c] = 0$

$$H[c] \frac{K}{c} = \sum_{t=0}^{\infty} y[t]c^{-t} = 0 \quad (8.78)$$

Como la suma es cero, y  $c^{-t} > 0, \forall t$ , necesariamente  $y[t]$  debe ser negativa en uno o más lapsos, y positiva, el resto del tiempo.

El lema precedente justifica la presencia de *undershoot*, como el sugerido en la Figura 8.3 en la página 204. Sin embargo, este comportamiento inverso se puede manifestar en formas más diversas, tal como se ilustra en la Figura 8.7.

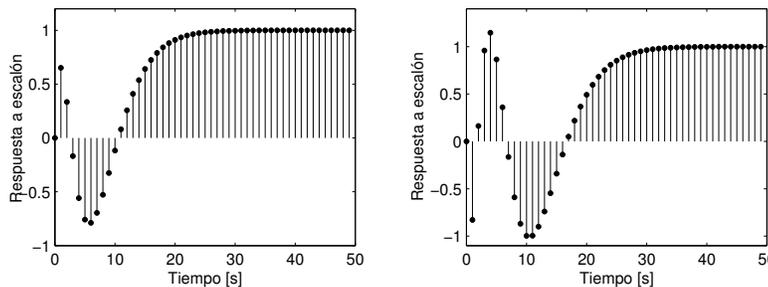


Figura 8.7: Ejemplos de distintas formas de respuesta inversa en sistemas discretos.

## 8.7. Relaciones entre la transformada Zeta y de Fourier

Al terminar este capítulo observamos que hemos desarrollado una forma de describir las señales y los sistemas lineales de tiempo discreto usando una transformada alternativa a la de Fourier, descrita en el Capítulo 6. Es, por lo tanto, de interés precisar similitudes y diferencias. Para estos efectos, consideraremos una señal  $h[t]$ , la que puede corresponder, como caso especial, a la respuesta

de un sistema a un delta de Kronecker, con condiciones iniciales iguales a cero. Denotaremos por  $H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}]$  y por  $H_{\mathcal{Z}}[z]$ , las transformadas de Fourier y Zeta, respectivamente. El análisis comparativo arroja los siguientes resultados:

- R.1 La transformada de Fourier, cuando existe, requiere conocer  $h[t] \forall t \in \mathbb{Z}$ . En cambio, la transformada Zeta sólo requiere conocer  $h[t], \forall t \in \mathbb{N}$ . Se debe agregar que algunos autores definen la transformada Zeta **bilateral**, la que está también dada por (8.1), pero con el límite inferior de la suma igual a  $-\infty$ .
- R.2 La transformación de Fourier requiere que  $|h[t]|$  sea acotado  $\forall t \in \mathbb{R}$ . En cambio la transformación Zeta sólo requiere que exista un número  $\rho \in \mathbb{R}$ , tal que  $|h[t]\rho^{-t}|$  esté acotado  $\forall t \in \mathbb{N}$ .
- R.3 Si  $h[t]$ , es acotada pero no converge a cero para  $t \rightarrow \pm\infty$ , entonces su transformada de Fourier contiene deltas de Dirac en frecuencia. Ése no es el caso de la transformación Zeta.
- R.4 Si  $|h[t]|$  es sumable, lo cual implica que converge a cero para  $t \rightarrow \infty$ , y si además  $h[t] = 0, \forall t < 0$ , entonces

$$\mathcal{F}\{h[t]\} = H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}] = \mathcal{Z}\{h[t]\}|_{z=e^{j\theta}} = H_{\mathcal{Z}}[e^{j\theta}] \quad (8.79)$$

- R.5 Si  $h[t]$  no es absolutamente sumable, pero  $H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}]$  existe, entonces la relación (8.79) no se cumple, aunque  $h[t] = 0 \forall t < 0$ . Esto ocurre, por ejemplo cuando  $h[t]$  es la respuesta a delta de Kronecker de un sistema lineal, con condiciones iniciales iguales a cero y con una o más frecuencias naturales **no repetidas** sobre la circunferencia unitaria. Estas condiciones dicen que  $H_{\mathcal{Z}}[z]$  tiene polos en la circunferencia unitaria, digamos en  $z = e^{j\theta_1}, e^{j\theta_2}, \dots, e^{j\theta_p}$ , y que  $H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}]$  contiene deltas de Dirac en esas mismas frecuencias (como se demuestra en el Apéndice app:aptrf).
- R.6 Si se cumplen las condiciones especificadas en R.5, es posible obtener  $H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}]$  a partir de  $H_{\mathcal{Z}}[z]$ . Para ello basta expandir  $H_{\mathcal{Z}}[z]$  en fracciones parciales y luego considerar en forma separada las fracciones asociadas a polos en la circunferencia unitaria. Para estas últimas se usan los siguientes resultados:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{A_{\ell}z}{z - e^{j\theta_{\ell}}}\right\} = A_{\ell}e^{j\theta_{\ell}t}\mu[t] \quad (8.80)$$

$$\mathcal{F}_d\{A_{\ell}e^{j\theta_{\ell}t}\mu[t]\} = \frac{A_{\ell}e^{j\theta}}{e^{j\theta} - e^{j\theta_{\ell}}} + \pi A_{\ell} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_{\ell} + 2k\pi) \quad (8.81)$$

donde

$$A_{\ell} = \lim_{z \rightarrow e^{j\theta_{\ell}}} (z - e^{j\theta_{\ell}})H_{\mathcal{Z}}[z] \quad (8.82)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de tiempo continuo (ver Sección §7.8), se puede concluir que la fórmula general para obtener la transformada de Fourier de tiempo discreto, a partir de la transformada Zeta es:

$$H_{\mathcal{F}}[e^{j\theta}] = H_{\mathcal{Z}}[e^{j\theta}] + \pi \sum_{\ell=1}^p \left( A_{\ell} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_{\ell} + 2k\pi) \right) \quad (8.83)$$

donde  $A_{\ell}$  está dada por (8.82) y  $\{e^{j\theta_1}, \dots, e^{j\theta_p}\}$  son los polos de  $H_{\mathcal{Z}}[z]$  sobre la circunferencia unitaria.

## 8.8. Problemas para el lector

**Problema 8.1.** Determine la transformada Zeta de las siguientes funciones:

$$(i) \quad y[t] = A \cos(\theta t + \phi)$$

$$(ii) \quad y[t] = t a^{-t}$$

$$(iii) \quad y[t] = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & ; 2 \leq t \leq 7 \\ 0 & ; t \geq 8 \end{cases}$$

$$(iv) \quad y[t] = (-0,5)^t$$

**Problema 8.2.** Para los siguientes sistemas:

$$(i) \quad y[t] - y[t - 1] = u[t]$$

$$(ii) \quad y[t] = u[t] - u[t - 1]$$

$$(iii) \quad y[t] - 1,4y[t - 1] + 0,48y[t - 2] = -0,08u[t]$$

$$(iv) \quad y[t] - y[t - 1] - 1,1[t - 2] = -u[t - 1] - 0,1u[t - 2]$$

**8.2.1** Determine su función de transferencia,

**8.2.2** Determine si son o no estables,

**8.2.3** Determine y grafique su respuesta a delta de Kronecker, y

**8.2.4** Determine y grafique su respuesta a escalón unitario.

**Problema 8.3.** Considere un sistema definido por su ecuación recursiva:

$$y[t + 2] - y[t + 1] + 0,5y[t] = u[t] - 0,5u[t - 1]$$

**8.3.1** Determine la función de transferencia del sistema.

**8.3.2** Determine la salida del sistema a entrada cero y condiciones iniciales  $y[-1] = 1$  y  $y[-1] = -1$ . Grafique.

**8.3.3** Determine la salida del sistema si la entrada es  $u[t] = \mu[t] - \mu[t - 2]$ . Grafique.

**Problema 8.4.** Si  $N$  es un número entero positivo, entonces considere los siguientes sistemas:

$$(promedio móvil) \quad y[t] = \frac{1}{N} (u[t] + u[t - 1] + \dots + u[t - N])$$

$$(auto-regresivo) \quad y[t] + y[t - 1] + \dots + y[t - N] = u[t]$$

**8.4.1** Determine su función de transferencia,



**8.4.2** Determine sus polos y ceros,

**8.4.3** Determine y grafique su respuesta a delta de Kronecker, y

**8.4.4** Determine y grafique su respuesta a escalón unitario.

**Problema 8.5.** Para el sistema:

$$y[t] + \alpha_1 y[t-1] + \alpha_0 y[t-2] = \beta u[t] - u[t-1]$$

**8.5.1** Determine condiciones sobre  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta$  de manera que el sistema sea estable.

**8.5.2** Si  $u[t] = 0$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_0 = 0,16$  y  $\beta = 0$ , determine la condiciones iniciales de manera que el la respuesta homogénea sólo aparezca el modo natural dominante.

**8.5.3** Si no se conoce  $u[t] = 0$ , pero  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_0 = 0,16$ , determine  $\beta$  de manera que en la salida solo aparezca el modo natural mas rápido.

**Problema 8.6.** Se sabe que la respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario en su entrada (con condiciones iniciales iguales a cero) está dada por:

$$g[t] = \left[ 0,5 - (0,4)^t \cos\left(\frac{\pi}{3}(t-1)\right) \right] \mu[t]$$

Determine la función de transferencia del sistema.

**Problema 8.7.** Suponga que la respuesta de un sistema a un delta de Kronecker en la entrada, con condiciones iniciales iguales a cero, está dada por:

$$h[t] = 0,8 - 0,8 \cos(0,2\pi t)$$

Determine la función de transferencia del sistema,  $H[z]$ , y compare con la TFTD de  $h[t]$ .

**Problema 8.8.** Calcule, si existe, la respuesta estacionaria de cada uno de los sistemas cuya función de transferencia se indica, cuando la entrada es  $u[t] = \cos(0,25\pi t)$

$$\begin{array}{ll} a) H_1[z] = \frac{2}{z^2} & b) H_2[z] = 0,2 \frac{z-2}{(z-0,5)(z-0,4)} \\ c) H_3[z] = \frac{z}{z^2 - 0,1z + 0,02} & d) H_4[z] = \frac{z-0,5}{z^2 - 2,5z + 0,8} \end{array}$$

**Problema 8.9.** Calcule y grafique la respuesta a escalón de un sistema cuya función de transferencia está dada por:

$$H[z] = \frac{0,3z^3 + 0,8z^2 - 0,5z - 0,6}{z^4}$$

**Problema 8.10.** *Suponga un sistema con función de transferencia:*

$$H[z] = \frac{z - 0,5}{(z - e^{j0,3\pi})^2(z - e^{-j0,3\pi})^2}$$

*Verifique que la respuesta a una senoide  $A \cos(0,3\pi t)$  contiene una (o más) oscilaciones de la misma frecuencia, cuya amplitud crece polinomialmente en el tiempo. Sugerencia: use MAPLE o MATLAB .*

---

## Capítulo 9

# Representación gráfica de sistemas lineales

### 9.1. Ideas generales

La caracterización de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal, así como su función de transferencia obtenida con la transformación de Fourier, la transformación de Laplace o la transformación Zeta, son herramientas útiles para el análisis, síntesis y diseño de sistemas dinámicos en sus distintas aplicaciones, tales como procesamiento de señales y control automático, entre otras. Estas herramientas han sido extensamente utilizadas a través de los años y han generado también una serie de formas especiales de representación gráfica.

En primer lugar, recordemos que la respuesta en frecuencia de un sistema lineal y su función de transferencia evaluada en  $s = j\omega$  (o  $s = e^{j\theta}$ ) están caracterizadas por la misma función de la frecuencia<sup>1</sup>  $H(j\omega)$  (o  $H[e^{j\theta}]$ ) la que, en general, toma valores complejos. Esto es válido con independencia de si el sistema lineal es estable o no. Si el sistema es estable, las expresiones coinciden con la transferencia de Fourier respectiva. Una de las formas de representación más usuales se basa en gráficos separados de la *magnitud* y la *fase* de  $H(j\omega)$ , en donde la frecuencia,  $\omega$ , es la variable independiente. La más conocida y usada de estas representaciones fue desarrollada por Hendrik Bode en los años cuarenta [4]. Por otra parte, también es posible representar  $H(j\omega)$  en un solo gráfico único donde el eje de las abscisas corresponde a su parte real, y el eje de ordenadas, a su parte imaginaria. Éste se denomina diagrama polar o de Nyquist. En esta última caracterización, la frecuencia queda implícita.

Finalmente en este capítulo introducimos la representación en diagramas de bloques, ampliamente usada en el dominio temporal, de Fourier, de Laplace y de la transformada Zeta, dada su gran utilidad para representar sistemas complejos mediante la interconexión de sistemas más simples.

<sup>1</sup>Ver Lema 6.1 en la página 128.

## 9.2. Diagramas de Bode

### 9.2.1. Tiempo continuo

Como ya hemos visto, un sistema de tiempo continuo puede ser caracterizado por la función  $H(j\omega)$ . El diagrama de Bode correspondiente a esta función está formado por dos gráficos: uno que describe la evolución de su magnitud  $|H(j\omega)|$  como función de la frecuencia angular  $\omega$ , y el otro describe el ángulo de la respuesta en frecuencia  $\angle H(j\omega)$ , también como función de la frecuencia angular  $\omega$ .

Los diagramas de Bode son dibujados con ejes especiales:

- El eje de las abscisas es lineal en  $\log_{10}(\omega)$ , o logarítmico en  $\omega$ . Esto permite una representación compacta de la frecuencia en un gran rango de valores.

En este eje, la unidad es la *década*, que corresponde a la distancia en el eje que separa a una frecuencia cualquiera  $\omega_1$  y su múltiplo  $10\omega_1$ . Una unidad alternativa es la *octava*, que corresponde a la distancia entre  $\omega_1$  y  $2\omega_1$  (doble de la frecuencia).

- La magnitud de la respuesta en frecuencia es medida en *decibeles* [dB], es decir, se representa la función:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (9.1)$$

es decir, al igual que para la frecuencia, se utiliza un eje logarítmico en  $|H(j\omega)|$ .

El uso de ejes logarítmicos proporciona varias ventajas, incluyendo precisión para valores pequeños y grandes de  $|H(j\omega)|$ , facilidad para construir aproximaciones simples para  $|H(j\omega)|_{dB}$ , y el hecho que la respuesta en frecuencia de sistemas en cascada puede ser obtenida *sumando* las respuestas en frecuencia individuales.

- El ángulo es medido en una escala lineal en radianes o grados.

Los paquetes de *software* disponibles, tales como MATLAB, incluyen comandos especiales para calcular la respuesta en frecuencia y dibujar los diagramas de Bode. Sin embargo, es importante, para el manejo conceptual de la herramienta, desarrollar la habilidad de hacer, en forma manual y rápida, un bosquejo de esos diagramas, útiles para el análisis y el diseño de las propiedades de un sistema o de una señal.

Para desarrollar estas ideas consideraremos una función de transferencia que puede expresarse como un producto de funciones particulares, que llamaremos **factores canónicos**, correspondientes a los siguientes tipos o clases:

$$[\text{B1}] \quad K$$

$$[\text{B2}] \quad (1 + Tj\omega)^q, \quad q \in \{-1; 1\}$$

$$[\mathbf{B3}] \quad (j\omega)^q, q \in \{-1; 1\}$$

$$[\mathbf{B4}] \quad \left[ 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^q \quad q \in \{-1; 1\}, 0 \leq \xi < 1.$$

$$[\mathbf{B5}] \quad e^{-j\omega\tau}, \tau > 0$$

donde el exponente  $q \in \{-1; 1\}$  describe las dos opciones para cada factor: su presencia en el numerador o en el denominador de la función  $H(j\omega)$  dada.

A continuación se presenta un ejemplo ilustrativo de descomposición en factores canónicos.

**Ejemplo 9.1.** Considere la función:

$$H(j\omega) = 6 \frac{e^{-0,1j\omega}(j\omega + 2)}{j\omega(j\omega + 1)((j\omega)^2 + j\omega + 4)} \quad (9.2)$$

Entonces  $H(j\omega)$  puede re-escribirse como:

$$H(j\omega) = \frac{(3) \cdot (e^{-0,1j\omega}) \cdot (1 + 0,5j\omega)}{(j\omega) \cdot (1 + j\omega) \cdot \left( 1 + 2 \times 0,25 \frac{j\omega}{2} + \left( \frac{j\omega}{2} \right)^2 \right)} \quad (9.3)$$

□□□

Así, en el caso general:

$$H(j\omega) = \prod_{\ell=1}^n F_{\ell}(j\omega) \quad (9.4)$$

donde cada uno de los factores elementales,  $F_{\ell}(j\omega)$ , es una función perteneciente a alguno de los tipos [B1] a [B5]. Entonces

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)| = \sum_{\ell=1}^n 20 \log_{10} |F_{\ell}(j\omega)| = \sum_{\ell=1}^n |F_{\ell}(j\omega)|_{dB} \quad (9.5)$$

$$\angle H(j\omega) = \sum_{\ell=1}^n \angle F_{\ell}(j\omega) \quad (9.6)$$

Es decir:

- La magnitud (en dB) de  $H(j\omega)$  es igual a la suma de las magnitudes (en dB) de  $F_{\ell}(j\omega)$ , y
- El ángulo de  $H(j\omega)$  es igual a la suma de los ángulos de  $F_{\ell}(j\omega)$ .

En consecuencia, para poder construir aproximaciones para una función de transferencia arbitraria, es suficiente desarrollar aproximaciones para cada uno de los cinco factores canónicos, [B1] a [B5]. Eso es lo que haremos a continuación.

**[B1]**

En este caso  $F(j\omega) = K$  y su magnitud es exactamente:

$$|K|_{dB} = 20 \log_{10} |K| \quad (9.7)$$

es decir, es una recta horizontal. Por su parte, la fase es:

$$\angle K = \begin{cases} 0 & \text{para } K \geq 0 \\ 180^\circ & \text{para } K < 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

Así, la fase de la respuesta en frecuencia también es una recta horizontal.

**[B2]**

En este caso  $F(j\omega) = (1 + Tj\omega)^q$ , donde  $q \in \{-1; 1\}$ . Entonces:

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20q \log_{10} \sqrt{1 + T^2\omega^2} = 10q \log_{10}(1 + T^2\omega^2) \quad (9.9)$$

$$\angle F(j\omega) = q \arctan(T\omega) \quad (9.10)$$

Podemos construir una aproximación por trazos o **asíntotas** para la magnitud, si observamos que:

$$\omega \ll \frac{1}{|T|} \implies |F(j\omega)|_{dB} \approx 0 [dB] \quad (9.11)$$

$$\omega \gg \frac{1}{|T|} \implies |F(j\omega)|_{dB} \approx 20q \log_{10}(|T|\omega) \quad (9.12)$$

Esto significa que la magnitud de la respuesta en frecuencia de una función tipo [B2] puede aproximarse por dos asíntotas: una de baja frecuencia, con pendiente  $0 [dB/dec]$  y otra de alta frecuencia, cuya pendiente es  $20q [dB/dec]$ . Estas asíntotas se intersectan en  $\omega = 1/|T|$ . Cuando  $q = -1$ , a esta frecuencia la **curva exacta** pasa  $10 \log_{10} 2 [dB]$  más abajo, ya que  $|F(j/|T|)| = \sqrt{1/2}$ . Se suele usar la aproximación  $10 \log_{10} 2 \approx 3$ .

En la Figura 9.1 se muestra la aproximación asintótica y la curva exacta para una función tipo [B2], con  $q = -1$ , como función de la frecuencia normalizada  $\omega|T|$ .

La fase de la respuesta en frecuencia es más difícil de aproximar de una manera simple. Sabemos que para  $|T\omega| \ll 1$  la fase es aproximadamente cero y que para  $|T\omega| \gg 1$ , la fase es aproximadamente  $\phi_\infty = 90q \text{signo}(T) [^\circ]$ . Una aproximación aceptable puede ser construida por tres rectas:

- Una recta horizontal en  $0 [^\circ]$  en el rango de frecuencia  $(-\infty; 0, 1/|T|)$ , es decir, hasta una década antes de  $1/|T|$ .

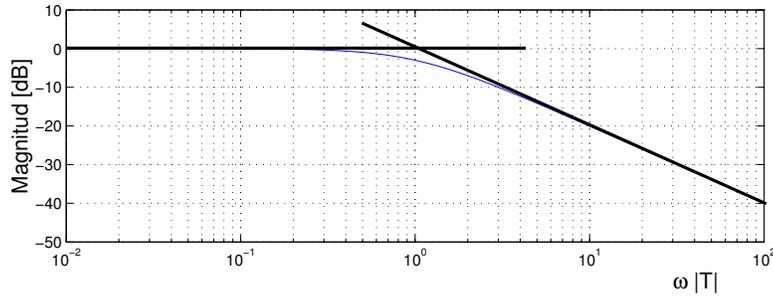


Figura 9.1: Diagrama de Bode de magnitud (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B2], con  $q = -1$

- Una recta que une los puntos  $(0; 0, 1/|T|)$  y  $(10/|T|; \phi_\infty)$ , es decir, desde una década antes hasta una década después de  $1/|T|$ . Esta recta tiene una pendiente de  $0,5\phi_\infty [^\circ/dec]$  (para el caso con  $T > 0$  y  $q = 1$ , esta pendiente es  $45 [^\circ/dec]$ ),
- Una recta horizontal en  $\phi_\infty$  en el rango de frecuencia  $(10/|T|, \infty)$ . Así, en alta frecuencia, la fase tiende a  $90q [^\circ] \text{signo}(T)$ .

Esta aproximación es exacta en  $\omega = 1/|T|$ , donde la fase es  $45q [^\circ]$ .

En la Figura 9.2 se aprecia tanto la aproximación asintótica, como la curva exacta para el caso  $q = -1$  y  $T > 0$ . La frecuencia se ha normalizado a  $\omega|T|$ .

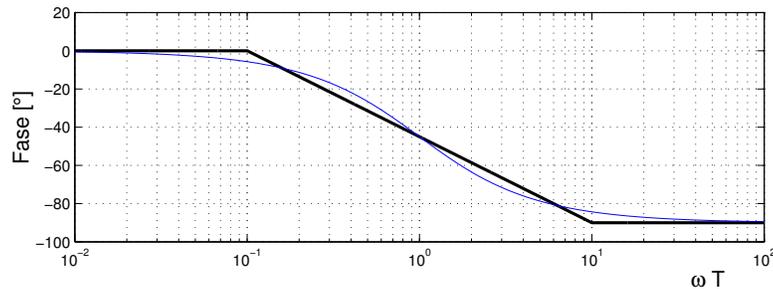


Figura 9.2: Diagrama de Bode de fase (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B2], con  $q = -1$  y  $T > 0$

### [B3]

En este caso,  $F(j\omega) = (j\omega)^q$ ,  $q \in \{-1; 1\}$ . La magnitud, en decibeles, está dada por:

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20q \log_{10} |\omega| \quad (9.13)$$

De esta forma, considerando que el eje de abscisas está en escala logarítmica, la magnitud es una recta con pendiente  $20q$  [dB/dec].

La fase, en tanto, es:

$$\angle F(j\omega) = 90q [^\circ] \quad (9.14)$$

que corresponde a una recta horizontal en  $90q [^\circ]$ .

#### [B4]

En este caso, el factor canónico es de la forma:

$$F(j\omega) = \left[ 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^q \quad (9.15)$$

en que  $q \in \{-1; 1\}$  y  $0 \leq \xi < 1$ . Se trata de un factor de segundo grado, determinado por dos parámetros:  $\omega_n$  y  $\xi$ .

La magnitud es:

$$\begin{aligned} |F(j\omega)|_{dB} &= 20q \log_{10} \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ &= 10q \log_{10} \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) \end{aligned} \quad (9.16)$$

Y el ángulo de fase, para  $\omega_n > 0$ , es:

$$\angle F(j\omega) = \begin{cases} q \arctan \left( \frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) & \forall \omega < \omega_n \\ 90q [^\circ] + q \arctan \left( \frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} \right) & \forall \omega > \omega_n \end{cases} \quad (9.17)$$

Para construir una aproximación por trazos o **asíntotas**, primero observamos que:

$$\omega \ll \omega_n \implies |F(j\omega)|_{dB} \approx 0 [dB] \quad (9.18)$$

$$\omega \gg \omega_n \implies |F(j\omega)|_{dB} \approx 40q \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (9.19)$$

Así, en baja frecuencia, la magnitud (en [dB]) puede ser aproximada por una asíntota horizontal en 0 [dB]. En alta frecuencia, la aproximación asíntótica es una recta de pendiente  $40q$  [dB/dec] que pasa por el punto  $(\omega_n; 0)$ . Sin embargo, la curva exacta puede ser muy distinta a la aproximación asíntótica, dependiendo del valor del parámetro  $\xi$ . Esto se ilustra en la Figura 9.3, donde se muestran las curvas exactas para  $\xi = 0,01$  y  $\xi = 0,1$ . La flecha indica la dirección en la que aumenta  $\xi$ . Note que en el caso límite, cuando  $\xi = 0$ , el diagrama tiende a  $\infty$  [dB], a la frecuencia  $\omega = \omega_n$ .

En general, el diagrama de magnitud exhibe, a la frecuencia  $\omega_r$ , un pico de resonancia  $M_r$ , valor que puede calcularse usando los métodos clásicos del

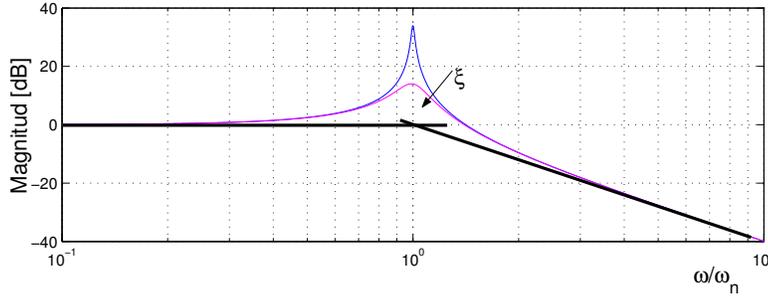


Figura 9.3: Diagrama de Bode de magnitud (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B4], con  $q = -1$  y dos valores de  $\xi$ .

Cálculo. Para simplificar el desarrollo, usaremos la frecuencia normalizada  $\nu = \omega/\omega_n$  y el hecho que para  $q = -1$ ,  $|F(j\omega)|_{dB}$  alcanza el máximo a la misma frecuencia  $\nu_r$  a la que  $g(\nu) = (1 - \nu^2)^2 + 4\xi^2\nu^2$  alcanza el mínimo. Así, derivando y haciendo igual a cero se obtiene:

$$\frac{dg(\nu)}{d\nu} = 2(1 - \nu^2)(-2\nu) + 8\xi^2\nu = 0 \quad (9.20)$$

donde se observa que la resonancia ocurre exactamente en:

$$\nu_r = \sqrt{1 - 2\xi^2} \implies \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (9.21)$$

Con esto, y la ecuación (9.16), se obtiene:

$$M_r = |F(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi} \quad (9.22)$$

Finalmente, en (9.21) se puede notar que el pico de resonancia existe para  $q = -1$  si y sólo si  $\xi < 1/\sqrt{2}$ .

La fase de una función de tipo [B4], dada por (9.17), se puede también aproximar por asíntotas, con la misma prevención que en el caso de la magnitud: la precisión de la aproximación asintótica depende crucialmente del valor de  $\xi$ . Así:

$$\omega \ll \omega_n \implies \angle F(j\omega) \approx 0 [^\circ] \quad (9.23)$$

$$\omega \gg \omega_n \implies \angle F(j\omega) \approx 180 q [^\circ] \quad \omega_n > 0 \quad (9.24)$$

De esta forma, la aproximación asintótica se compone de dos rectas horizontales: una en  $0 [^\circ]$  y la otra en  $180 q [^\circ]$ . En la Figura 9.4 se presenta el caso de  $q = -1$ , donde se muestran dos curvas, para dos valores de  $\xi$  (0,01 y 0,1). En el gráfico se indica, con una flecha, la dirección en que crece  $\xi$ . Note que a

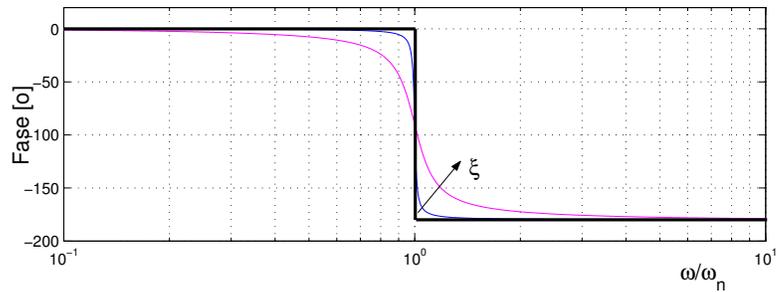


Figura 9.4: Diagrama de Bode de fase (línea fina) y su aproximación asintótica (línea gruesa) para una función tipo [B4], con  $q = -1$ ,  $\omega_n > 0$

medida que crece  $\xi$ , la aproximación asintótica se hace cada vez más inexacta, contrariamente a lo que ocurre con la aproximación asintótica para la magnitud.

Si, en el factor [B4], el parámetro  $\omega_n$  es negativo, la magnitud de la respuesta en frecuencia se mantiene inalterada. Sin embargo, la fase cambia de signo. El diagrama de Bode para la fase es entonces el reflejo especular, en torno a la recta horizontal en  $0$  [°], de la característica de fase para el caso  $\omega_n > 0$ .

Siempre es posible refinar las aproximaciones inherentes en los diagramas de Bode, en particular aprovechando herramientas como MAPLE que facilitan el manejo de expresiones analíticas complejas. En este caso, es posible obtener la pendiente exacta del gráfico de la fase de  $H(j\omega)$  en la frecuencia de corte  $\omega_n$ , que permitiría trazar una tercera asíntota, de manera similar a la Figura 9.2. El siguiente código MAPLE establece supuestos sobre las variables  $q$ ,  $\omega$ ,  $\omega_n$  y  $\xi$ , luego define la función  $H(j\omega)$ , obtiene la derivada respecto a  $\phi = 10^\omega$  (debido a la escala logarítmica en el eje horizontal), y la evalúa en  $\omega = \omega_n$ , con  $\omega_n > 0$ .

MAPLE

```
> assume(q,integer);
> assume(xi>0,omega>0,omega_n>0);
> interface(showassumed=0);
> H(omega):=(1+2*xi*I*omega/omega_n+(I*omega/omega_n)^2)^q;
> fase_H:=evalc(argument(H(omega)));
> d_fase_H:=factor(diff(subs(omega=10^phi,fase_H),phi));
> simplify(subs(phi=log10(omega_n),d_fase_H));
```

$$H(j\omega) = \left( 1 + \frac{2\xi(j\omega)}{\omega_n} + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^q \quad (9.25)$$

$$fase_H(j\omega) = \arctan \left( \frac{\text{sen} \left( q \arctan \left( \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \right)}{\text{cos} \left( q \arctan \left( \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \right)} \right) \quad (9.26)$$

$$\frac{d}{d\phi} fase_H = \frac{2q\xi 10^\phi \ln(10)\omega_n (\omega_n^2 + (10^\phi)^2)}{(\omega_n^2 - (10^\phi)^2)^2 + (2\xi(10^\phi)\omega_n)^2} \quad (9.27)$$

El comando de la última línea del código MAPLE nos da la respuesta:

$$\left. \frac{d}{d\phi} fase_H \right|_{\phi=10^{\omega_n}} = \frac{q \ln(10)}{\xi} \approx \frac{2,3q}{\xi} \quad (9.28)$$

[B5]

En este caso, tenemos la función  $F(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$ ,  $\tau > 0$ , y por lo tanto:

$$|F(j\omega)| = 1 \iff |F(j\omega)|_{dB} = 0 \quad (9.29)$$

$$\angle F(j\omega) = -\omega\tau \quad (9.30)$$

Note que el retardo puro sólo introduce un ángulo de fase *lineal en frecuencia*; sin embargo, dado que los diagramas de Bode usan una escala de frecuencia logarítmica, la fase no aparece como una recta, sino que como una curva exponencial. Esto último se debe a que la fase puede también escribirse como:

$$\angle F(j\omega) = -\omega\tau = -\tau 10^{\log_{10} \omega} \quad (9.31)$$

La Figura 9.5 muestra el diagrama de Bode de fase en una escala de frecuencia normalizada, lo cual permite entender por qué no existe una aproximación asintótica sencilla para este caso.

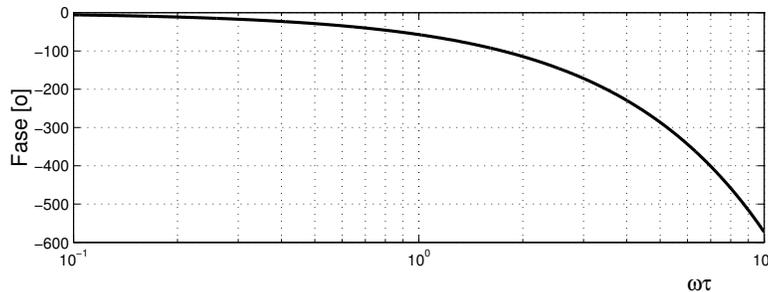


Figura 9.5: Diagrama de Bode de fase para una función tipo [B5]

□□□

Con las aproximaciones para las clases [B1] a [B4], más la representación exacta de la clase [B5], se puede construir una aproximación global para una función arbitraria  $H(j\omega)$  usando (9.5)-(9.6). De esa forma, la aproximación, tanto para la magnitud (en [dB]) como para la fase (en [°]) de  $H(j\omega)$  se puede calcular sumando las aproximaciones para cada uno de los factores canónicos.

A continuación bosquejamos una forma sistemática de construir esas aproximaciones. Esto requiere tener presente las aproximaciones asintóticas de los factores [B1]-[B4], que resumimos en las Tablas 9.1 y 9.2. Note que las asíntotas son rectas que se encuentran en puntos o frecuencias de quiebre.

Factor ( $\ell \in \mathbb{Z}$ )	Asíntota 1	Asíntota 2
$K$	$20 \log_{10}  K $ [dB] $\forall \omega$	
$(j\omega)^\ell$	$20\ell \log_{10} \omega$ [dB] $\forall \omega$	
$(1 + j\omega T)^\ell$ $T \in \mathbb{R}$	0 [dB] $\forall \omega < \frac{1}{ T }$	$20\ell \log_{10}(\omega T )$ [dB] $\forall \omega > \frac{1}{ T }$
$\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^\ell$ $0 \leq \xi < 1$	0 [dB] $\forall \omega < \omega_n$	$40\ell \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$ [dB] $\forall \omega > \omega_n$

Tabla 9.1: Aproximaciones asintóticas de magnitud de factores básicos

Con estas asíntotas se puede desarrollar un proceso constructivo, tanto para magnitud como para fase. La contribución de factores tipo [B1] y [B5] es agregada al final en ambos diagramas. Lo mismo se aplica a la contribución de un factor tipo [B3] en el diagrama de fase. El procedimiento se desarrolla a través de los siguientes pasos:

**Paso 1** Escriba la función de transferencia,  $H(j\omega)$  como producto de factores [B1]-[B5].

**Paso 2** Seleccione el rango de frecuencias en el cual desea construir la aproximación asintótica.

**Paso 3** Anote para cada factor, los puntos de quiebre de sus asíntotas así como la pendiente de ellas entre cada par de puntos de quiebre consecutivos. Tome en inmediata consideración los factores repetidos (tal como se ha hecho en las Tablas 9.1 y 9.2).

**Paso 4** En el diagrama de magnitud, dibuje la asíntota<sup>2</sup> del factor  $(j\omega)^\ell$ . Note

<sup>2</sup>Observe que en este caso, la asíntota coincide con el diagrama exacto, tanto en magnitud como en fase

Factor ( $\ell \in \mathbb{Z}$ )	Asíntota 1	Asíntota 2	Asíntota 3
$K$	$(1 - \text{signo}(K))90$ [°] $\forall \omega$		
$(j\omega)^\ell$	$90\ell$ [°] $\forall \omega$		
$(1 + j\omega T)^\ell$ $T > 0$	$0$ [°] $\forall \omega < \frac{1}{10T}$	$45\ell \log_{10}(10\omega T )$ [°] $\frac{1}{10T} < \omega < \frac{10}{T}$	$90\ell$ [°] $\forall \omega > \frac{10}{T}$
$(1 + j\omega T)^\ell$ $T < 0$	$0$ [°] $\forall \omega < \frac{1}{10T}$	$-45\ell \log_{10}(10\omega T )$ [°] $\frac{1}{10T} < \omega < \frac{10}{T}$	$-90\ell$ [°] $\forall \omega > \frac{10}{T}$
$\left(1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^\ell$ $0 \leq \xi < 1$	$0$ [°] $\forall \omega < \omega_n$	$180\ell$ [°] $\forall \omega > \omega_n$	

Tabla 9.2: Aproximaciones asintóticas de fase de factores básicos

que esta asíntota pasa por 0 [dB] en  $\omega = 1$ .

**Paso 5** Avance en el eje de frecuencias hasta encontrar el primer punto de quiebre y sume la pendiente correspondiente.

**Paso 6** Proceda hasta el siguiente punto de quiebre y sume la nueva pendiente que aparece a la pendiente acumulada. Repita hasta llegar al final del rango de frecuencias elegido.

**Paso 7** Desplace verticalmente el diagrama de magnitud en  $20 \log_{10} |K|$ . Una forma equivalente para esta operación, es re-numerar el eje de ordenadas.

**Paso 8** Si  $H(j\omega)$  incluye un factor  $(j\omega)^\ell$ , es decir, un factor tipo [B3], desplace verticalmente el diagrama de fase en  $90\ell$  [°]. Además, si  $K < 0$ , desplace verticalmente el diagrama de fase en  $\pm 180$  [°].

**Paso 9** Si  $H(j\omega)$  incluye un retardo, sustraiga la fase correspondiente del diagrama de fase.

**Paso 10** Verifique que su resultado satisface las aproximaciones asintóticas, tanto en magnitud como en fase, para frecuencias muy bajas ( $\rightarrow 0$ ) y para frecuencias muy altas ( $\rightarrow \infty$ ). Corrija, si es necesario.

Para ilustrar el procedimiento, desarrollamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 9.2.** Considere la respuesta en frecuencia dada por:

$$H(j\omega) = \frac{8(j\omega - 2)(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 8)(j\omega - 4)} \quad (9.32)$$

Lo primero que debemos hacer es re-escribir  $H(j\omega)$  como el producto de seis factores ( $F_1(j\omega)$  a  $F_6(j\omega)$ ) canónicos del tipo  $[B1]$  a  $[B5]$ . Así se obtiene

$$H(j\omega) = \underbrace{0,5}_{F_1:[B1]} \underbrace{(1 - 0,5j\omega)}_{F_2:[B2]} \underbrace{(1 + j\omega)}_{F_3:[B2]} \underbrace{(j\omega)^{-1}}_{F_4:[B3]} \underbrace{(1 + 0,125j\omega)^{-1}}_{F_5:[B2]} \underbrace{(1 - 0,25j\omega)^{-1}}_{F_6:[B2]} \quad (9.33)$$

#### Diagrama de magnitud:

Supondremos luego que el rango de frecuencias de interés es  $[10^{-2}; 10^2]$ .

Los puntos de quiebre así como las pendientes entre dos puntos de quiebre sucesivos se muestran en la Tabla 9.3. Observe que las pendientes se indican como múltiplos de 20 [dB/dec]. En la última fila del cuadro se indica el efecto neto de la contribución de los distintos factores entre dos puntos de quiebre sucesivos. Con los resultados de esa línea se pueden completar los Pasos 4 a 6 del procedimiento bosquejado. Finalmente se incorpora el factor  $[B1]$ , desplazando verticalmente el diagrama en  $20 \log_{10}(0,5) \approx -6$  [dB].

El gráfico superior de la Figura 9.6 muestra la aproximación asintótica lograda así como la curva exacta.

	$(-\infty; 1]$	$(1; 2]$	$(2; 4]$	$(4; 8]$	$(8; 100]$
$F_2$	0	0	1	1	1
$F_3$	0	1	1	1	1
$F_4$	-1	-1	-1	-1	-1
$F_5$	0	0	0	0	-1
$F_6$	0	0	0	-1	-1
Ac.	-1	0	1	0	-1

Tabla 9.3: Contribución de pendientes entre puntos de quiebre. Diagrama de magnitud

#### Diagrama de fase:

A similitud del caso de la magnitud construimos un cuadro donde se especifica la contribución, en pendiente de la fase, de cada factor, entre dos puntos sucesivos. Las pendientes son múltiplos de 45 [o/dec]. El lector es invitado a revisar nuevamente la Tabla 9.2 para tener en mente las características asintóticas de cada factor.

La última línea de la Tabla 9.4 muestra el efecto acumulado de los factores  $F_3$  a  $F_6$ . Con esta información podemos ejecutar los Pasos 4 a 6 del procedimiento bosquejado.

Para el Paso 8 apreciamos que el efecto del factor  $F_1$  sobre la fase es nulo, ya que se trata de una ganancia positiva. En cambio, el factor  $F_2$  sí afecta la fase, desplazándola en  $-90$  [°].

El diagrama asintótico de fase resultante aparece en el gráfico inferior de la Figura 9.6 donde también se indica la curva exacta.

	$(-\infty; 0,1]$	$(0,1; 0,2]$	$(0,2; 0,4]$	$(0,4; 0,8]$	$(0,8; 10]$	$(10; 20]$	$(20; 40]$	$(40; 80]$	$(80; 100]$
$F_3$	0	1	1	1	1	0	0	0	0
$F_4$	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0
$F_5$	0	0	0	1	1	1	1	0	0
$F_6$	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0
Ac.	0	1	0	1	0	-1	0	-1	0

Tabla 9.4: Contribución de pendientes entre puntos de quiebre. Diagrama de fase.

□□□

La complejidad de los sistemas, así como la necesidad de precisión hacen que el procedimiento descrito tenga un valor limitado. Por ello, es también importante dominar el uso de herramientas computacionales modernas. En particular, MATLAB dispone del comando `bode` para calcular y dibujar exactamente estos diagramas. Para la función del Ejemplo 9.2, primero la expandimos como cociente de polinomios en  $j\omega$ , es decir:

$$H(j\omega) = \frac{8(j\omega)^2 - 8j\omega - 16}{(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 - 32j\omega} \quad (9.34)$$

Entonces, los diagramas de Bode obtienen con el código MATLAB :

```
MATLAB
>>H=tf([8 -8 -16],[1 4 -32 0]);
>>bode(H);
```

**Nota 9.1.** Existen ciertas ambigüedades en la construcción del diagrama de fase. Uno de esos casos es cuando debemos asignar ángulo a un número real negativo. En efecto, ese ángulo puede ser  $180$  [°] o  $-180$  [°]. En el caso del factor  $[B1]$ , hemos optado por elegir  $180$  [°]. Este problema también aparece en relación a otros factores, como por ejemplo, cuando debemos asignar ángulo a  $(j\omega)^\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ . Esta y otras ambigüedades se pueden manifestar en discontinuidades en el diagrama de fase. El software MATLAB resuelve estos problemas a través del comando especial `unwrap`.

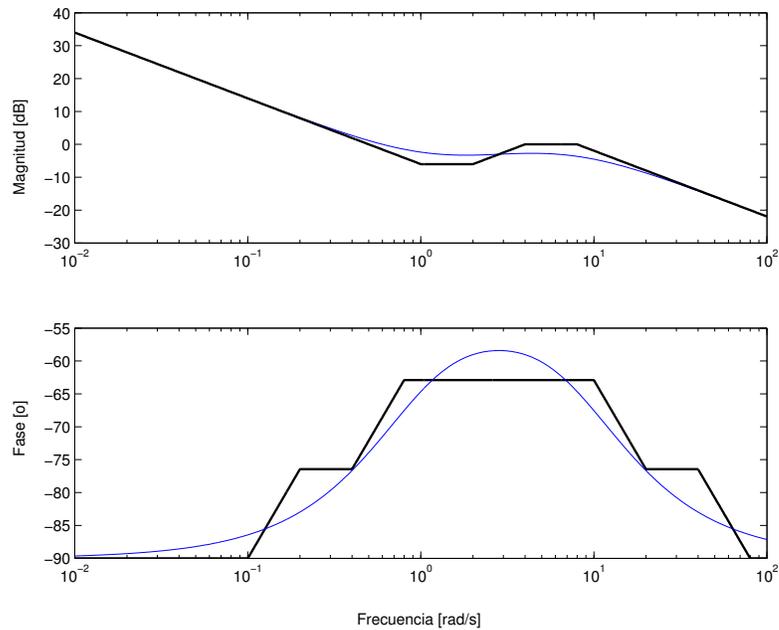


Figura 9.6: Diagramas de Bode de magnitud y fase (línea fina) y sus aproximaciones asintóticas (líneas gruesas) para la respuesta en frecuencia del Ejemplo 9.2

### 9.2.2. Tiempo discreto

La respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo discreto también puede describirse gráficamente usando diagramas de Bode; sin embargo, en este caso, no tienen la misma utilidad por dos razones fundamentales:

- La respuesta en frecuencia es periódica con período  $2\pi$ , entonces la idea de usar una escala logarítmica de la frecuencia para incrementar el rango de descripción, tiene utilidad limitada.
- No se pueden construir aproximaciones simples, ya que aquí no aparecen polinomios en  $j\omega$ , sino que polinomios en  $e^{j\theta}$ .

Sin embargo, es importante destacar que si consideramos una función  $H[e^{j\theta}]$  como la transformada de Fourier de una señal arbitraria  $h[t]$ , el diagrama de Bode describe la composición espectral de la señal arbitraria  $h[t]$ .

Para ilustrar el diagrama de Bode en tiempo discreto, desarrollamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 9.3.** Considere la función:

$$H[e^{j\theta}] = \frac{0,2}{e^{2j\theta} - 1,5e^{j\theta} + 0,7} \quad (9.35)$$

Para obtener la magnitud y fase de esta función compleja, primero es necesario aplicar la ecuación de Euler  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ . Para facilitar el trabajo algebraico, el siguiente código MAPLE permite obtener el módulo y el ángulo de  $H[e^{j\theta}]$ .

```
MAPLE
> H:=0.2/(exp(2*I*theta)-1.5*exp(I*theta)+0.7);
> abs(H);
> argument(evalc(H));
```

$$|H[e^{j\theta}]| = \frac{0,2}{\sqrt{(-\cos 2\theta + 1,5 \cos \theta - 0,7)^2 + (-\sin 2\theta + 1,5 \sin \theta)^2}} \quad (9.36)$$

$$\angle H[e^{j\theta}] = \arctan\left(\frac{\sin 2\theta - 1,5 \sin \theta}{\cos 2\theta - 1,5 \cos \theta + 0,7}\right) \quad (9.37)$$

Se puede apreciar que las expresiones obtenidas no son simples de aproximar, ya sea en baja o alta frecuencia, usando o no escala logarítmica en la frecuencia. Sin embargo, en MATLAB, resulta muy simple obtener el gráfico de la magnitud y el ángulo de la función  $H[e^{j\theta}]$ , usando el comando `bode`. Note que éste es el mismo que se usa para tiempo continuo, por tanto se debe tener el cuidado de definir la función de transferencia en tiempo discreto. Con los siguientes comandos, MATLAB entrega los gráficos de la Figura 9.7, donde se aprecia un límite superior de la banda de frecuencia en  $\theta = \pi$ , producto de la periodicidad inherente al análisis en frecuencia en tiempo discreto:

```
MATLAB
>> H=tf([0.2],[1 -1.5 0.7],1);
>> bode(H);
```

□□□

### 9.3. Diagramas polares

Aunque los diagramas de Bode son una poderosa herramienta para el análisis y diseño, se requieren los dos diagramas para interpretar correctamente ciertas características del sistema. Una alternativa es utilizar un diagrama polar, en el que la respuesta en frecuencia se representa en un sólo gráfico, donde el eje de abscisas corresponde a la parte real de  $H(j\omega)$  y el eje de ordenadas, a la parte imaginaria de  $H(j\omega)$ . En esta descripción, la frecuencia está implícita (ésta es la limitación principal del diagrama polar).

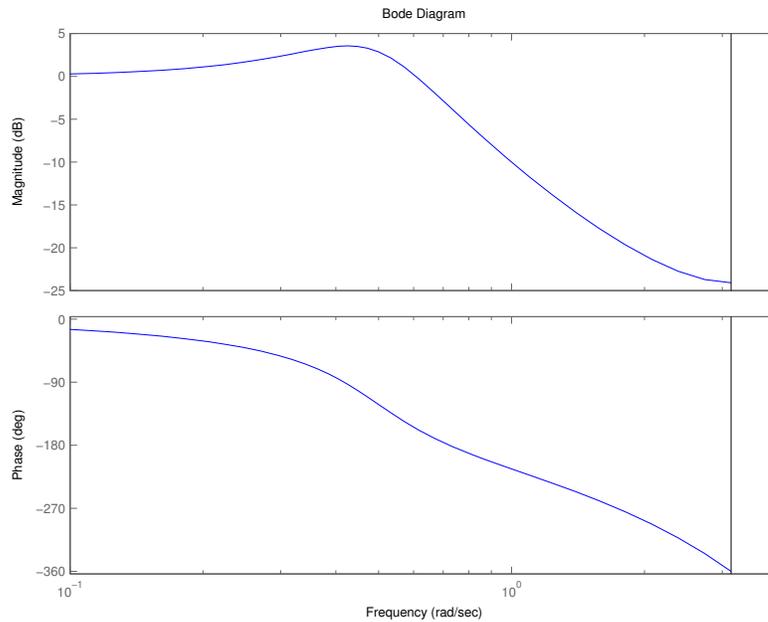


Figura 9.7: Diagrama de Bode en tiempo discreto (Ejemplo 9.3).

### 9.3.1. Tiempo continuo

Para introducir el tema consideraremos un ejemplo.

**Ejemplo 9.4.** La respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo continuo está caracterizada por:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 3)((j\omega)^2 + 0.4j\omega + 1)} \quad (9.38)$$

Si se evalúa  $H(j\omega)$  en un rango de frecuencias  $0 < \omega < \infty$  y dibujamos el resultado en el plano cartesiano se obtiene el resultado que aparece en el diagrama de la Figura 9.8. Esta figura se obtiene con el siguiente código MATLAB:

MATLAB

```
>>H=tf(1,conv([1 3],[1 0.4 1]));
>>w=logspace(-2,1,1000);h=freqresp(H,w);
>>plot(real(h(1,:)), imag(h(1,:)))
```

El mismo gráfico se obtiene al reemplazar el último comando por `plot(h(1,:))`.

En la Figura 9.8 se han indicado adicionalmente algunos puntos que corresponden a distintas frecuencias. Observe que  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$ .

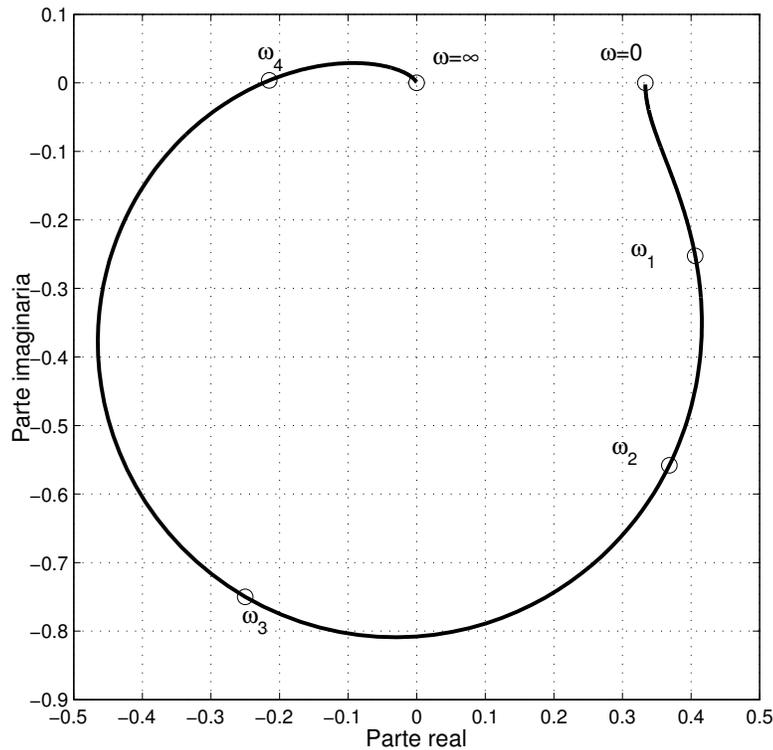


Figura 9.8: Diagrama polar. Coordenadas cartesianas (Ejemplo 9.4).

Aunque parezca curioso hablar de gráficos polares, y describirlos en término un gráfico cartesiano, es sólo una cuestión de lenguaje. De hecho, el mismo diagrama polar se puede dibujar en otras coordenadas. En realidad, eso es lo que hace el comando `polar` de MATLAB. Así, si usamos el código:

```
MATLAB
>>H=tf(1,conv([1 3],[1 0.4 1]));
>>w=logspace(-2,1,1000);h=freqresp(H,w);
>>polar(angle(h(1,:)), abs(h(1,:)));
```

se obtiene el gráfico de la Figura 9.9.

□□□

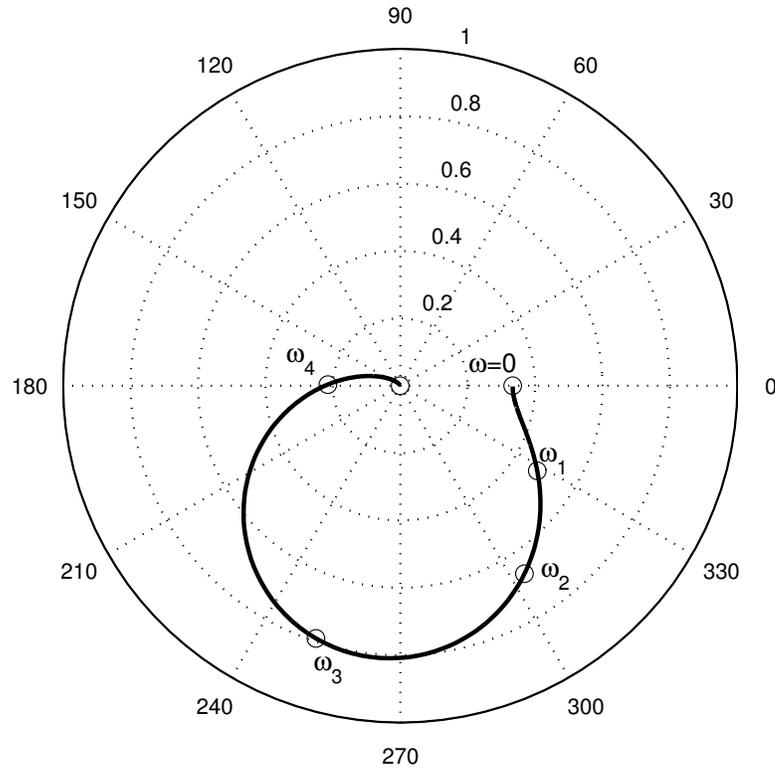


Figura 9.9: Diagrama polar. Coordenadas polar (Ejemplo 9.4).

Del ejemplo precedente se puede entender que, dependiendo de la aplicación, por facilidad de lectura se prefiera uno u otro sistema de coordenadas.

Para hacer un bosquejo de un diagrama polar se debe examinar magnitud y fase de la respuesta en frecuencia. El análisis de la magnitud está orientado a determinar como evoluciona a medida que la frecuencia va desde 0 hasta  $\infty$ . Por su parte, el análisis de la fase permite saber cuales *cuadrantes* recorre el gráfico, ya que ello *sólo es función de la fase* para  $\omega \in [0, \infty)$ . Siempre es conveniente saber el comportamiento de la magnitud y la fase en alta y baja frecuencia, es decir: 0 e  $\infty$ . Una forma alternativa es saber como evolucionan la parte real y la parte imaginaria de la respuesta en frecuencia. Esta última descomposición también permite determinar en qué cuadrante del plano complejo se encuentra el diagrama polar.

Para facilitar el análisis, examinaremos primero algunos casos simples. Estas funciones **no** tienen la misma trascendencia que en el caso de Bode. La diferencia radica en que el diagrama polar de una función complicada no puede obtenerse por composición simple de diagramas polares de funciones elementales, como sí se puede hacer al construir diagramas de Bode. El objetivo del estudio de estos

casos es inducir una metodología para la construcción de diagramas polares.

$$[\mathbf{P1}] \quad K$$

$$[\mathbf{P2}] \quad \frac{1}{Tj\omega + 1}$$

$$[\mathbf{P3}] \quad (j\omega)^q, q \in \{-1; 1\}$$

$$[\mathbf{P4}] \quad \left[ \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{-1} \quad 0 \leq \xi < 1, \omega_n > 0.$$

$$[\mathbf{P5}] \quad e^{-j\omega\tau}, \tau > 0$$

$$[\mathbf{P6}] \quad \frac{1}{j\omega(Tj\omega + 1)}, T > 0$$

$$[\mathbf{P7}] \quad \frac{e^{-j\omega\tau}}{Tj\omega + 1}$$

$$[\mathbf{P8}] \quad \frac{1}{(j\omega)^2 - \omega_o^2}$$

Examinaremos, a continuación, los rasgos principales del diagrama polar para cada uno de los tipos básicos.

**[P1]**

En este caso el diagrama polar es **un único punto**,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ . Este punto corresponde a  $(K, 0)$ .

**[P2]**

Podemos determinar la descomposición cartesiana (partes real e imaginaria) y la descomposición polar (magnitud y fase). Así:

$$F(j\omega) = \frac{1}{\omega^2 T^2 + 1} - j \frac{\omega T}{\omega^2 T^2 + 1} \quad (9.39)$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} \quad (9.40)$$

$$\angle F(j\omega) = \begin{cases} -\arctan(\omega|T|) & T > 0 \\ \arctan(\omega|T|) & T < 0 \end{cases} \quad (9.41)$$

Entonces, examinando la característica de fase, se observa que el diagrama polar recorre el cuarto cuadrante para  $T > 0$  y el primer cuadrante si  $T < 0$ . Por otro lado la magnitud es monótonamente decreciente, desde 1 (para  $\omega = 0$ ) hasta cero (para  $\omega = \infty$ ); sin embargo, en este caso particular se puede decir algo más, porque es fácil demostrar, usando (9.39) que las partes real e imaginaria de  $F(j\omega)$  cumplen con

$$(\Re\{F(j\omega)\} - 0,5)^2 + (\Im\{F(j\omega)\})^2 = 0,25 \quad (9.42)$$

lo cual indica que el diagrama polar es una semi-circunferencia centrada en  $(0,5; 0)$  con radio  $0,5$ . Esta semi-circunferencia está en el cuarto cuadrante para  $T > 0$  y en el primero para  $T < 0$ .

Note además que el valor absoluto de  $T$  no afecta el diagrama, pues solamente equivale a re-escalar la frecuencia, la cual se encuentra implícita como parámetro que hace recorrer la curva.

Además, de (9.41) vemos que la fase tiende a  $-90 \text{signo}(T)$  [°], es decir, cuando  $\omega$  tiende a infinito, el diagrama polar tiende al origen, apegándose al eje imaginario por abajo ( $T > 0$ ) o al al eje imaginario por arriba ( $T < 0$ ).

Los diagramas polares correspondientes a  $T > 0$  y a  $T < 0$  se muestran en la Figura (9.10).

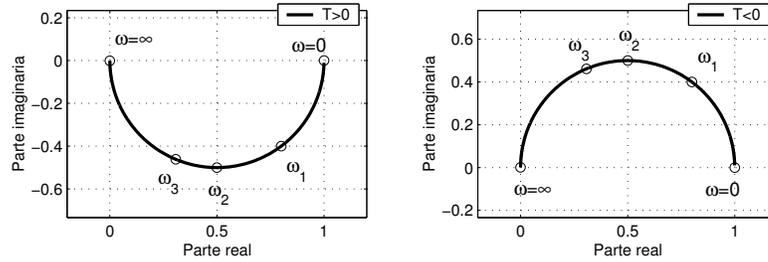


Figura 9.10: Diagramas polares para el caso [P1].

### [P3]

En este caso,  $F(j\omega) = (j\omega)^q$ . Esta función tiene parte real cero para  $q \in \{-1; 1\}$ . Por lo tanto, el diagrama polar coincide con el eje imaginario (semi-eje superior para  $q = 1$  y semi-eje inferior para  $q = -1$ ). La fase es  $90q$  [°]  $\forall \omega \in \mathbb{R}^+$ . Para valores de  $\omega$  tendiendo a cero, la magnitud tiende a infinito. Para  $\omega$  tendiendo a infinito, la magnitud tiende a cero.

### [P4]

En este caso conviene descomponer la función  $F(j\omega)$  en sus partes real e imaginaria en la forma

$$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_n^2)\omega_n^2}{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2} - j \frac{2\xi\omega_n^3\omega}{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2} \quad (9.43)$$

La parte imaginaria de  $F(j\omega)$  es negativa  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto el diagrama polar sólo puede estar en el tercer y cuarto cuadrante. En cambio, la parte real puede ser positiva o negativa, el punto de quiebre ocurre cuando  $\omega = \omega_n$ . Para  $\omega < \omega_n$  la parte real es negativa, lo cual indica que el diagrama polar está en

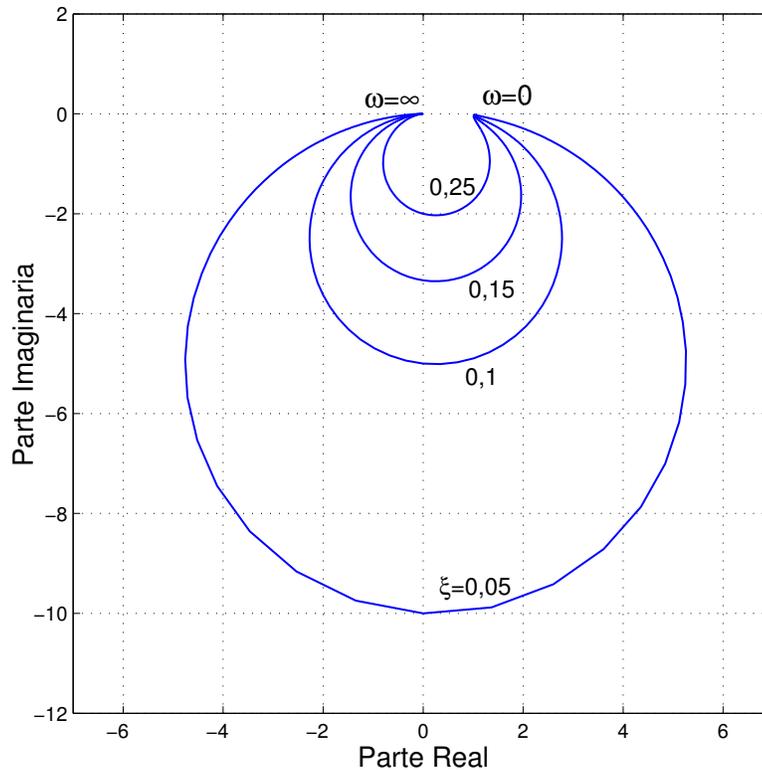


Figura 9.11: Diagrama polar de una función tipo [P4] para distintos valores de  $\xi$

el cuarto cuadrante; para  $\omega > \omega_n$  la parte real es negativa, lo cual indica que el diagrama polar está en el tercer cuadrante.

Además podemos examinar la evolución de la fase a medida que  $\omega$  progresa desde 0 hasta  $\infty$ . En eso podemos apoyarnos en el diagrama de Bode para la fase de la respuesta en frecuencia para el sistema elemental [B4] (ver Figura 9.4 en la página 230). Observamos que la fase decae monótonicamente a medida que  $\omega$  crece. Un aspecto de interés es que, cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , el diagrama polar se acerca al origen asintóticamente siguiendo el eje real negativo.

La Figura 9.11 muestra los diagramas polares de  $F(j\omega)$  tipo [P4], para distintos valores de  $\xi$ . Note que el valor de  $\omega_n$  no altera los diagramas, porque este parámetro sólo produce escalamiento de la frecuencia (ojo, esta afirmación es sólo válida si  $\omega_n > 0$ ; el lector es invitado a investigar el caso  $\omega_n < 0$ ).

#### [P5]

La respuesta en frecuencia del retardo puro,  $e^{-j\omega\tau}$ , tiene magnitud unitaria,

$\forall \omega \in R$ , y con fase igual a  $-\omega\tau$ , en consecuencia el diagrama polar es una circunferencia de radio unitario y  $180$  [°] centro en el origen.

### [P6]

La función  $F(j\omega)$ , en este caso, puede descomponerse en sus partes real e imaginaria, en la forma:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(Tj\omega + 1)} = \frac{-Tj\omega + 1}{j\omega(1 + \omega^2T^2)} = \frac{-T}{(1 + \omega^2T^2)} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2T^2)} \quad (9.44)$$

La descomposición en magnitud y fase está dada por:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2T^2 + 1}} \quad (9.45)$$

$$\angle F(j\omega) = -0,5\pi - \arctan(\omega T) \quad (9.46)$$

De la ecuación (9.44) se observa que la parte real es siempre negativa, y que la parte imaginaria también es siempre negativa. Por lo tanto, el diagrama polar de  $F(j\omega)$  está confinado al cuarto cuadrante. De la ecuación (9.45) se ve que la magnitud decrece monótonamente a medida que la frecuencia aumenta. Esto es consistente con la ecuación (9.44), ya que de allí sabemos que tanto la parte real como la parte imaginaria decaen monótonamente a cero.

De la ecuación (9.46) se ve también que para  $\omega = 0$  la fase es  $-90$  [°]; sin embargo, esto no implica que a esa frecuencia la parte real sea cero. De hecho, de la ecuación (9.44) se ve que la parte real, para  $\omega = 0$ , es igual a  $-T$ . Para  $\omega = \infty$  la fase tiende a  $-180$  [°]; esto implica que el diagrama polar tiende al origen acercándose asintóticamente al eje real negativo.

En la Figura 9.12 se muestra el diagrama polar de una función tipo [P6] con  $T = 1$ . Se observa que la parte real viene desde  $(-1; -\infty)$  cuando  $\omega = 0$ .

### [P7]

La función en este caso es el producto de una función tipo [P5] y una función tipo [P6]. Por lo tanto la magnitud resultante es el producto de las magnitudes de los factores y la fase es la suma de la fase de los factores, es decir:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2T^2 + 1}}; \quad \angle F(j\omega) = -\omega\tau - 0,5\pi - \arctan(\omega T) \quad (9.47)$$

La magnitud es la misma de una función tipo [P6], lo cual implica que decae monótonamente a medida que la frecuencia crece. Por su parte, la fase exhibe un crecimiento monótono, en la dirección negativa; esta característica se debe al término  $-\omega\tau$ . Dado que la magnitud decae monótonamente, el crecimiento de la fase genera una *espiral* hacia el origen.

En la Figura 9.13.a) se muestra el diagrama polar de una función del tipo [P7], con  $T = 1$  y  $\tau = 2$ . En la Figura 9.13.b) se observa un detalle (alrededor del origen) del mismo diagrama.

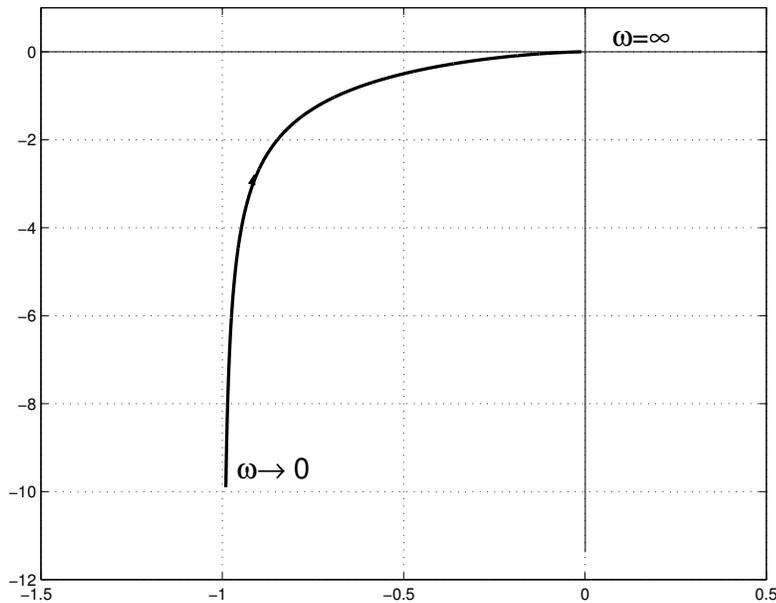


Figura 9.12: Diagrama polar de una función tipo [P6] con  $T = 1$

### [P8]

En este caso,  $F(j\omega) = 1/((j\omega)^2 - \omega_o^2)$ . Para esta función el diagrama polar empieza en  $(-1/\omega_o^2; 0)$  para  $\omega = 0$  y tiende rápidamente hacia  $-\infty$  a lo largo del eje real negativo para  $\omega \rightarrow \omega_o^-$ . En  $\omega = \omega_o$  hay una *discontinuidad*, ya que para esa frecuencia, el diagrama polar *salta* desde  $(-\infty; 0)$  a  $(\infty; 0)$ , luego, a medida que  $\omega$  se hace mayor que  $\omega_o$ , el diagrama polar tiende al origen para  $\omega \rightarrow \infty$ .

□□□

Como ya hemos dicho, el diagrama polar de funciones complejas **no** se puede obtener en forma simple usando los diagramas polares para los funciones tipo [P1] a [P8]. Sin embargo, las ideas usadas para dibujar el diagrama polar de cada una de esas funciones ayuda a construir los diagramas polares de funciones más complicadas. Incluso, algunos de los rasgos peculiares de las funciones tipo [P1] a [P8] se propagan a las funciones compuestas, tal como se aprecia en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 9.5.** Suponga que la respuesta en frecuencia de un sistema está dada por una función  $H(j\omega)$  compuesta por un factor tipo [P2] y un factor tipo [P8]. La función  $H(j\omega)$  está dada por:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(0,5j\omega + 1)((j\omega)^2 + 1)} \quad (9.48)$$

Se requiere dibujar el diagrama polar. Para ello primero descomponemos la

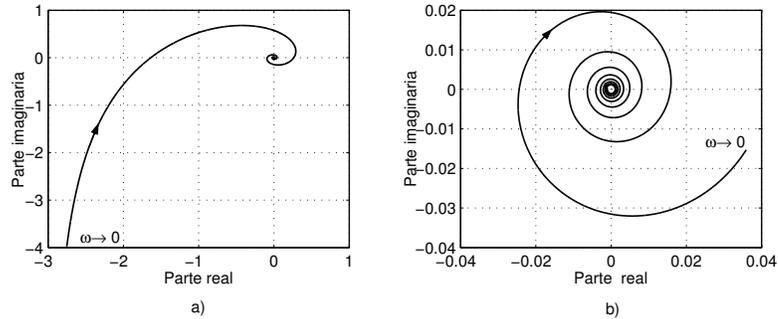


Figura 9.13: a) Diagrama polar de una función tipo [P7] ( $T = 1$  y  $\tau = 2$ ), y b) detalle.

función dada en sus partes real e imaginaria, es decir:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(0,25\omega^2 + 1)(-\omega^2 + 1)} - j \frac{\omega}{(0,25\omega^2 + 1)(-\omega^2 + 1)} \quad (9.49)$$

y en magnitud y fase:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{0,25\omega^2 + 1} |\omega^2 - 1|} \quad (9.50)$$

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} -\arctan(0,5\omega) & \forall \omega < 1 \\ -180 - \arctan(0,5\omega) \text{ [}^\circ\text{]} & \forall \omega > 1 \end{cases} \quad (9.51)$$

Así, de las ecuaciones precedentes, podemos observar que:

- la parte real, la parte imaginaria y la fase tienen una discontinuidad en  $\omega = 1$  (esto es heredado del factor tipo [P8] en la función  $H(j\omega)$ );
- cuando  $\omega < 1$  la parte real es positiva y la parte imaginaria es negativa, es decir, el diagrama polar está en el cuarto cuadrante;
- cuando  $\omega > 1$  la parte real es negativa y la parte imaginaria es positiva, es decir, el diagrama polar está en el segundo cuadrante;
- cuando  $\omega \rightarrow 1^-$  la fase tiende a  $-\arctan(0,5)$  [°] y cuando  $\omega \rightarrow 1^+$  la fase tiende a  $-180 - \arctan(0,5)$  [°];
- dado que la discontinuidad de la fase es  $-180$  [rad], el diagrama polar salta desde el cuarto cuadrante al segundo cuadrante cuando  $\omega$  pasa por  $180/\pi$  [°]; y
- cuando  $\omega \rightarrow \infty$  la magnitud tiende a 0 y la fase tiende a  $-270$  [°], es decir, el diagrama polar tiende al origen acercándose asintóticamente al eje imaginario superior.

El diagrama polar para este ejemplo aparece en la Figura 9.14. Note que se ha dibujado con línea delgada la asíntota del diagrama polar para  $\omega \rightarrow 1^-$  y para  $\omega \rightarrow 1^+$ . Un ejercicio interesante para el lector es calcular la ecuación de esta asíntota.

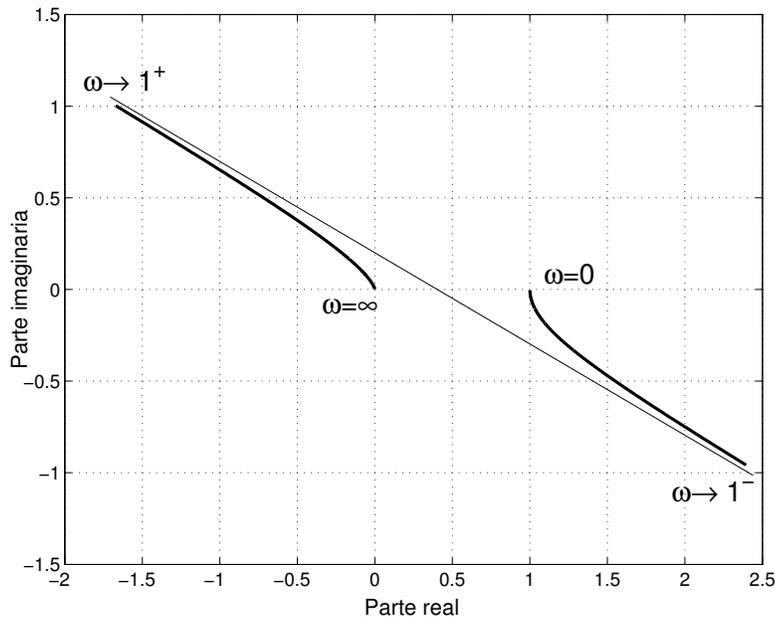


Figura 9.14: Diagrama polar de  $H(j\omega)$  para el Ejemplo 9.5.

□□□

Otras situaciones de interés aparecen en relación a aquellas respuestas en frecuencia donde el numerador es también un polinomio en  $j\omega$ . Note que en el caso de las funciones tipo [P1] a [P8], esta situación no ha sido incluida, ya que sólo hemos considerado funciones con numerador constante. Para observar los fenómenos que puede provocar este numerador más complejo consideraremos un último ejemplo.

**Ejemplo 9.6.** Un sistema tiene la respuesta en frecuencia dada por:

$$H(j\omega) = 0,001 \frac{(j\omega + 5)^2(-j\omega + 0,1)}{(j\omega + 0,5)(j\omega + 0,2)(j\omega + 0,1)^2} \quad (9.52)$$

Para una función tan compleja como ésta, podemos deducir algunas rasgos del diagrama polar:

- El diagrama parte, para  $\omega = 0$ , en  $(2,5; 0)$ ;
- Para  $\omega \rightarrow \infty$  es cero, y la fase es  $-270[^\circ]$ ;

- En general, la magnitud y la fase cumplen con:

$$|H(j\omega)| = 0,001 \sqrt{\frac{(\omega^2 + 25)^2(\omega^2 + 0,01)}{(\omega^2 + 0,25)(\omega^2 + 0,04)(\omega^2 + 0,01)^2}} \quad (9.53)$$

$$\angle H(j\omega) = 2 \arctan(0,2\omega) - 3 \arctan(10\omega) - \arctan(2\omega) - \arctan(5\omega) \quad (9.54)$$

Parece difícil, a partir de las expresiones precedentes para magnitud y fase, obtener algunos criterios para dibujar el diagrama polar. Recurriremos a MATLAB usando el siguiente código:

MATLAB

```
>>H=-0.001*tf(poly([-5 -5 0.1]),poly([-0.5 -0.2 -0.1 -0.1]));
>>w=logspace(-1,2,4000);
>>h=freqresp(H,w);subplot(221);plot(h(1,:));
```

El primer comando es equivalente a  $H=zpk([-5 -5 0.1], [-0.5 -0.2 -0.1 -0.1], -0.001)$ . El resultado se muestra en la Figura 9.15.a).

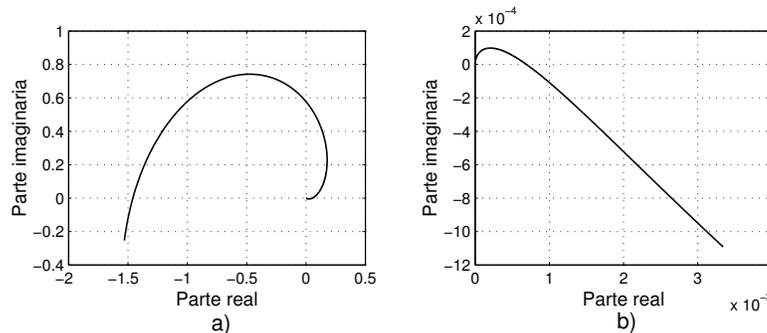


Figura 9.15: a) Diagrama polar de  $H(j\omega)$  para el Ejemplo 9.6, y b) detalle.

Aparentemente el diagrama no refleja la condición de la fase asintótica ( $-270[^\circ]$ ), ya que ésta parece ser  $-360[^\circ]$ . Esta aparente contradicción es resuelta con un detalle del diagrama en torno al origen. Este detalle se muestra en la Figura 9.15.b) y se obtiene con

MATLAB

```
>> w2=logspace(0.3,3,4000);h2=freqresp(H,w2);
>> subplot(222);plot(h2(1,:));
```

□□□

### 9.3.2. Tiempo discreto

Naturalmente que el mismo tipo de descripción mediante diagramas polares es aplicable a la respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo discreto. Sin embargo, en este caso es aún más difícil construir, manualmente, una aproximación para el diagrama polar. La razón esencial es que la respuesta en frecuencia  $H[e^{j\theta}]$  es un cociente de polinomios en  $e^{j\theta}$  (en vez de ser un cociente de polinomios en  $j\omega$ , como en el caso de sistemas de tiempo continuo). Ese rasgo hace que las expresiones tanto para la magnitud como para las partes real e imaginaria de  $H[e^{j\theta}]$  sean funciones complicadas de  $\theta$ . Una herramienta interesante, para dibujar diagramas polares de sistemas simples se deduce de la Figura 9.16.

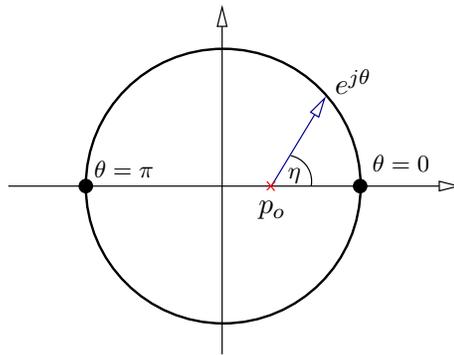


Figura 9.16: Interpretación gráfica de la respuesta en frecuencia  $(e^{j\theta} - p_o)^{-1}$

En la Figura 9.16 la circunferencia de radio unitario describe la ubicación del número complejo  $e^{j\theta}$ , por lo tanto, el vector que se ha dibujado es  $e^{j\theta} - p_o$ . Así, si consideramos un sistema cuya respuesta en frecuencia es  $F[e^{j\theta}] = (e^{j\theta} - p_o)^{-1}$ , vemos que su magnitud es el recíproco del largo del vector dibujado, y la fase corresponde al negativo del ángulo  $\theta$  en la figura. A medida que  $\omega$  crece desde 0 hasta  $180$  [°], la punta del vector se desplaza desde  $(1, 0)$  hasta  $(-1, 0)$ . Esto implica que la magnitud del vector crece monótonamente (para  $p_o \in \mathbb{R}^+$ ) desde  $1 - p_o$  hasta  $1 + p_o$ . Así, la magnitud de  $F[e^{j\theta}]$  decrece monótonamente desde  $(1 - p_o)^{-1}$  hasta  $(1 + p_o)^{-1}$ , y su fase va monótonamente también, desde  $0$  hasta  $-180$  [°]. El diagrama polar está por lo tanto en el cuarto y tercer cuadrantes.

La idea precedente puede ser usada en la determinación de los rasgos principales de diagramas polares de funciones simples, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 9.7.** *Un sistema de tiempo discreto tiene la respuesta en frecuencia dada por:*

$$F[e^{j\theta}] = \frac{e^{j\theta} - z_o}{e^{j\theta}} = 1 - z_o e^{-j\theta} \quad ; \quad 0 < z_o < 1 \quad (9.55)$$

Las características del diagrama polar pueden ser construidas a partir de la Figura 9.17.

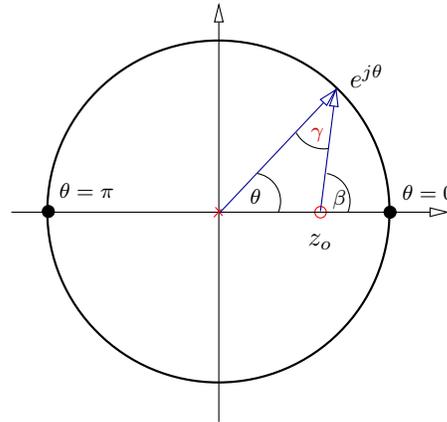


Figura 9.17: Interpretación gráfica de la respuesta en frecuencia de  $1 - z_o e^{-jt}$ .

Primero observamos que:

$$|F[e^{j\theta}]| = \frac{|e^{j\theta} - z_o|}{|e^{j\theta}|} = |e^{j\theta} - z_o| \quad (9.56)$$

$$\angle F[e^{j\theta}] = \angle(e^{j\theta} - z_o) - \angle e^{j\theta} = \beta - \theta \quad (9.57)$$

Usando relaciones básicas de geometría, sabemos también que  $\beta - \theta = \gamma$ . Así, la fase de  $F[e^{j\theta}]$  es igual a  $\gamma$ , por su parte, la magnitud de  $F[e^{j\theta}]$  es igual al largo del vector  $e^{j\theta} - z_o$ .

Con los antecedentes anteriores vemos que la magnitud de  $F[e^{j\theta}]$  va monótonamente desde  $1 - z_o$ , para  $\theta = 0$ , hasta  $1 + z_o$ , para  $\theta = 180$  [°]. Por su parte, la fase empieza en 0 para  $\theta = 0$ , luego crece hasta alcanzar un máximo (siempre menor que 90 [°]), luego decae hasta llegar a cero nuevamente cuando  $\theta = 180$  [°]. El diagrama polar está por lo tanto en el primer cuadrante. □□□

Para funciones más complejas es difícil estimar la forma en que evolucionan la magnitud y la fase. En esos casos es preferible recurrir a *software* como MATLAB. Para el caso del Ejemplo 9.7, los siguientes comandos dan como resultado el gráfico de la Figura 9.18.

```

MATLAB
>> F=tf([1 -0.7],[1 0],-1);
>> w=[0:0.01:pi];
>> h=freqresp(F,w);
>> plot(h(1,:))

```

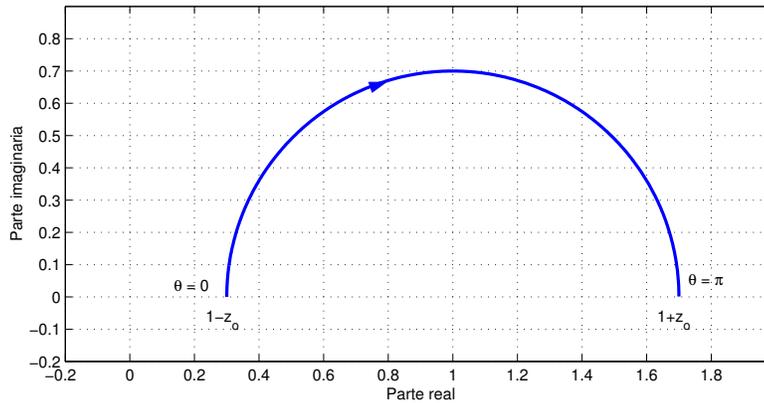


Figura 9.18: Diagrama polar para el Ejemplo 9.7.

## 9.4. Diagramas de bloques

Una forma de representar la interconexión de sistemas es un diagrama en bloques, donde cada uno de los bloques representa a uno de los sistemas participantes. A cada bloque se asocia una caracterización del sistema asociado, tal como la respuesta a impulso con condiciones iniciales iguales a cero, o su respuesta en frecuencia, o la función de transferencia, entre otras.

Un requisito clave en esta forma de representación es que, cuando se realiza la interconexión, cada uno de los sistemas participantes mantenga su caracterización original, sea ella en forma de función de transferencia o de respuesta en frecuencia (en esta sección nos referiremos indistintamente a la respuesta en frecuencia y a la función de transferencia de cada sistema o subsistema). Considere las dos redes eléctricas de la Figura 9.19. Los sistemas pueden ser caracterizados por sus respectivas respuestas en frecuencia  $H_1(j\omega)$  y  $H_2(j\omega)$  respectivamente, donde:

$$H_1(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{R_2}{j\omega C_3 R_1 R_2 + R_1 + R_2} \quad (9.58)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{V_4(j\omega)}{V_3(j\omega)} = \frac{j\omega C_4 R_5}{j\omega C_4 R_5 + 1} \quad (9.59)$$

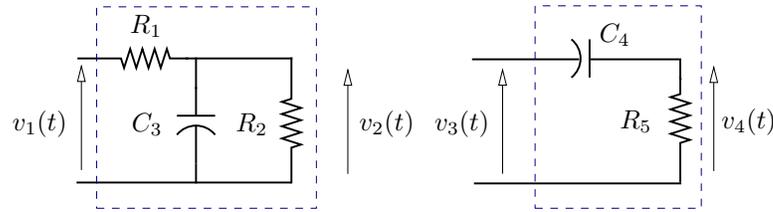


Figura 9.19: Sistemas a interconectar. Caracterización independiente

Al conectar directamente ambas redes ( $V_2(j\omega) = V_3(j\omega)$ ), la relación entre las variables es ahora:

$$\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)} = \frac{R_2(R_5C_4j\omega + 1)}{R_1R_2R_5C_3C_4j\omega^2 + (R_1R_2C_4 + R_1R_5C_3 + R_2R_5C_4)j\omega + R_1 + R_2} \quad (9.60)$$

$$\frac{V_4(j\omega)}{V_2(j\omega)} = \frac{V_4(j\omega)}{V_3(j\omega)} = \frac{R_5C_4j\omega}{R_5C_4j\omega + 1} \quad (9.61)$$

Se aprecia que la función de transferencia entre  $V_1(j\omega)$  y  $V_2(j\omega)$  ya no satisface (9.60) y esto hace que la función de transferencia entre  $V_1(j\omega)$  y  $V_4(j\omega)$  sea distinta al producto  $H_1(j\omega)H_2(j\omega)$ , donde  $H_1(j\omega)$  y  $H_2(j\omega)$  están dadas en (9.58)–(9.59).

Supongamos ahora que las redes de la Figura 9.19 son interconectadas a través de un amplificador de ganancia unitaria, tal como se muestra en la Figura 9.20.

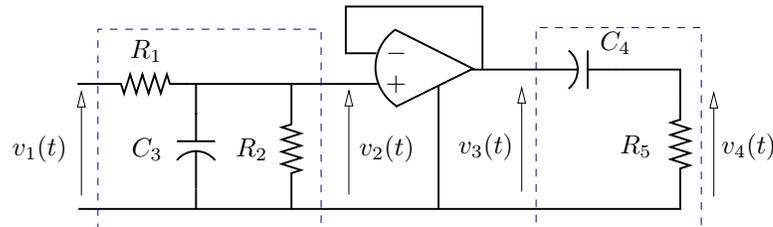


Figura 9.20: Sistemas interconectados

Ahora podemos ver que las transferencias entre  $V_1(j\omega)$  y  $V_2(j\omega)$  y entre  $V_3(j\omega)$  y  $V_4(j\omega)$  son las mismas que en (9.58)–(9.59). Por lo tanto la función de transferencia entre  $V_1(j\omega)$  y  $V_4(j\omega)$  es ahora igual al producto  $H_1(j\omega)H_2(j\omega)$ . □□□

La discusión precedente señala la condición implícita en los diagramas de bloques: la función de transferencia de cada bloque sigue rigiendo la relación entre entrada y salida, aunque el bloque sea interconectado con otros.

La ventaja principal de estos diagramas es que permiten analizar un sistema por partes, estudiando el rol que cada subsistema juega en el total. Esto es clave en el análisis y síntesis de filtros, controladores y otros sistemas procesadores de señales.

En la Tabla 9.5 se muestran algunos ejemplos de diagramas de bloques con sus transferencias equivalentes.

Finalmente es necesario señalar que la representación en diagramas de bloques se aplica sin distinción tanto a sistemas de tiempo continuo como a sistemas de tiempo discreto, y también a sistemas híbridos, que combinan elementos en ambos dominios, como se muestra en el Capítulo 11.

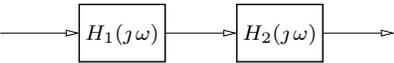
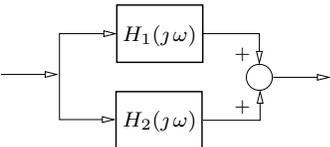
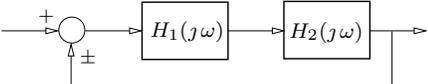
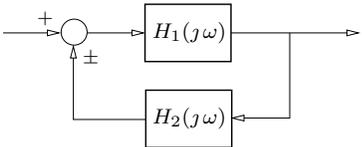
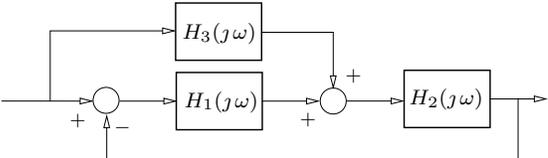
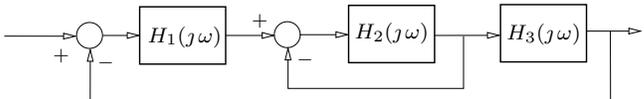
Interconexión	Transferencia equivalente
	$H_1(s)H_2(s)$
	$H_1(s) + H_2(s)$
	$\frac{H_1(s)H_2(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}$
	$\frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}$
	$\frac{(H_1(s) + H_3(s))H_2(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$
	$\frac{H_1(s)H_2(s)H_3(s)}{1 + H_2(s) + H_1(s)H_2(s)H_3(s)}$

Tabla 9.5: Diagramas de bloques y transferencias equivalentes

## 9.5. Problemas para el lector

**Problema 9.1.** Dibuje los diagramas de Bode, es decir, magnitud y fase, de la respuesta en frecuencia de cada una de las funciones de transferencia que se presentan a continuación. Haga primero las aproximaciones asintóticas y luego use MATLAB para verificar:

$$\begin{array}{ll}
 a) & H_1(s) = \frac{15}{s^2 + 8s + 15} \\
 b) & H_2(s) = \frac{s}{s^2 - 2s - 3} \\
 c) & H_3(s) = \frac{1}{s(0,2s + 1)} \\
 d) & H_4(s) = \frac{6(s - 3)}{(s + 5)(s + 9)^2} \\
 e) & H_5(s) = -H_4(s) \\
 f) & H_6(s) = \frac{e^{-2s}}{4s + 1} \\
 g) & H_7(s) = \frac{1}{s^2 + 0,01s + 1} \\
 h) & H_8(s) = \frac{s - 2}{s^2 + 3s + 2}
 \end{array}$$

**Problema 9.2.** Construya los diagramas de Bode de la siguiente función de transferencia para  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,5; 1; 5$ :

$$H(s) = \frac{\alpha s + 1}{(s + 1)(0,2s + 1)}$$

**Problema 9.3.** Dados los diagramas de Bode de la Figura 9.21, proponga una función de transferencia  $H_a(s)$  que pueda ser representada aproximadamente por ellos.

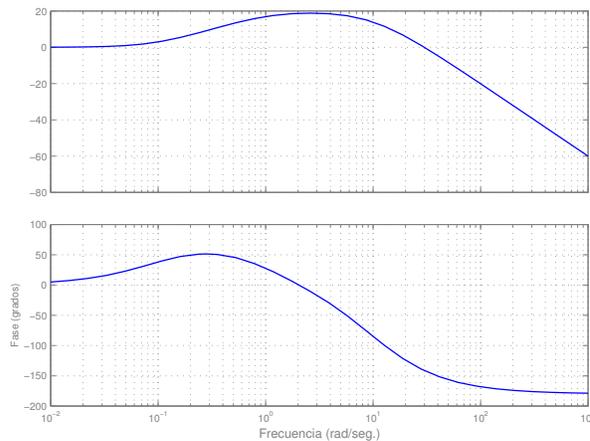


Figura 9.21: Diagramas de Bode de  $H_a(s)$

**Problema 9.4.** Con los diagramas de Bode de  $G(s)$  que aparecen en la Figura 9.22, determine en forma aproximada los diagramas de Bode para  $e^{-2s}G(s)$ ,  $\frac{-s+1}{s+1}G(s)$  y  $\frac{G(s)}{s}$ .

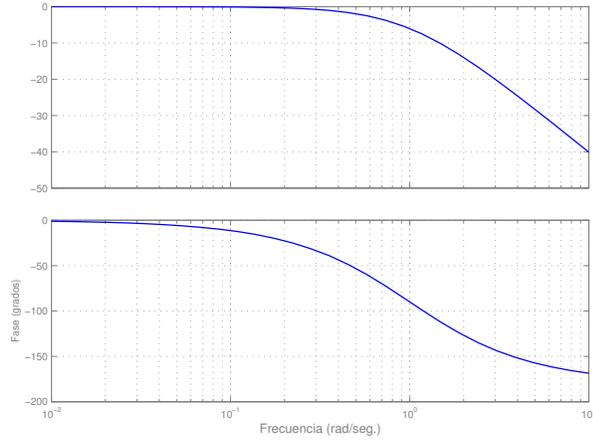


Figura 9.22: Diagramas de Bode de  $G(s)$

**Problema 9.5.** Dados los diagramas de Bode de  $G(s)$  de la Figura 9.23, determine los diagramas de Bode para  $G(-s)$ .

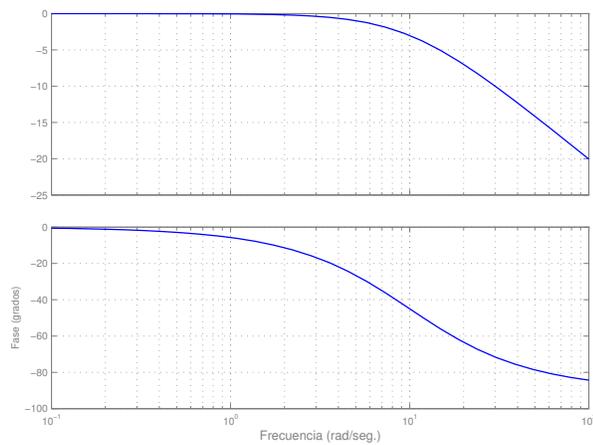


Figura 9.23: Diagramas de Bode de  $G(s)$

**Problema 9.6.** Construya los diagramas polares de las funciones del Problema 9.1.

**Problema 9.7.** Construya el diagrama polar de la función  $H_a(s)$  cuyos diagramas de Bode se muestran en la Figura 9.21.

**Problema 9.8.** Una vez obtenido el diagrama polar requerido en el Problema 9.7, construya el diagrama polar de la función  $H_a(3s)$ .

**Problema 9.9.** Considere el diagrama de bloques de la Figura 9.24. Se sabe que

$$K \in \mathbb{R}; \quad G_o(s) = \frac{1}{s-4}; \quad G_m(s) = \frac{10}{s+10}$$

Calcule el rango de valores de  $K$  para los cuales, la función de transferencia  $Y(s)/R(s)$  es estable. Calcule las funciones de transferencia  $E(s)/R(s)$ ,  $U(s)/R(s)$ ,  $Y(s)/R(s)$  e  $Y_m(s)/R(s)$

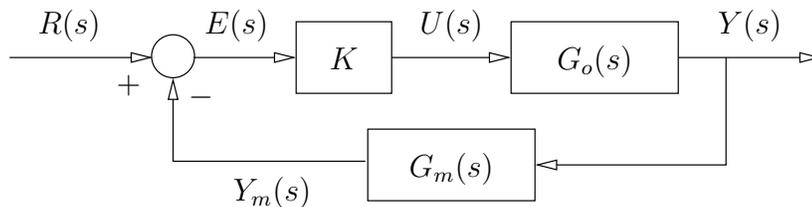


Figura 9.24: Lazo realimentado

**Problema 9.10.** Para el diagrama de bloques de la Figura 9.24 y un valor de  $K$  que haga estable a la función de transferencia  $Y(s)/R(s)$ , calcule las funciones de transferencia  $E(s)/R(s)$ ,  $U(s)/R(s)$ ,  $Y(s)/R(s)$  e  $Y_m(s)/R(s)$ .

**Problema 9.11.** Dibuje los diagramas de Bode y el diagrama polar para cada una de las siguientes funciones de transferencia:

$$\begin{array}{ll} a) H_1[z] = \frac{1}{z^4} & b) H_2[z] = \frac{z+1,5}{z(z-1)} \\ c) H_3[z] = \frac{1}{(z-0,5)^3} & d) H_4[z] = \frac{(0,5z-1)^2}{(z-0,5)^2} \end{array}$$

**Problema 9.12.** Determine el tipo de filtro (pasa bajos, pasa altos, pasa banda, elimina banda) que corresponde a cada una de las siguientes funciones de transferencia:

$$\begin{aligned}
 a) \quad H_1[z] &= \frac{1,7}{z + 0,7} & b) \quad H_2(s) &= \frac{2}{s + 2} \\
 c) \quad H_3[z] &= \frac{z + 0,5}{(z - 0,5)} & d) \quad H_4(s) &= \frac{s}{s^2 + 3s + 4} \\
 e) \quad H_5[z] &= \frac{z^2 - z + 1}{(z - 0,5)^2} & f) \quad H_6(s) &= \frac{s^2}{s^2 + 3s + 4}
 \end{aligned}$$

**Problema 9.13.** Se propone construir un predictor con el diagrama de bloques de la Figura 9.25, es decir, se busca que  $y[t] = u[t + 1]$ . Calcule la función de transferencia y analice si efectivamente el sistema es capaz de adivinar. Si no funciona, investigue la causa del problema.

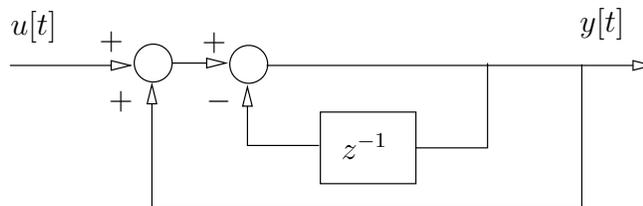


Figura 9.25: Diagrama en bloques del predictor de un paso futuro.

## Capítulo 10

# Representación en variables de estado

### 10.1. Introducción.

Tal como se señaló en la Sección §1.2, uno de los aspectos esenciales que interesa en ciencias aplicadas e ingeniería es la representación de un sistema mediante un modelo, que lo describa con suficiente detalle y permita analizar sus propiedades fundamentales.

En este capítulo, nos interesa introducir una clase especial de modelos: los **modelos en variables de estado**, útiles para describir *sistemas dinámicos* caracterizados por la interacción de sus variables en el tiempo. En tiempo continuo estos sistemas se describen mediante ecuaciones diferenciales (Capítulo 3) y en tiempo discreto, mediante ecuaciones recursivas (Capítulo 4).

En este capítulo se enfatizan los conceptos, propiedades fundamentales, interpretaciones físicas y ejemplos. El lector interesado puede consultar las referencias [9], [17], [34], [37], [39], [45], [46].

### 10.2. Conceptos fundamentales

#### 10.2.1. Definición de estado

Uno de los tipos de modelos utilizados con frecuencia para describir un sistema se estructura en torno a un conjunto de ecuaciones que relacionan determinadas variables internas. Estas variables se denominan **variables de estado**. El conjunto de los valores que esas variables toman en un instante dado se denomina **estado del sistema**. Por ello, a menudo usaremos las expresiones *variables de estado* y *estado del sistema* como sinónimos.

La definición dada es más bien intuitiva y podría coincidir en realidad con cualquier grupo de variables de un sistema dado. Para evitar ambigüedades, dentro de lo posible, usaremos la siguiente definición de estado:

Un conjunto de variables de estado de un sistema dado es un conjunto mínimo que permite calcular cualquier variable del sistema  $\forall t \geq t_o$  como función del estado en  $t = t_o$  y de los valores presentes de las entradas del sistema  $\forall t \geq t_o$ .

En esta definición hemos enfatizado el significado físico de las variables de estado. Sin embargo, existen también definiciones más abstractas.

Las variables de estado usualmente se agrupan en un **vector de estado**, el cual pertenece al llamado **espacio de estado**.

La evolución del estado en el tiempo, es decir, su *trayectoria* temporal, puede ser obtenida a partir del estado en el instante actual y el valor futuro de las entradas del sistema. De esta forma, los modelos de este tipo son usualmente ecuaciones diferenciales de primer orden o ecuaciones recursivas de un paso.

Además, el estado del sistema en un instante  $t$  determina la energía que el sistema posee en ese instante. Estas variables pueden ser cantidades físicas del sistema, tales como velocidad, posición, presión, voltaje y corriente, entre otras, o bien ciertas *funciones* de esas variables del sistema. Es así como el estado del sistema no necesariamente está formado por variables del sistema con significado físico. Es más, esta misma observación deja en evidencia que la elección de las variables de estado *no es única*.

### 10.2.2. Modelos básicos en variables de estado

Si denotamos por  $\mathbf{x}$  al vector de estado que corresponde a una elección en particular de variables de estado para un sistema dado, entonces la forma general del modelo en variables de estado es:

**Para sistemas de tiempo continuo**

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (10.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (10.2)$$

donde  $\mathbf{u}(t)$  es el vector de entrada e  $\mathbf{y}(t)$  es el vector de salida del sistema. En el caso de sistemas con una entrada y una salida,  $\mathbf{u}(t) = u(t)$  e  $\mathbf{y}(t) = y(t)$  son funciones escalares.

**Para sistemas de tiempo discreto**

$$\mathbf{x}[t+1] = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t], t) \quad (10.3)$$

$$\mathbf{y}[t] = \mathbf{G}_d(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t], t) \quad (10.4)$$

donde, análogamente al caso de tiempo continuo, el vector de entrada  $\mathbf{u}[t]$  y el vector de salida  $\mathbf{y}[t]$  se reducen a funciones escalares para sistemas de una entrada y una salida.

**Ejemplo 10.1.** En la Figura 10.1, una fuerza externa  $f(t)$  se aplica a un sistema masa-resorte sujeto a un muro por un extremo. La posición  $d(t)$  se mide con respecto a la posición en que el resorte se encuentra en su largo natural. El movimiento de la masa es amortiguado por una fuerza de roce viscoso, proporcional a la velocidad de la masa,  $v(t)$ .

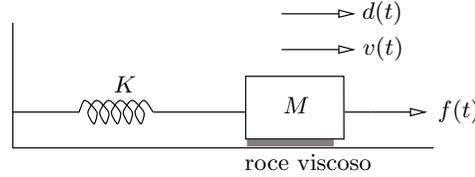


Figura 10.1: Sistema masa-resorte.

Sabemos que para obtener la posición y la velocidad de la masa se debe conocer su valor en algún instante inicial. Por tanto el vector de estado debe tener dos componentes, i.e  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ , y la elección más natural en este caso es:

$$x_1(t) = d(t) \quad (10.5)$$

$$x_2(t) = v(t) = \dot{x}_1(t) \quad (10.6)$$

Con esta elección, se pueden aplicar las leyes de Newton para obtener:

$$f(t) = M \frac{dv(t)}{dt} + Kd(t) + Dv(t) = M\dot{x}_2(t) + Kx_1(t) + Dx_2(t) \quad (10.7)$$

en que  $M[\text{kg}]$  es la masa,  $K[\text{N/m}]$  es la constante del resorte y  $D[\text{N}\cdot\text{s/m}]$  es el coeficiente de roce viscoso.

De esta forma podemos escribir las ecuaciones de estado del sistema:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (10.8)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{M}x_1(t) - \frac{D}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}f(t) \quad (10.9)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se requiere conocer los valores  $x_1(0)$  y  $x_2(0)$ , así como el valor de la excitación  $f(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Podemos apreciar también que la energía almacenada en el sistema,  $w(t)$ , queda expresada como:

$$w(t) = \frac{1}{2}K(d(t))^2 + \frac{1}{2}M(v(t))^2 = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}(t) \quad (10.10)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}$  es una matriz diagonal:  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag} \left\{ \frac{K}{2}, \frac{M}{2} \right\}$ .

Finalmente, el lector puede verificar que se pueden obtenerse una infinidad de representaciones equivalentes si, en vez de la elección hecha en (10.8), elegimos un nuevo vector de estado:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \quad (10.11)$$

en que  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz no singular. En la Sección §10.3.3, se estudian en más detalle este tipo de transformaciones de estado.

□□□

### 10.2.3. Señales descritas en espacios de estado

Las representaciones en variables de estado además de describir sistemas o procesos, pueden ser también muy útiles para representar una gran variedad de **señales**. Para esto se utilizan generalmente modelos de estado, lineales e invariantes en  $t$ , sin excitaciones. Como consecuencia de ello, la señal que se obtiene como salida del sistema sólo depende de la condición inicial del vector de estado. Este tipo de sistemas sin señal de entrada se denominan **homogéneos** o **autónomos**:

**Para señales de tiempo continuo**

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (10.12)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (10.13)$$

**Para señales de tiempo discreto**

$$\mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}_q\mathbf{x}[t] \quad (10.14)$$

$$y[t] = \mathbf{C}_q\mathbf{x}[t] \quad (10.15)$$

**Ejemplo 10.2.** Consideremos la señal de tiempo continuo:

$$f(t) = 2 + 4\cos(5t) - \sin(5t) \quad (10.16)$$

formada por una combinación de sinusoides más una constante. La función  $f(t)$  puede interpretarse como la solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} + 25 \frac{d f(t)}{dt} = 0; \quad \text{sujeta a } \begin{cases} f(0) = 6 \\ \dot{f}(0) = -5 \\ \ddot{f}(0) = -100 \end{cases} \quad (10.17)$$

Si ahora escogemos como variables de estado  $x_1(t) = f(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{f}(t)$  y  $x_3(t) = \ddot{f}(t)$ , entonces el modelo en espacios de estado de esta señal es:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t); \quad \text{sujeto a } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -100 \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

$$f(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t) \quad (10.19)$$

□□□

## 10.3. Modelos de estado para sistemas continuos

En esta sección presentamos los modelos en variables de estado para sistemas de tiempo continuo. Consideramos el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, sin embargo, sistemas no lineales definidos en general mediante (10.1)–(10.2) pueden ser usualmente *linealizados* en la forma presentada en el Capítulo 1.

El análisis considerado en esta sección supone que los sistemas no poseen retardos puros. La descripción en variables de estado de este tipo de sistemas requiere un vector  $\mathbf{x}(t)$  de dimensión infinita [40]. Sin embargo, en el Capítulo 11 veremos que sistemas de tiempo continuo con retardos puros pueden ser considerados sin dificultad alguna mediante un modelo de estado del sistema **muestreado** (vea Ejemplo 11.5 en la página 337).

### 10.3.1. Linealización

Si nos restringimos al modelo de un sistema invariante en el tiempo, con una entrada y una salida, las ecuaciones (10.1)–(10.2) se reducen a:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), u(t)) \quad (10.20)$$

$$y(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), u(t)) \quad (10.21)$$

Supongamos que el modelo (10.20)–(10.21) tiene al menos un *punto de equilibrio*, dado por  $\{\mathbf{x}_Q, u_Q, y_Q\}$ , en que las derivadas se anulan. Este trío de vectores satisface:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_Q, u_Q) \quad (10.22)$$

$$y_Q = \mathbf{G}(\mathbf{x}_Q, u_Q) \quad (10.23)$$

Si para el modelo, con las condiciones dichas, consideramos una *vecindad* alrededor del punto de equilibrio, podemos *aproximar* el modelo (10.20)–(10.21) por una serie de Taylor truncada (vea Apéndice A) de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_Q, u_Q) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_Q) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_Q \\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_Q}} (u(t) - u_Q) \quad (10.24)$$

$$y(t) \approx \mathbf{G}(\mathbf{x}_Q, u_Q) + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_Q) + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_Q \\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_Q}} (u(t) - u_Q) \quad (10.25)$$

Las ecuaciones (10.24) y (10.25) se pueden reescribir por lo tanto como:

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta u(t) \quad (10.26)$$

$$\Delta y(t) = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta u(t) \quad (10.27)$$

donde las señales *incrementales* representan el desplazamiento alrededor del punto de equilibrio:

$$\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_Q; \quad \Delta u(t) = u(t) - u_Q; \quad \Delta y(t) = y(t) - y_Q \quad (10.28)$$

y las matrices de la representación de estado son:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}}; \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}}; \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}}; \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}} \quad (10.29)$$

**Ejemplo 10.3.** Considere el levitador electromagnético que se muestra en la Figura 10.2. La esfera metálica está sometida a dos fuerzas: su propio peso,  $mg$ , y la fuerza de atracción generada por el electroimán,  $f(t)$ , que se regula a través de la fuente de voltaje,  $e(t) > 0, \forall t$ . La fuerza de atracción sobre la esfera,  $f(t)$ , depende de la distancia  $h(t)$  y de la corriente,  $i(t)$ . Esta relación se puede describir aproximadamente por la expresión

$$f(t) = \frac{K_1}{h(t) + K_2} i(t) \quad (10.30)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes positivas.

Aplicando los principios usuales en redes eléctricas y en sistemas mecánicos, podemos escribir las ecuaciones:

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (10.31)$$

$$v(t) = -\frac{dh(t)}{dt} \quad (10.32)$$

$$f(t) = \frac{K_1}{h(t) + K_2} i(t) = mg + m \frac{dv(t)}{dt} \quad (10.33)$$

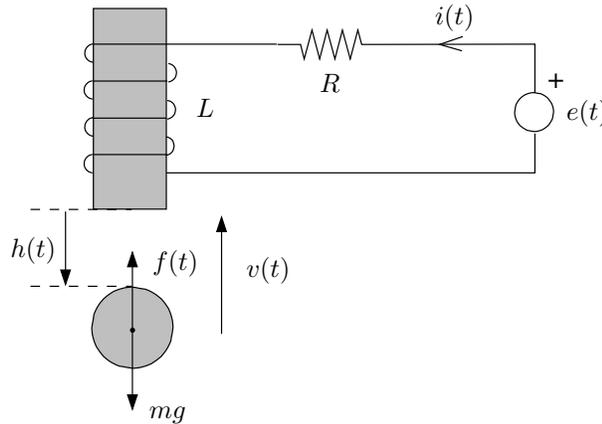


Figura 10.2: Levitador electromagnético.

A continuación escogemos las variables de estado: la corriente  $i(t)$ , la posición de la esfera  $h(t)$ , y su velocidad  $v(t)$ , es decir:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T = [i(t) \quad h(t) \quad v(t)]^T \quad (10.34)$$

Note que esta elección permite cuantificar directamente la energía almacenada en el sistema.

A partir de (10.31)-(10.33) obtenemos el modelo de estado del sistema:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} e(t) \quad (10.35)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_3(t) \quad (10.36)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{K_1}{m(x_2(t) + K_2)} x_1(t) - g \quad (10.37)$$

Para linealizar el modelo obtenido, necesitamos obtener primero el punto de equilibrio alrededor del cual se hará dicha linealización. La entrada al sistema es el voltaje de la fuente  $e(t)$ . Supongamos que el punto de equilibrio se obtiene fijando  $e(t) = E_Q$ , entonces, a partir de éste, se puede calcular el estado del sistema en el punto de equilibrio. Este punto de equilibrio queda caracterizado por las ecuaciones (10.35)-(10.37), haciendo las derivadas iguales a cero:

$$-\frac{R}{L} x_{1Q} + \frac{1}{L} E_Q = 0 \implies x_{1Q} = \frac{E_Q}{R} \quad (10.38)$$

$$-x_{3Q} = 0 \implies x_{3Q} = 0 \quad (10.39)$$

$$\frac{K_1}{m(x_{2Q} + K_2)} x_{1Q} - g = 0 \implies x_{2Q} = \frac{K_1}{mg} x_{1Q} - K_2 = \frac{K_1 E_Q}{mgR} - K_2 \quad (10.40)$$

El modelo linealizado queda expresado en términos de la entrada incremental  $\Delta e(t)$  y el estado incremental  $\Delta \mathbf{x}(t) = [\Delta x_1(t), \Delta x_2(t), \Delta x_3(t)]^T$  de la forma:

$$\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \Delta x_1(t) + \frac{1}{L} \Delta e(t) \quad (10.41)$$

$$\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} = -\Delta x_3(t) \quad (10.42)$$

$$\frac{d\Delta x_3(t)}{dt} = \frac{Rg}{E_Q} \Delta x_1(t) - \frac{Rmg^2}{K_1 E_Q} \Delta x_2(t) \quad (10.43)$$

Si consideramos como salida del sistema la posición de la esfera  $h(t)$ , podemos comparar las últimas ecuaciones con (10.26) y (10.27) para obtener:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{Rg}{E_Q} & -\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = 0 \quad (10.44)$$

□□□

De aquí en adelante omitiremos el prefijo  $\Delta$ , pero el lector debe tener en mente que los modelos obtenidos mediante linealización relacionan el estado, las entradas y las salidas, en sus formas **incrementales**, es decir, en función de los respectivos desplazamientos en torno al punto de equilibrio.

### 10.3.2. Modelos lineales en el espacio de estado

Consideramos el modelo en variables de estado, lineal e invariante en el tiempo:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10.45)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.46)$$

**Lema 10.1.** Dada la ecuación (10.45), sujeta a la condición inicial  $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$ , su solución es<sup>1</sup>:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}\mathbf{x}_o + \int_{t_o}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad \forall t \geq t_o \quad (10.47)$$

donde la **matriz de transición**  $e^{\mathbf{A}t}$  satisface:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k \quad (10.48)$$

#### **Demostración**

Puede verificarse directamente al reemplazar (10.47) en la ecuación (10.45), usando la regla de Leibnitz [25] para la derivación de la integral.

□□□

Con este resultado, dado un estado inicial  $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$  la solución de las ecuaciones (10.45)–(10.46) se puede expresar como:

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_o)}\mathbf{x}_o + \mathbf{C} \int_{t_o}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t) \quad (10.49)$$

#### **Dinámica del sistema**

Como hemos visto en los Capítulos 3 y 4, la salida de un sistema siempre puede descomponerse en dos partes: una componente no forzada determinada por las condiciones iniciales y formada por los modos naturales del sistema, y una componente forzada por la señal de entrada al sistema. Esto mismo se ve confirmado en la solución de la ecuación de estado (10.49), donde se aprecia la componente **no forzada**  $\mathbf{x}_u(t)$ , y la componente **forzada**  $\mathbf{x}_f(t)$ , donde:

$$\mathbf{x}_u(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}\mathbf{x}_o \quad (10.50)$$

$$\mathbf{x}_f(t) = \int_{t_o}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \quad (10.51)$$

<sup>1</sup>La exponencial de una matriz se define en el Apéndice F.

### Estructura de la respuesta homogénea

Para analizar con mayor detalle el modelo en espacios de estado y su solución, consideremos  $t_o = 0$  y la entrada  $u(t) = 0 \forall t \geq 0$ , es decir, el estado está formado sólo por su parte no forzada u **homogénea**. Entonces:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_o \quad (10.52)$$

Supondremos además que  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y que, por simplicidad, no tiene autovalores repetidos, sino que son todos diferentes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , con sus  $n$  autovectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  linealmente independientes<sup>2</sup>. En este caso podemos afirmar que siempre existen constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tales que:

$$\mathbf{x}_o = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell} \mathbf{v}_{\ell}; \quad \alpha_{\ell} \in \mathbb{C} \quad (10.53)$$

Del álgebra lineal (Apéndice F) sabemos que los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}^k$  son  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$  con sus correspondientes autovectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ . De esta forma, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_o &= \left( \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k \right) \left( \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell} \mathbf{v}_{\ell} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell} \left( \mathbf{v}_{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\mathbf{A}^k \mathbf{v}_{\ell}}_{\lambda_{\ell}^k \mathbf{v}_{\ell}} t^k \right) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{\ell} e^{\lambda_{\ell} t} \mathbf{v}_{\ell} \end{aligned} \quad (10.54)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que la componente no forzada del vector de estado es una *combinación lineal* de modos de la forma  $\{e^{\lambda_{\ell} t}\}$ , cada uno de los cuales está asociado a un autovalor de  $\mathbf{A}$ . Esto establece un resultado muy importante:

Las frecuencias naturales de un sistema de tiempo continuo son iguales a los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  de su representación en variables de estado. Es decir, la ecuación característica de un sistema está dada por:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (10.55)$$

Por tanto, la matriz  $\mathbf{A}$  es la que determina:

- la estructura de la respuesta no forzada u homogénea,
- la estabilidad (o inestabilidad) del sistema, y
- la velocidad de respuesta.

<sup>2</sup>Todo conjunto de  $n$  vectores l.i. en  $\mathbb{R}^n$  forman una base para  $\mathbb{R}^n$

El análisis previo puede extenderse al caso en que la matriz  $\mathbf{A}$  posee valores propios repetidos, utilizando la forma de Jordan (Apéndice F).

En ausencia de señal de entrada, hemos visto que el estado del sistema resulta ser una combinación de modos naturales. Estos modos pertenecen al conjunto de funciones generadas por exponenciales reales o complejas, que pueden corresponder a señales constantes, exponenciales reales y sinusoides puras o moduladas por exponenciales, entre otras.

**Ejemplo 10.4.** *Para ilustrar estas ideas y su interpretación física, considere nuevamente el sistema masa-resorte en el Ejemplo 10.1 en la página 261. Para dicho sistema, obtuvimos el modelo en variables de estado:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t) \quad (10.56)$$

en que  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son respectivamente la posición y la velocidad de la masa  $M$ , y  $f(t)$  es la fuerza externa.

Las frecuencias naturales del sistema son los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$ , es decir, las soluciones de la ecuación característica:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + \frac{D}{M}\lambda + \frac{K}{M} = 0 \quad (10.57)$$

Las soluciones son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2M} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4M^2} - \frac{K}{M}} \quad (10.58)$$

Donde podemos apreciar que:

- Si no existe amortiguación ( $D=0$ ), los autovalores del sistema son imaginarios puros, y los modos naturales son oscilaciones sostenidas de frecuencia angular  $\omega_o = \sqrt{K/M}$ . Esto coincide con la interpretación física, pues si no existe roce, la masa permanecerá oscilando indefinidamente, aunque no exista fuerza externa. Para ello basta que el resorte esté inicialmente comprimido o estirado, y/o que la masa tenga una velocidad inicial no nula.
- Cuando el sistema está débilmente amortiguado ( $D^2 < 4KM$ ), los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  son complejos conjugados con parte real negativa, por lo tanto los modos naturales asociados son sinusoides amortiguadas exponencialmente. Esto coincide también con lo que sucede en la práctica, pues en caso de existir una fuerza de roce no muy grande, la masa oscilará durante un lapso prolongado, hasta llegar a su posición de reposo.
- Finalmente, si la amortiguación es muy grande ( $D^2 > 4KM$ ), los autovalores de la matriz serán reales y negativos, lo cual indica que los autovalores son dos exponenciales decrecientes. En este caso, la existencia de

una fuerza de roce importante se traduce en que la masa no logrará oscilar sino que es llevada por la fuerza del resorte hasta su posición de equilibrio, y toda la energía contenida en el sistema se disipa rápidamente en el roce.

Para ilustrar estas tres situaciones podemos utilizar MATLAB, que permite definir fácilmente sistemas en variables de estado a través del comando `ss`. La respuesta a una condición inicial, con entrada cero  $\forall t \geq 0$ , se obtiene a través del comando `initial`. Para estas simulaciones consideramos  $M = 2[\text{kg}]$ ,  $K = 0,1[\text{N/m}]$  y tres diferentes valores para la constante de roce viscoso  $D[\text{N}\cdot\text{s/m}]$ , mientras que las condiciones iniciales son  $d(0) = 0,3[\text{m}]$  y  $v(0) = 0,05[\text{m/s}]$ .

MATLAB

```
>> M=2 ; K=0.1 ; D=0 ;
>> x_o=[0.3 0.05];
>> A=[0 1; -K/M -D/M]; B=[0; 1/M]; C=[1 0]; d=0;
>> S=ss(A,B,C,d);
>> initial(S,x_o)
```

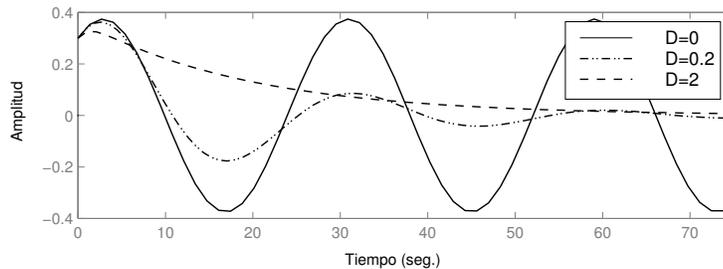


Figura 10.3: Respuesta homogénea del sistema masa-resorte-roce para tres valores distintos de la constante de roce viscoso  $D$ .

En la Figura 10.4 se muestra la trayectoria que sigue el estado del sistema. Se ha considerado la posición de la masa  $d(t)$  como coordenada horizontal, y la velocidad,  $v(t)$ , como coordenada vertical. Este tipo de diagrama se conoce como **plano de fase**. En MATLAB, el mismo comando `initial` permite obtener la trayectoria del estado mediante el siguiente código:

MATLAB

```
>> [y,t,x]=initial(S,x_o);
>> plot(x(:,1),x(:,2))
```

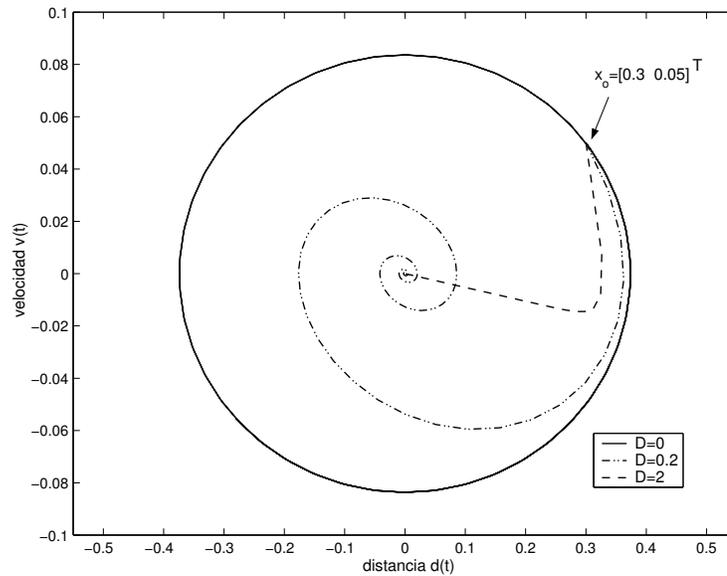


Figura 10.4: Trayectorias en el espacio de estado del sistema masa-resorte-roce para tres valores distintos de la constante de roce viscoso  $D$ .

*Note que, excepto en el caso en que no existe roce ( $D = 0$ ), la masa llegará a detenerse asintóticamente, es decir, llega al origen del espacio de estado.*

□□□

### Estructura de la respuesta forzada

Cuando las condiciones iniciales del sistema son cero, el estado sólo tendrá su componente forzada:

$$\mathbf{x}_f(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (10.59)$$

Esta parte del estado también incluye modos naturales, pero además contiene los modos **forzados** o **soluciones particulares**, los cuales, como hemos visto en capítulos precedentes, no dependen del sistema, sino que de la señal de entrada  $\mathbf{u}(t)$ . En general, los **modos forzantes** presentes en la entrada aparecerán también en el estado. Sin embargo, es importante mencionar que un caso especial sucede cuando los modos forzantes en la entrada coinciden con alguno de los modos naturales del sistema.

### Estabilidad del sistema

La estabilidad de un sistema lineal e invariante en el tiempo queda determinada por la matriz de estado  $\mathbf{A}$ , porque todos los polos del sistema son autovalores de esta matriz. Por definición, todas las variables de un sistema lineal

pueden expresarse como funciones lineales de su estado y su entrada. Cuando la entrada  $\mathbf{u}(t)$  al sistema es un vector de funciones temporales acotadas, entonces las variables del sistema permanecen acotadas si y sólo si su estado permanece acotado. Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Teorema 10.1.** *Considere el sistema definido en variables de estado mediante (10.45)–(10.46). Entonces el estado del sistema (y, por tanto, su salida) permanece acotado para toda entrada acotada si y sólo si los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  tienen parte real estrictamente negativa.*

□□□

Para apreciar el valor práctico del resultado anterior consideremos de nuevo el levitador magnético del Ejemplo 10.3 en la página 264. Para dicho sistema la matriz  $\mathbf{A}$  (en el modelo linealizado) está dada por la expresión:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{Rg}{E_Q} & -\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.60)$$

y sus autovalores o valores propios son las raíces de la ecuación

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \left( \lambda + \frac{R}{L} \right) \left( \lambda - \sqrt{\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q}} \right) \left( \lambda + \sqrt{\frac{Rmg^2}{K_1 E_Q}} \right) \quad (10.61)$$

Podemos apreciar que, del conjunto de autovalores de la matriz, existe uno que es **real y mayor que cero**. Esto implica que el sistema es **inestable**, lo cual coincide con el análisis del sistema desde el punto de vista físico pues, si bien teóricamente existe un punto de *equilibrio* para el sistema, dado por (10.38)–(10.40), éste resulta ser un punto de equilibrio inestable. En dicho punto, cualquier pequeña perturbación sobre la esfera hará que ésta acelere hasta adherirse al imán, o bien, caiga al suelo.

### Velocidad de respuesta y resonancia

Como ya hemos visto, en los sistemas estables la parte real de los autovalores determina la velocidad a la cual los modos naturales decaen a cero. Los modos más lentos, que hemos denominado modos *dominantes*, determinan la velocidad con que la salida del sistema alcanza el estado estacionario, es decir, determinan la velocidad de respuesta del sistema.

Un segundo aspecto, de especial importancia en estructuras flexibles, es la presencia de frecuencias de resonancia asociadas a los autovalores complejos conjugados de un sistema. En la práctica, cuando la señal de entrada contiene energía en la banda de frecuencias cercana a la frecuencia con que el sistema oscila en forma natural, pueden aparecer oscilaciones de gran magnitud. Ilustraremos esta idea a través de un ejemplo.

**Ejemplo 10.5.** Consideremos nuevamente el sistema masa-resorte del Ejemplo 10.1, en que las constantes tienen los valores  $M = 1[\text{kg}]$ ,  $D = \frac{1}{3}[\text{Ns/m}]$  y  $K = 1[\text{N/m}]$ . Los autovalores del sistema están dados por:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + \frac{D}{M}\lambda + \frac{K}{M} = \lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + 1 = 0 \quad (10.62)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{6} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-35}{9}} \approx -\frac{1}{6} \pm j \quad (10.63)$$

Esto significa que los modos naturales son de la forma  $e^{-0,1667t} \cos(t + \phi)$ . Cualquier excitación que posea energía a frecuencias cercanas a  $\omega = 1[\text{rad/s}]$  hará que el sistema entre en resonancia, haciendo que en la salida del sistema aparezcan oscilaciones de magnitud significativa. La Figura 10.5 muestra el resultado de dos simulaciones: en la primera, la entrada es una senoide de frecuencia  $\omega = 1[\text{rad/s}]$ , y en la segunda, una señal cuadrada de frecuencia fundamental  $\omega_o = 0,333[\text{rad/s}]$ . En ambos casos las condiciones iniciales del sistema son cero.

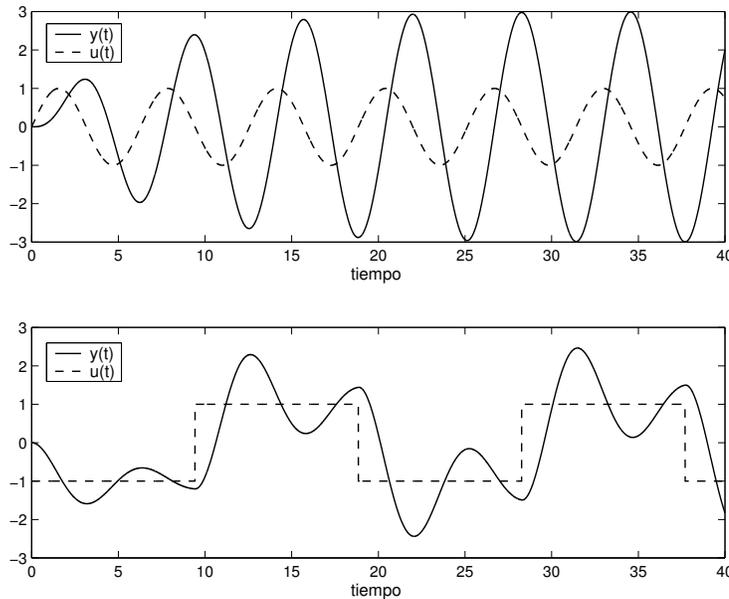


Figura 10.5: Resonancia en el sistema masa-resorte.

En ambos casos podemos apreciar el fenómeno de resonancia debido a que la entrada concentra su energía alrededor de la frecuencia de oscilación de los modos naturales del sistema. En particular, el lector puede verificar que en el segundo caso es la tercera armónica de la señal cuadrada la que excita los modos naturales del sistema.

□□□

### 10.3.3. Transformaciones de similaridad

Como ya se ha señalado, la elección de variables de estado para un sistema dado no es única. Concretamente podemos tener un sistema con entrada  $u(t)$ , salida  $y(t)$  y dos diferentes elecciones para el vector de estado:  $\mathbf{x}(t)$  y  $\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ , con sus matrices asociadas  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  y  $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}\}$ , respectivamente. El siguiente lema establece la relación entre ambos modelos.

**Lema 10.2.** *Suponga un sistema cuyo vector de estado es  $\mathbf{x}(t)$  y con modelo de estado definido por  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ . Suponga además que se elige una **matriz de transformación**  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular, que define un nuevo vector de estado:*

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (10.64)$$

Entonces, el modelo de estado para la nueva representación, queda determinado por las matrices:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1} \quad ; \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{TB} \quad ; \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT}^{-1} \quad ; \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (10.65)$$

#### Demostración

Dada la transformación (10.64), en que  $\mathbf{T}$  es no singular y, por tanto, invertible, tenemos que:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (10.66)$$

Si reemplazamos entonces el vector de estado  $\mathbf{x}(t)$  en las ecuaciones de estado del sistema (10.45)-(10.46), obtenemos:

$$\mathbf{T}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{AT}^{-1} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10.67)$$

$$y(t) = \mathbf{CT}^{-1} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.68)$$

donde, al multiplicar la primera ecuación por  $\mathbf{T}$  por la izquierda, se obtiene el modelo correspondiente a (10.65):

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{TAT}^{-1} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{TB}u(t) \quad (10.69)$$

$$y(t) = \mathbf{CT}^{-1} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.70)$$

□□□

Diferentes elecciones de las variables de estado pueden tener o no significado físico, sin embargo, existen representaciones que resultan más simples desde el punto de vista matemático, como veremos en la Sección §10.6.

A pesar de las diferentes posibles representaciones, es natural que ciertas importantes características y propiedades del sistema permanezcan invariantes, cualquiera sea la representación elegida. Si, por ejemplo, consideramos los autovalores del sistema, tenemos que:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = \det(\lambda \mathbf{TT}^{-1} - \mathbf{TAT}^{-1}) \quad (10.71)$$

$$= \det(\mathbf{T}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1}) \quad (10.72)$$

$$= \det(\mathbf{T}) \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{T}^{-1}) \quad (10.73)$$

$$= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (10.74)$$

Lo anterior demuestra que los autovalores o frecuencias naturales del sistema, son invariantes respecto de las transformaciones de similitud. Por lo tanto, las características de estabilidad, la naturaleza de la respuesta homogénea y la velocidad de respuesta del sistema son invariantes respecto a transformaciones de similitud del estado.

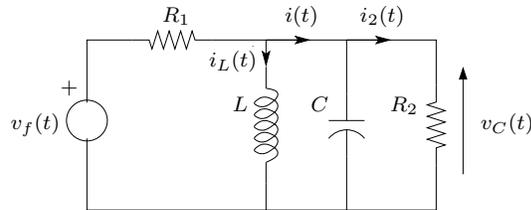


Figura 10.6: Red eléctrica.

**Ejemplo 10.6.** En el circuito eléctrico de la Figura 10.6, si escogemos el vector de estado como  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [i_L(t) \ v_C(t)]^T$  y la señal de entrada  $u(t) = v_f(t)$ , entonces usando conocimientos básicos de redes eléctricas, tenemos que:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} u(t) \quad (10.75)$$

Una elección alternativa del vector de estado puede ser  $\bar{\mathbf{x}}(t) = [\bar{x}_1(t) \ \bar{x}_2(t)]^T = [i(t) \ i_2(t)]^T$ . Donde puede probarse sin problema que

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\frac{1}{R_2} \begin{bmatrix} R_2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \mathbf{x}(t) \quad (10.76)$$

□□□

### 10.3.4. Espacio de estado y funciones de transferencia

La representación de sistemas mediante modelos de variables de estado es una descripción alternativa a las antes vistas. En el Capítulo 3 utilizamos la ecuación diferencial del sistema, mientras que en los Capítulos 6 y 7 nos concentramos en la función de transferencia. Sin embargo, en esta sección veremos que los modelos de estado permiten describir con mayor profundidad propiedades de los sistemas.

El siguiente lema establece la relación entre la representación en variables de estado de un sistema y su función de transferencia.

**Lema 10.3.** *Dado un sistema lineal e invariante del tiempo con función de transferencia:*

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (10.77)$$

*En que  $U(s)$  y  $Y(s)$  son las transformadas de Laplace de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$ , respectivamente. Entonces, dado un modelo de estado definido por  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ , tenemos que:*

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (10.78)$$

*Además, los polos de la función de transferencia  $H(s)$  pertenecen al conjunto de autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$ .*

#### **Demostración para el caso escalar**

*Usando la definición en la Sección §7.3, la función de transferencia del sistema es la transformada de Laplace de la respuesta a impulso (delta de Dirac) del sistema, con condiciones iniciales iguales a cero. Por lo tanto, si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación (10.45), tenemos que:*

$$s\mathbf{X}(s) - \overbrace{\mathbf{x}(0^-)}^0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\overbrace{\mathcal{L}\{\delta(t)\}}^1 \quad (10.79)$$

*donde, si resolvemos para la transformada del vector de estado, tenemos que:*

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (10.80)$$

*De igual forma, aplicando Laplace a la ecuación (10.46) y reemplazando la transformada del vector de estado  $\mathbf{X}(s)$ , obtenemos:*

$$Y(s) = H(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (10.81)$$

*Para obtener los polos de la transferencia  $H(s)$  podemos reescribir la inversa en términos de su adjunta y su determinante (ver Apéndice F):*

$$H(s) = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (10.82)$$

*Lo que pone de manifiesto que todos los polos de  $H(s)$  son autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$ . Otra observación de interés es que en un sistema con una entrada y una salida,  $\mathbf{D}$  es un escalar y por lo tanto,  $H(s)$  es estrictamente propia si y sólo si  $D = 0$ .*

□□□

Es importante notar que **no necesariamente** los polos de la función de transferencia son todos los autovalores del sistema, pues la ecuación (10.78) puede tener cancelaciones encubiertas entre raíces del numerador (ceros) y raíces del denominador (polos). Esto se ilustra mejor a través del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 10.7.** Consideremos las matrices de un modelo de estado:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]; \quad D = 0 \quad (10.83)$$

Entonces, la función de transferencia asociada es:

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad (10.84)$$

$$= \frac{0,5(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{0,5}{s+3} \quad (10.85)$$

En este caso, la función de transferencia tiene sólo un polo, a pesar que la matriz  $\mathbf{A}$  posee dos autovalores. Se observa que existe una cancelación entre un polo y un cero en  $H(s)$ . Este fenómeno tiene relación directa con las propiedades del sistema que se estudian en la Sección §10.6.  $\square\square\square$

La función de transferencia, en algunos casos, entrega *menos información* sobre el sistema que el modelo en variables de estado, pues representa la relación sólo entre la entrada y la salida.

Cuando el número de autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  es igual al número de polos de la función de transferencia, se dice que la representación de estado es una **realización mínima**.

Un problema interesante es obtener una representación de estado de un sistema a partir de su función de transferencia. Si la función de transferencia no tiene cancelaciones encubiertas entre polos y ceros, la representación de estado resultante es una realización mínima.

Existen diferentes métodos para obtener un modelo en variables de estado a partir de la función de transferencia. A continuación ilustramos uno de ellos.

Consideremos la función de transferencia dada por

$$H_T(s) = \frac{B_o(s)}{A_o(s)} + H_T(\infty) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} + H_T(\infty) \quad (10.86)$$

En primer lugar, de la ecuación (10.78), podemos apreciar que:

$$\mathbf{D} = H_T(\infty) \quad (10.87)$$

por lo tanto, basta considerar la función de transferencia  $H(s) = H_T(s) - H_T(\infty)$ , que es **estrictamente propia**. Definamos  $v_\ell(t) \in \mathbb{R}$  cuya transformada de Laplace es  $V_\ell(s)$  tal que:

$$V_\ell(s) = \frac{s^{\ell-1}}{A_o(s)} U(s) \quad \ell \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (10.88)$$

Esto implica que:

$$v_\ell(t) = \frac{dv_{\ell-1}(t)}{dt} \quad \ell \in \{2, \dots, n\} \quad (10.89)$$

$$U(s) = \frac{A_o(s)}{A_o(s)} U(s) = \underbrace{\frac{s^n}{A_o(s)} U(s)}_{sV_n(s)} + \sum_{\ell=1}^n a_{\ell-1} \underbrace{\frac{s^{\ell-1}}{A_o(s)} U(s)}_{V_\ell(s)} \quad (10.90)$$

de donde se obtiene:

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = u(t) - \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell \frac{dv_{\ell-1}(t)}{dt} \quad (10.91)$$

Además

$$Y(s) = H(s)U(s) + H_T(\infty) = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell-1} V_\ell(s) + H_T(\infty) \quad (10.92)$$

Escogiendo como variables de estado  $x_\ell(t) = v_\ell(t)$ , las ecuaciones (10.89)–(10.90) conducen a un modelo de estado con matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.93)$$

mientras que la ecuación (10.92) implica que:

$$\mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}]; \quad \mathbf{D} = H_T(\infty) \quad (10.94)$$

**Ejemplo 10.8.** La función de transferencia de un sistema está dada por:

$$H(s) = \frac{4s - 10}{(s + 2)^2(s - 1)} = \frac{4s - 10}{s^3 + 3s^2 - 4} \quad (10.95)$$

Entonces una realización mínima para este sistema es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.96)$$

$$\mathbf{C} = [-10 \quad 4 \quad 0]; \quad \mathbf{D} = 0 \quad (10.97)$$

□□□

**Lema 10.4.** La función de transferencia de un sistema es invariante respecto a transformaciones de similaridad del estado.

**Demostración**

La dejamos como ejercicio para el lector. Ver Problema 10.6.

□□□

## 10.4. Modelos de estado para sistemas discretos

En esta sección estudiaremos la representación de estado para sistemas de tiempo discreto, usando como base los resultados ya obtenidos para sistemas de tiempo continuo.

Antes de iniciar el estudio es importante señalar que un modelo en tiempo discreto puede originarse de dos formas:

- A partir de un sistema *intrínsecamente* discreto, cuyas variables están definidas sólo en instantes de tiempo específicos  $t_k$ , tales como modelos de sistemas económicos o procesos estocásticos.
- A partir de la **discretización** de un sistema de tiempo continuo, en cuyo caso interesa un modelo que relacione las muestras de las señales en instantes de tiempo específicos. Este tipo de modelos es útil cuando sistemas digitales (microcontroladores, computadores o controladores lógicos programables) interactúan con sistemas físicos *reales*, tales como estructuras mecánicas, procesos industriales o circuitos análogos<sup>3</sup>.

Cualquiera que sea el origen del modelo discreto, nos concentraremos en el caso en que éste es **lineal e invariante en el tiempo**, tal como lo hicimos en el caso de tiempo continuo.

La relación entre sistemas de tiempo continuo y su modelo de estado obtenido mediante discretización se estudiará en el Capítulo 11.

### 10.4.1. Linealización de sistemas discretos

El equivalente en tiempo discreto de las ecuaciones (10.3)-(10.4), para sistemas de una entrada y una salida, está dado por las expresiones no lineales:

$$\mathbf{x}[t + 1] = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}[t], u[t]) \quad (10.98)$$

$$y[t] = \mathbf{G}_d(\mathbf{x}[t], u[t]) \quad (10.99)$$

La linealización se realiza de manera análoga que para el caso continuo, considerando primero un **punto de equilibrio**, en que todas las señales del sistema se mantienen constantes, dado por el trío  $\{\mathbf{x}_Q, u_Q, y_Q\}$ , que satisface las ecuaciones:

$$\mathbf{x}_Q = \mathbf{F}_d(\mathbf{x}_Q, u_Q) \quad (10.100)$$

$$y_Q = \mathbf{G}_d(\mathbf{x}_Q, u_Q) \quad (10.101)$$

El sistema discreto puede ser entonces linealizado en torno a este punto de equilibrio, definiendo las señales:

$$\Delta \mathbf{x}[t] = \mathbf{x}[t] - \mathbf{x}_Q; \quad \Delta u[t] = u[t] - u_Q; \quad \Delta y[t] = y[t] - y_Q \quad (10.102)$$

<sup>3</sup>Mediante conversores *digital/análogo* y *análogo/digital* (DAC y ADC, sus siglas en inglés, respectivamente)

Obtenemos así el modelo en variables de estado:

$$\Delta \mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}_d \Delta \mathbf{x}[t] + \mathbf{B}_d \Delta u[t] \quad (10.103)$$

$$\Delta y[t] = \mathbf{C}_d \Delta \mathbf{x}[t] + \mathbf{D}_d \Delta u[t] \quad (10.104)$$

donde las matrices son:

$$\mathbf{A}_d = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_d}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}}; \quad \mathbf{B}_d = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_d}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}}; \quad \mathbf{C}_d = \left. \frac{\partial \mathbf{G}_d}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}}; \quad \mathbf{D}_d = \left. \frac{\partial \mathbf{G}_d}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_Q \\ u=u_Q}} \quad (10.105)$$

### 10.4.2. Modelos de estado lineales

Consideremos ahora el modelo en variables de estado, lineal e invariante en el tiempo:

$$\mathbf{x}[t+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[t] + \mathbf{B}_d u[t] \quad (10.106)$$

$$y[t] = \mathbf{C}_d \mathbf{x}[t] + \mathbf{D}_d u[t] \quad (10.107)$$

**Lema 10.5.** Dado el sistema de tiempo discreto definido en las ecuaciones (10.106)–(10.107) y el estado inicial  $\mathbf{x}[t_o] = \mathbf{x}_o$ , entonces:

$$\mathbf{x}[t] = \mathbf{A}_d^{(t-t_o)} \mathbf{x}_o + \sum_{i=0}^{(t-t_o)-1} \mathbf{A}_d^{(t-t_o)-i-1} \mathbf{B}_d u[i+t_o] \quad \forall t \geq t_o \quad (10.108)$$

donde  $\mathbf{A}_d^{(t-t_o)}$  es la *matriz de transición discreta*.

#### *Demostración*

A partir de la ecuación (10.106), usando la condición inicial  $\mathbf{x}[t_o] = \mathbf{x}_o$ , puede determinarse completamente la trayectoria futura del estado. Así:

$$\mathbf{x}[t_o+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[t_o] + \mathbf{B}_d u[t_o] \quad (10.109)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[t_o+2] &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}[t_o+1] + \mathbf{B}_d u[t_o+1] \\ &= \mathbf{A}_d (\mathbf{A}_d \mathbf{x}[t_o] + \mathbf{B}_d u[t_o]) + \mathbf{B}_d u[t_o+1] \\ &= \mathbf{A}_d^2 \mathbf{x}[t_o] + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d u[t_o] + \mathbf{B}_d u[t_o+1] \end{aligned} \quad (10.110)$$

⋮

Por inducción, tenemos que:

$$\mathbf{x}[t_o+\ell] = \mathbf{A}_d^\ell \mathbf{x}[t_o] + \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathbf{A}_d^{\ell-1+i} \mathbf{B}_d u[t_o+i] \quad \forall \ell \geq 0 \quad (10.111)$$

Esta última ecuación coincide con la ecuación (10.108) al hacer  $\ell = t - t_o$ .

□□□

Utilizando el resultado anterior en la ecuación (10.107) obtenemos la salida del sistema:

$$y[t] = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{(t-t_o)} \mathbf{x}_o + \mathbf{C}_d \sum_{i=0}^{(t-t_o)-1} \left( \mathbf{A}_d^{(t-t_o)-i-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}[t_o + i] \right) + \mathbf{D}_d u[t] \quad (10.112)$$

### Dinámica del sistema

El vector de estado que se obtiene al resolver las ecuaciones del sistema, análogamente al caso de tiempo continuo, tiene dos componentes: la componente **no forzada**,  $\mathbf{x}_u[t]$ , y la **forzada**,  $\mathbf{x}_f[t]$ , donde:

$$\mathbf{x}_u[t] = \mathbf{A}_d^{(t-t_o)} \mathbf{x}_o \quad (10.113)$$

$$\mathbf{x}_f[t] = \sum_{i=0}^{(t-t_o)-1} \mathbf{A}_d^{(t-t_o)-i-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}[t_o + i] \quad (10.114)$$

### Estructura de la respuesta no forzada

Para simplificar el análisis del modelo y su solución, aprovecharemos la invariancia en el tiempo, considerando el caso en que  $t_o = 0$  y  $\mathbf{u}[t] = 0 \forall t \geq 0$ , es decir, el estado tiene sólo su **componente no forzada**. En este caso:

$$\mathbf{x}[t] = \mathbf{A}_d^t \mathbf{x}_o \quad (10.115)$$

Por simplicidad, supondremos que  $\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tiene  $n$  autovalores distintos  $\eta_\ell$ , con  $n$  autovectores linealmente independientes  $\mathbf{v}_\ell$ , entonces siempre existe un conjunto de  $n$  constantes  $\alpha_\ell$  tales que:

$$\mathbf{x}_o = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \mathbf{v}_\ell ; \quad \alpha_\ell \in \mathbb{C} \quad (10.116)$$

Del álgebra lineal (Apéndice F) sabemos que los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}_d^t$  son  $\eta_\ell^t$ , para  $t \in \mathbb{N}$ , con sus correspondientes autovectores  $\mathbf{v}_\ell$ . De esta forma, se obtiene:

$$\mathbf{x}[t] = \mathbf{A}_d^t \mathbf{x}_o = \mathbf{A}_d^t \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \mathbf{v}_\ell = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \underbrace{\mathbf{A}_d^t \mathbf{v}_\ell}_{\eta_\ell^t \mathbf{v}_\ell} = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \eta_\ell^t \mathbf{v}_\ell \quad (10.117)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que la componente no forzada del estado es una combinación lineal de modos de la forma  $\{\eta_\ell^t\}$ , cada uno está asociado con un autovalor de  $\mathbf{A}_d$ . Esto establece un resultado muy importante:

Los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}_d$  incluyen las frecuencias naturales del sistema de tiempo discreto. Además, los autovalores de  $\mathbf{A}_d$  que son iguales a cero corresponden a retardos en la excitación. El conjunto de ambos es igual al conjunto de raíces de la ecuación:

$$\det(\eta \mathbf{I} - \mathbf{A}_d) = 0 \quad (10.118)$$

Análogamente al caso de los modelos de tiempo continuo, el resultado precedente indica que la matriz  $\mathbf{A}_d$  determina:

- la estructura de la respuesta no forzada,
- la estabilidad (o inestabilidad) del sistema, y
- la velocidad de la respuesta.

El análisis previo puede extenderse al caso en que la matriz  $\mathbf{A}_d$  posee valores propios repetidos, utilizando la forma de Jordan (Apéndice F).

En ausencia de entrada, el estado del sistema evoluciona como una combinación de sus modos naturales, los cuales pertenecen a una clase definida de funciones (Sección §4.3.1). Estas funciones se expresan como potencias de los autovalores reales o complejos, tal como se aprecia en la ecuación (10.117), y están relacionadas con constantes, exponenciales reales, sinusoides puras o moduladas por exponenciales, y otras funciones especiales que aparecen cuando hay autovalores repetidos.

**Ejemplo 10.9.** *Para ilustrar estas ideas consideremos un sistema de tiempo discreto, para el cual las matrices de la representación de estado son:*

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0,8913 & 0,5525 \\ -0,1768 & 0,2283 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0,3397 \\ 0,5525 \end{bmatrix} \quad (10.119)$$

*Los autovalores del sistema son las soluciones de la ecuación:*

$$\det(\eta\mathbf{I} - \mathbf{A}_d) = \det \left( \begin{bmatrix} \eta - 0,8913 & -0,5525 \\ 0,1768 & \eta - 0,2283 \end{bmatrix} \right) \quad (10.120)$$

$$= (\eta - 0,6703)(\eta - 0,4493) = 0 \quad (10.121)$$

*Es decir,  $\eta_1 = 0,6703$  y  $\eta_2 = 0,4493$ . Por lo tanto, la respuesta no forzada tiene la forma:*

$$\mathbf{x}_u[t] = C_1(0,6702)^t + C_2(0,4493)^t \quad (10.122)$$

*donde  $C_1$  y  $C_2$  dependen sólo del estado inicial.*

*Podemos apreciar que cuando  $t$  tiende a infinito,  $\mathbf{x}_u[t]$  se hace cero, ya que  $|\eta_{1,2}| < 1$ , es decir, el sistema es estable.*

□□□

### Estructura de la respuesta forzada

Si se considera la ecuación (10.108) con condición inicial cero, el estado sólo exhibe su componente forzada. Además de los modos naturales, esta señal incluye los modos **forzados** o **particulares**, que dependen del tipo de señal de entrada  $u[t]$ . En general, los **modos forzantes** en la entrada también aparecerán en la salida del sistema, excepto en el caso que alguna de ellos coincida con algún modo natural del sistema, en cuyo caso aparece el modo natural y, además, el modo natural multiplicado por potencias de  $t$ .

### Estabilidad

La estabilidad de un sistema lineal, de tiempo discreto e invariante en el tiempo también puede ser analizada a través de la matriz  $\mathbf{A}_d$ . Ya hemos establecido que todas las variables del sistema se pueden expresar como funciones lineales del estado y la entrada. Cuando la entrada  $\mathbf{u}[t]$  es un vector acotado en el tiempo, entonces las variables del sistema permanecerán acotadas si y sólo si el estado está acotado. Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Teorema 10.2.** *Considere un sistema descrito en variables de estado por las ecuaciones (10.106)-(10.107). Entonces, el estado del sistema estará acotado para toda entrada acotada si y sólo si los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}_d$  se encuentran en el interior del círculo o disco unitario, es decir,  $|\eta_\ell| < 1 ; \forall \ell$ .*

□□□

### Velocidad de respuesta y resonancia

Recordemos que los modos naturales de un sistema de tiempo discreto son las potencias de los autovalores  $\eta_\ell$ . Estos autovalores siempre pueden expresarse como un número complejo en su forma exponencial, por lo tanto, un modo natural puede escribirse como:

$$(\eta_\ell)^t = (|\eta_\ell| e^{j\theta_\ell})^t = |\eta_\ell|^t e^{j\theta_\ell t} \quad ; \text{donde } \theta_\ell = \angle \eta_\ell \quad (10.123)$$

Por lo tanto, tenemos que:

- La magnitud  $0 < |\eta_\ell| < \infty$  determina la *velocidad* con la que el modo decae a cero, en el caso de sistemas estables ( $|\eta_\ell| < 1$ ), o crece hasta infinito, para sistema inestables ( $|\eta_\ell| > 1$ ).
- El ángulo  $-\pi < \theta_\ell \leq \pi$  determina la *frecuencia discreta* de oscilación del modo natural, medida en radianes.

Los modos naturales de un sistema estable decaen a cero, y determinan la respuesta transiente del sistema. Para su análisis podemos estudiar la *respuesta a escalón* del sistema con condiciones iniciales cero.

**Ejemplo 10.10.** *Consideremos el sistema discreto de primer orden:*

$$x[t+1] = \eta x[t] + u[t] \quad (10.124)$$

$$y[t] = (1 - \eta)x[t] \quad (10.125)$$

*La respuesta a escalón de este sistema estará formada por una componente homogénea y una componente particular (Sección § 4.3.1 en la página 63):*

$$y[t] = y_h[t] + y_p[t] \quad (10.126)$$

en que:



- la parte homogénea está formada por el único modo natural, es decir:

$$y_h[t] = C\eta^t \quad (10.127)$$

- dado que la entrada es un escalón, la componente particular de la salida ( $y$ , por ende, del estado) es una constante a determinar reemplazando en el modelo de estado:

$$\left. \begin{aligned} x_p[t+1] &= \eta x_p[t] + 1 \\ y_p[t] &= (1-\eta)x_p[t] \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_p[t] = 1 \quad (10.128)$$

Finalmente, la condición inicial igual a cero implica que:

$$y[t] = 1 - \eta^t \quad (10.129)$$

La Figura 10.7 muestra esta señal para diferentes valores del único autovalor  $\eta$ . En ella podemos apreciar que el transiente está dado por  $y_h[t] = -\eta^t$ , mientras que la respuesta estacionaria es  $y_p[t] = 1$ .

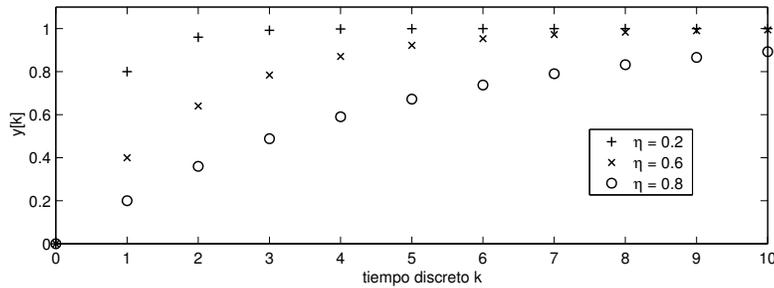


Figura 10.7: Respuesta a escalón del sistema para diferentes valores de  $\eta$ .

□□□

En la ecuación (10.123) apreciamos que los autovalores de un sistema determinan la amortiguación de su respuesta transiente, sin embargo, también determinan su frecuencia de oscilación (cuando los autovalores tienen parte imaginaria no nula). El problema que puede surgir cuando existen estos modos resonantes es análogo al caso de tiempo continuo cuando la entrada del sistema contiene una senoide u otra señal con energía en la banda de frecuencias cercana a la frecuencia de oscilación natural del sistema. A pesar que la salida del sistema permanece acotada, ella puede alcanzar amplitudes intolerables para el sistema físico real.

**Ejemplo 10.11.** Consideremos el sistema discreto por:

$$\mathbf{x}[t+1] = \begin{bmatrix} 1,2796 & -0,81873 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}[t] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u[t] \quad (10.130)$$

$$y[t] = [0 \quad 0,5391] \mathbf{x}[t] \quad (10.131)$$

Los autovalores del sistema se obtienen a partir de  $\mathbf{A}_d$ :

$$\eta_{1,2} = 0,6398 \pm j0,6398 = 0,9048 e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (10.132)$$

Los modos naturales asociados, presentes en la respuesta transiente, son:

$$\eta_{1,2}^t = 0,9048^t e^{j\frac{\pi}{4}t} = 0,9048^t (\cos(\frac{\pi}{4}t) \pm j \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}t)) \quad (10.133)$$

Los modos naturales están ligeramente amortiguados, ya que  $|\eta_{1,2}|$  es cercano a 1, y muestra una oscilación de frecuencia  $\frac{\pi}{4}$ .

En los gráficos de la Figura 10.8 se muestra el efecto de resonancia en la salida del sistema. En la parte superior, se ha considerado  $u[t] = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}t)$ , es decir, la entrada tiene la misma frecuencia que los modos naturales. En la parte inferior, en tanto, la entrada es una señal cuadrada de frecuencia  $\frac{\pi}{12}$ . En este último caso, la frecuencia de la **tercera armónica** de la entrada coincide con la de los modos naturales.

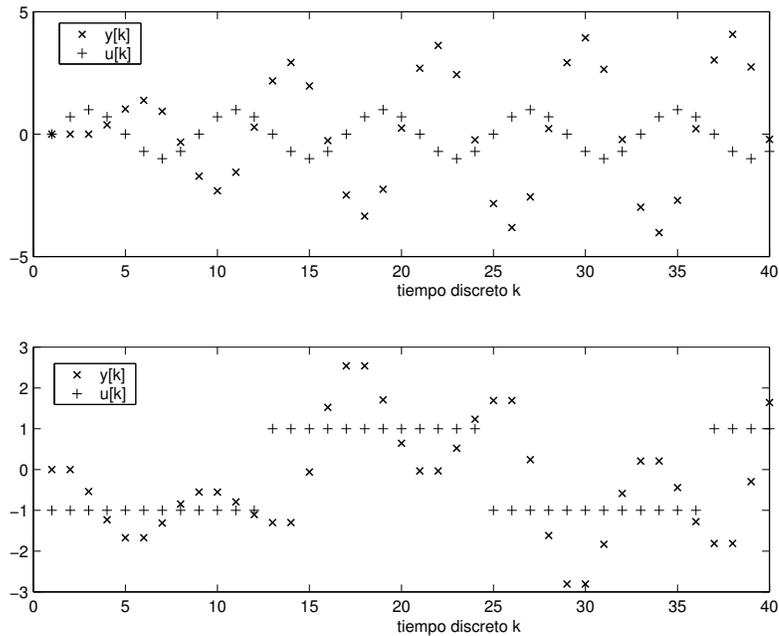


Figura 10.8: Resonancia en la salida del sistema, para dos excitaciones diferentes.

□□□

### 10.4.3. Transformaciones de similitud

Las diferentes elecciones del vector de estado para sistemas discretos se relacionan de la misma manera que para sistemas de tiempo continuo, es decir, a

través de las transformaciones de similaridad (Sección §10.3.3). De igual forma que en aquel caso, muchas de las propiedades del sistema, como la ubicación de las frecuencias naturales o autovalores, también permanecen invariantes ante este tipo de transformaciones.

#### 10.4.4. Espacio de estado y funciones de transferencia

Para los sistemas de tiempo discreto la relación entre los modelos en variables de estado y aquellos mediante funciones de transferencia es análoga al caso de tiempo continuo (Sección §10.3.4). Como hemos mencionado, el modelo en variables de estado de un sistema lineal e invariante en el tiempo es una descripción alternativa a la función de transferencia, y a menudo entrega mayor información sobre el sistema.

Si se aplica transformada Zeta al modelo en variables de estado de tiempo discreto (10.106)-(10.107), con condiciones iniciales cero, tenemos:

$$\mathbf{X}[z] = (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_dU[z] \quad (10.134)$$

$$Y[z] = \mathbf{C}_d\mathbf{X}[z] + \mathbf{D}_dU[z] \quad (10.135)$$

que se reduce a  $Y[z] = \mathbf{H}[z]U[z]$ , en que:

$$H[z] = \mathbf{C}_d(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d \quad (10.136)$$

Una observación de interés es que en sistemas de una entrada y una salida,  $\mathbf{D}_d$  es un escalar. Por lo tanto,  $H[z]$  es estrictamente propia, si y sólo si  $\mathbf{D}_d$  es cero.

La inversa  $(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}$  puede reescribirse en términos de su adjunta y su determinante (ver Apéndice F):

$$H[z] = \frac{\mathbf{C}_d \operatorname{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)\mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)} \quad (10.137)$$

Podemos observar que los polos de la función de transferencia pertenecen al conjunto de autovalores de la matriz  $\mathbf{A}_d$ . Sin embargo, de forma similar a como se aprecia en el Ejemplo 10.7 en la página 276, puede suceder que algunos de los autovalores de  $\mathbf{A}_d$  no aparezcan como polos de la función de transferencia. Esto implica la existencia de cancelaciones entre polos y ceros de la función de transferencia (ver Secciones §10.6.1 y §10.6.2, más adelante).

El resultado central para sistemas de tiempo discreto es el mismo que para el caso de sistemas de tiempo continuo : la función de transferencia en algunos casos entrega *menos información* sobre el sistema que su modelo en variables de estado, pues representa la relación sólo entre la entrada y la salida.

Para obtener un modelo en variables de estado *a partir de la función de transferencia* de un sistema discreto, podemos usar un procedimiento análogo al caso de tiempo continuos en la Sección §10.3.4. Proponemos al lector que verifique el procedimiento en el Problema 10.7.

Para sistemas de tiempo discreto también tenemos que **la función de transferencia del sistema es invariante respecto a transformaciones de similitud.**

## 10.5. Modelos de estado para sistemas interconectados

Para construir modelos en espacio de estados de sistemas complejos, éstos pueden ser a menudo descritos como la interconexión de sistemas más simples. Esta interconexión es usualmente la combinación de tres tipos básicos de estructuras: conexión en serie, en paralelo y en realimentación. En cada uno de estos casos nos interesa obtener un modelo en variables de estado del sistema completo resultante.

Para el análisis que sigue consideramos dos sistemas, definidos mediante su modelo en variables de estado:

$$\text{Sistema 1: } \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1 u_1(t) \\ y_1(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_1 u_1(t) \end{cases} \quad (10.138)$$

$$\text{Sistema 2: } \begin{cases} \frac{dx_2(t)}{dt} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2 u_2(t) \\ y_2(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{D}_2 u_2(t) \end{cases} \quad (10.139)$$

### Conexión en serie

La interconexión de sistemas que se muestra en la Figura 10.9 se denomina conexión en serie o en cascada. Para obtener el modelo de estado deseado, observamos que  $y_2(t) = u_1(t)$ . Además, el sistema completo tiene como entrada  $u(t) = u_2(t)$ , y como salida  $y(t) = y_1(t)$ . Con esto se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (10.140)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 u(t) \quad (10.141)$$

### Conexión en paralelo

La interconexión de sistemas que se muestra en la Figura 10.10 se denomina conexión en paralelo. Para obtener el modelo de estado deseado, observamos que la entrada es  $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$  y que la salida para el sistema se expresa

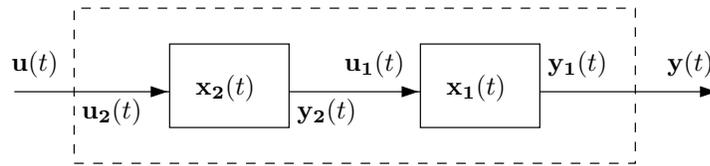


Figura 10.9: Conexión de sistemas en serie

como  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ . De esta forma, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (10.142)$$

$$y(t) = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2] u(t) \quad (10.143)$$

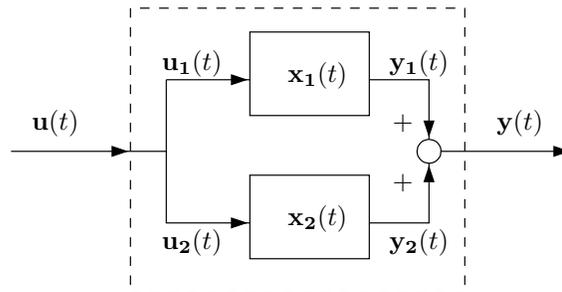


Figura 10.10: Conexión de sistemas en paralelo

### Conexión en realimentación

La interconexión de sistemas que se muestra en la Figura 10.11 se denomina conexión en realimentación o *feedback* (con realimentación negativa unitaria), y aparece normalmente asociada a la estructura básica del lazo de control realimentado, donde  $S_1$  es el sistema a controlar y  $S_2$  es el controlador. Para obtener el modelo en variables de estado del sistema en su conjunto, podemos apreciar que la entrada al sistema completo satisface la ecuación  $u(t) = u_2(t) + y_1(t)$ , y que la salida del sistema es  $y(t) = y_1(t)$ . Si suponemos además que el sistema

$S_1$  (la planta) es estrictamente propia, es decir,  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ , se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (10.144)$$

$$y(t) = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.145)$$

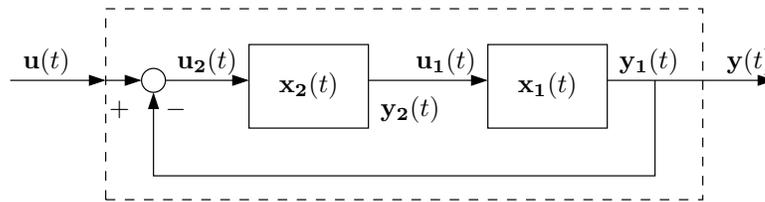


Figura 10.11: Conexión de sistemas en realimentación (*feedback*)

El lector puede verificar que los resultados anteriores también son válidos para la interconexión de modelos de estado para sistemas de tiempo discreto interconectados.

## 10.6. Propiedades de los sistemas

El modelo de estado de un sistema puede entregar más información que su función de transferencia. Por ejemplo, puede ocurrir que no todos los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  aparezcan como polos en la función de transferencia del sistema. En esta sección estudiamos otras propiedades que pueden ser analizadas a través del modelo de estado de un sistema.

### 10.6.1. Controlabilidad, Alcanzabilidad y Estabilizabilidad

Si consideramos el problema de controlar un sistema o proceso, una pregunta fundamental es *bajo qué condiciones es posible llevar el vector de estado a un punto específico del espacio de estado*, manipulando las señales de entrada. Debemos recordar que el estado de un sistema a menudo está formado por sus variables internas, tales como temperatura, presión, o el nivel de líquido en algún estanque. En una aplicación real, interesa mantener esas variables en una región determinada.

#### Controlabilidad

El concepto de controlabilidad se refiere a determinar si, a partir de una condición inicial  $\mathbf{x}_0$ , es posible llevar el vector de estado al origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  en un tiempo finito, usando la entrada  $u(t)$ .

**Ejemplo 10.12.** Si observamos el modelo definido en (10.146), podemos apreciar que la entrada  $u(t)$  no tiene efecto alguno sobre el estado  $x_2(t)$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (10.146)$$

Dado un estado inicial  $[x_1(0), x_2(0)]^T$ , la entrada  $u(t)$  puede ser elegida para llevar  $x_1(t)$  a cero, mientras que  $x_2(t)$  no sufre ningún cambio. Diremos que este sistema no es completamente controlable.

□□□

Formalmente, tenemos la siguiente definición:

**Definición 10.1.** Un estado  $\mathbf{x}_o$  se dice **controlable** si existe un intervalo de tiempo finito  $[0, T]$  y una entrada  $\{u(t), t \in [0, T]\}$  tal que  $\mathbf{x}(T) = 0$ . Si todos los estados son controlables, entonces se dice que el sistema es **completamente controlable**.

### Alcanzabilidad

Un concepto relacionado con la controlabilidad es la **alcanzabilidad**, usado en general para sistemas de tiempo discreto. Formalmente se define como:

**Definición 10.2.** Un estado  $\bar{\mathbf{x}} \neq 0$  se dice **alcanzable** desde el origen, si dado  $\mathbf{x}(0) = 0$ , existe un intervalo de tiempo finito  $[0, T]$  y una entrada  $\{u(t), t \in [0, T]\}$  tal que  $\mathbf{x}(T) = \bar{\mathbf{x}}$ . Si todos los estados del sistema son alcanzables se dice que el sistema es **completamente alcanzable**.

Para sistemas de tiempo continuo, lineales e invariantes, controlabilidad y alcanzabilidad son **equivalentes**. Sin embargo, el ejemplo siguiente ilustra una diferencia entre estas propiedades para sistemas de tiempo discreto.

**Ejemplo 10.13.** Considere el sistema y la salida:

$$\mathbf{x}[t+1] = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix} \mathbf{x}[t] \Rightarrow \mathbf{x}[t] = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix}^t \mathbf{x}[0] \quad (10.147)$$

Podemos apreciar que el sistema es completamente controlable, pues  $\mathbf{x}[t] = 0$ ,  $\forall t \geq 2$  y  $\forall \mathbf{x}[0] \in \mathbb{R}^2$ , pues la matriz de estado es nilpotente, es decir,  $\mathbf{A}_d^2 = \mathbf{0}$ . Esto implica que cualquier estado inicial es controlable. Sin embargo, ningún estado diferente de cero es alcanzable desde el origen, ya que si  $\mathbf{x}[0] = 0$ , entonces  $\mathbf{x}[t] = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}$ .

□□□

Debido a esta distinción entre controlabilidad y alcanzabilidad para sistemas discretos, en adelante usaremos el término *controlabilidad* para referirnos al más fuerte de ambos conceptos. Sin embargo, en el contexto de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, por lo general se habla indistintamente de controlabilidad y alcanzabilidad.

### Test de controlabilidad

No siempre es posible determinar *a priori* si un sistema es o no controlable. El siguiente resultado [24] presenta una forma sistemática para determinar la completa controlabilidad de un sistema<sup>4</sup>.

**Teorema 10.3.** *Considere el modelo de estado lineal e invariante en el tiempo, donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10.148)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.149)$$

(i) *El conjunto de todos los estados controlables es el **espacio rango** de la matriz de controlabilidad  $\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  donde:*

$$\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \triangleq [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (10.150)$$

(ii) *El modelo es completamente controlable si y sólo si  $\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  tiene **rango completo**.*

□□□

**Ejemplo 10.14.** *Considere el modelo en variables de estado dado por (10.146), con matrices de estado:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.151)$$

*La matriz de controlabilidad del sistema es:*

$$\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.152)$$

*Claramente, el rango  $\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ , es igual a 1, por lo tanto el sistema **no** es completamente controlable.*

□□□

Este *test* puede ser aplicado indistintamente para analizar la controlabilidad de sistemas de tiempo continuo y la alcanzabilidad de sistemas de tiempo discreto. La controlabilidad de un sistema es otra de las propiedades que no depende de la elección de las variables de estado, tal como establece el siguiente resultado.

**Teorema 10.4.** *El par  $(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$  obtenido mediante una transformación de similitud, dado por una matriz no singular  $\mathbf{T}$ , es completamente controlable si y sólo si el par original  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  es completamente controlable.*

**Demostración**

<sup>4</sup>Los conceptos relacionados con matrices se revisan en el Apéndice F

Consideremos una transformación de similaridad  $\mathbf{T}$  (Sección §10.3.3). Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}}^n &= (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\dots(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) \\ &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})\dots(\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{T}\end{aligned}\quad (10.153)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\quad (10.154)$$

Por lo tanto, reemplazando en la matriz de controlabilidad (10.150), tenemos que:

$$\Gamma_c[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}] = \mathbf{T}^{-1}\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\quad (10.155)$$

Esto implica que las matrices  $\Gamma_c[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}]$  y  $\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  tienen el mismo rango, pues  $\mathbf{T}$  es no singular.  $\square\square$

El lector puede verificar que los modelos en variables de estado usados para describir señales en la Sección §10.2.3 son no controlables. De hecho, cualquier modelo de estado en que  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  resulta ser no controlable.

### Pérdida de controlabilidad

La falta de controlabilidad en un sistema se revela en que la función de transferencia tiene un número de polos menor que el número de autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  (o  $\mathbf{A}_d$ ). El defecto de controlabilidad en ocasiones puede originarse en la estructura misma del sistema, sin embargo, en otras ocasiones depende del valor numérico de ciertos parámetros. Esto se ilustra en el Problema 10.10 que sugerimos al lector desarrollar en detalle.

### Gramiano de controlabilidad

El test de controlabilidad en el Teorema 10.3 determina si un sistema es completamente controlable o no. Sin embargo, es posible determinar el *grado* de controlabilidad que un sistema posee, considerando la energía de la señal de entrada necesaria para llevar el estado al origen. Para sistemas estables, la energía involucrada en la señal de entrada  $u(t)$  aplicada desde  $t = -\infty$  para alcanzar el estado  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  en  $t = 0$  se puede medir mediante el funcional:

$$J(u) = \int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt\quad (10.156)$$

La *energía de control* mínima necesaria es [1]:

$$J(\mathbf{u}_{\text{opt}}) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 \geq 0\quad (10.157)$$

donde

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt\quad (10.158)$$

La matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$  se denomina **gramiano de controlabilidad**, y es una medida de la controlabilidad del sistema. La existencia de la integral está garantizada por la estabilidad del sistema. El gramiano de controlabilidad satisface la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0 \quad (10.159)$$

Sugerimos al lector desarrollar el Problema 10.11.

Para sistemas de tiempo discreto, el gramiano de controlabilidad se define como:

$$\mathbf{P}_d = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{A}_d^t \mathbf{B}_d \mathbf{B}_d^T (\mathbf{A}_d^T)^t \quad (10.160)$$

que satisface la ecuación de Lyapunov

$$\mathbf{A}_d \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d^T - \mathbf{P}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{B}_d^T = 0 \quad (10.161)$$

La suma definida en (10.160) converge si y sólo si el sistema de tiempo discreto es estable, es decir, si los autovalores de  $\mathbf{A}_d$  están dentro del disco unitario.

El concepto de gramiano ha sido extendido, para sistemas en tiempo continuo y discreto, para incluir también el caso de sistemas inestables [47].

### Descomposición canónica y estabilizabilidad

En el caso que un sistema no sea completamente controlable, su representación de estado puede **descomponerse** en un subsistema completamente controlable y otro completamente incontrolable, tal como establece el siguiente lema.

**Lema 10.6.** *Considere un sistema para el cual  $\text{rango}\{\Gamma_c[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\} = k < n$ , entonces existe una transformación de similaridad  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ , en que las nuevas matrices de estado tienen la forma:*

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{nc} \end{bmatrix} \quad (10.162)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.163)$$

donde  $\bar{\mathbf{A}}_c$  tiene dimensión  $k$  y el par  $(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c)$  es completamente controlable.

□□□

Este resultado establece cuáles estados pueden y cuáles no pueden ser llevados a cero. Para apreciar mejor este hecho, expresemos el estado y la salida de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u \quad (10.164)$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_c & \bar{\mathbf{C}}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{nc} \end{bmatrix} + \mathbf{D}u \quad (10.165)$$

El **subespacio controlable** del modelo en variables de estado está compuesto por todos los estados generados como combinación lineal de los estados controlables, es decir, de los estados en  $\bar{\mathbf{x}}_c$ . La estabilidad de este subespacio está determinada por la ubicación de los autovalores de la matriz  $\bar{\mathbf{A}}_c$ .

Por otra parte, el **subespacio no controlable** está formado por todos los estados generados como combinación lineal de los estados en  $\bar{\mathbf{x}}_{nc}$ , y su estabilidad queda determinada por los autovalores de la matriz  $\bar{\mathbf{A}}_{nc}$ .

De esta forma, la entrada no tiene efecto alguno sobre el subespacio no controlable, por lo que podríamos esperar que este subespacio fuera al menos estable, de manera que sus estados decaigan naturalmente al origen. En este caso el modelo en variables de estado se denomina **estabilizable**.

Una consecuencia clave de la descripción dada por (10.164)-(10.165) es el hecho que la función de transferencia queda dada por:

$$H(s) = \bar{\mathbf{C}}_c(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1}\bar{\mathbf{B}}_c + \mathbf{D} \quad (10.166)$$

La ecuación (10.166) dice que los autovalores del subespacio no controlable no aparecen como polos de la función de transferencia. Esto implica que existe una cancelación de los polos correspondientes a las raíces de  $\det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{nc})$ .

### Forma canónica controlable

**Lema 10.7.** *Considere un modelo de estado completamente controlable para un sistema SISO. Entonces, existe una transformación de similaridad tal que el modelo de estado se puede expresar en la **forma canónica controlable**:*

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.167)$$

donde:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (10.168)$$

es el polinomio característico de  $\mathbf{A}$ .

□□□

**Lema 10.8.** *Considere un modelo de estado completamente controlable para un sistema SISO. Entonces, existe una transformación de similaridad que convierte*

el modelo de estado en la **forma canónica del controlador**:

$$\mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.169)$$

donde:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (10.170)$$

es el polinomio característico de  $\mathbf{A}$ .

□□□

## 10.6.2. Observabilidad, Reconstructibilidad y Detectabilidad

Si consideramos el modelo de estado de un sistema dado, es razonable suponer que si se observa su salida durante un intervalo de tiempo, entonces podríamos obtener información sobre su estado. La propiedad asociada a este concepto se denomina **observabilidad**.

### Observabilidad

La observabilidad de un sistema se refiere a si es posible conocer su estado a partir de mediciones de su salida.

**Ejemplo 10.15.** Si consideramos el sistema definido por el modelo en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (10.171)$$

Podemos apreciar que  $y(t)$  queda determinada por  $x_1(t)$ , mientras que la otra variable de estado  $x_2(t)$  no tiene influencia alguna sobre la salida. Por tanto el sistema no es completamente observable, es decir, existe una parte del estado de la cual nunca se obtendrá información alguna, a partir de la medición de la salida  $y(t)$ .

□□□

Se puede formalizar la definición de observabilidad de la siguiente forma:

**Definición 10.3.** El estado  $\mathbf{x}_0 \neq 0$  se dice **no observable** si dado  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , y  $u(t) = 0$  para  $t \geq 0$ , entonces  $y(t) = 0$  para  $t \geq 0$ , es decir, la condición inicial  $\mathbf{x}_0$  no tiene efecto alguno sobre la salida del sistema.

El sistema se dice **completamente observable** si no existe estado inicial, diferente de cero, que sea no observable.

### Reconstructibilidad

Otro concepto estrechamente relacionado al de observabilidad, es el que se denomina **reconstructibilidad**. Este, para sistemas de tiempo discreto, se refiere a qué se puede decir de  $\mathbf{x}[k_r]$ , habiendo observado valores pasados de la salida  $y[t]$ , durante  $0 \leq t \leq k_r$ .

Para sistemas de tiempo continuo, lineales e invariantes, no es necesario hacer distinción entre observabilidad y reconstructibilidad. Sin embargo, el siguiente ejemplo ilustra que estos conceptos son diferentes para sistemas de tiempo discreto.

**Ejemplo 10.16.** *Considere el modelo en espacio de estado:*

$$\mathbf{x}[t+1] = 0 \quad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_o \quad (10.172)$$

$$y[t] = 0 \quad (10.173)$$

*Este sistema es claramente reconstruible para todo  $k_r \geq 1$ , ya que sabemos que  $\mathbf{x}[k_r] = 0$  para  $k_r \geq 1$ . Sin embargo, es no observable pues  $y[t] = 0, \forall t$  sin importar  $\mathbf{x}_o$ .*

Dada la diferencia entre los conceptos de observabilidad y reconstructibilidad, en adelante usaremos el término *observabilidad* para referirnos al más fuerte de ambos conceptos.

### Test de observabilidad

Para contar con un criterio que permita determinar si un sistema es o no observable, se presenta a continuación el siguiente teorema.

**Teorema 10.5.** *Considere el sistema en variables de estado, continuo, lineal e invariante en el tiempo:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10.174)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.175)$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

(i) *El conjunto de estados no observables es igual al **subespacio nulo** de la matriz de observabilidad  $\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  donde:*

$$\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}] \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (10.176)$$

(ii) *El sistema es completamente observable si y sólo si  $\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  tiene **rango completo**.*

□□□

Este test de observabilidad puede aplicarse indistintamente a sistemas de tiempo discreto y continuo.

**Ejemplo 10.17.** *Considere el modelo en espacios de estado dado por:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad -1] \quad (10.177)$$

*La matriz de observabilidad está dada por:*

$$\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad (10.178)$$

*Entonces el rango de  $\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  es igual a 2, lo que dice que el sistema es completamente observable.*

□□□

**Ejemplo 10.18.** *Si observamos el modelo definido en (10.171), tenemos:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad (10.179)$$

*La matriz de observabilidad es:*

$$\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.180)$$

*El rango de  $\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  es igual a 1 y, por lo tanto, el sistema no es completamente observable.*

□□□

La observabilidad de un sistema es una propiedad que no depende de la elección de las variables de estado. Análogamente al Teorema 10.4, el rango de la matriz de observabilidad 10.176 en la página anterior es invariante respecto a transformaciones de similaridad.

### Pérdida de observabilidad

La falta de observabilidad en un sistema se revela en que la función de transferencia tiene un número de polos menor que el número de autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  (o  $\mathbf{A}_d$ ). La observabilidad de un sistema queda determinada básicamente por características propias de su estructura. Sin embargo, también es posible que la observabilidad de un modelo se vea afectada por valores numéricos particulares en algunos de sus parámetros, de manera análoga a lo que sucede con la controlabilidad, tal como se analizó en la Sección §10.6.1. Sugerimos al lector desarrollar el Problema 10.13.

### Gramiano de observabilidad

El test de observabilidad en el Teorema 10.5 en la página 295 permite determinar si un sistema es completamente observable. Para *sistemas estables* es posible determinar el *grado* de observabilidad de un sistema dado cuantificando la energía en la salida  $y(t)$  debida al estado inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , en ausencia de señal de entrada, es decir,  $u(t) = \mathbf{0}$ . La energía en la salida del sistema está dada por [1]:

$$E(\mathbf{x}_0) = \int_0^{\infty} \|y(t)\|^2 dt = \mathbf{x}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_0 \quad (10.181)$$

donde

$$\mathbf{Q} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (10.182)$$

La matriz  $\mathbf{Q}$  se denomina **gramiano de observabilidad**, y cuantifica la observabilidad del vector de estado  $\mathbf{x}_0$ . La existencia de la integral está garantizada pues el sistema es estable. Además, el gramiano de observabilidad  $\mathbf{Q}$  definido en (10.182) satisface la ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0 \quad (10.183)$$

Para sistemas estables de tiempo discreto, el gramiano de observabilidad queda definido por:

$$\mathbf{Q}_d = \sum_{t=0}^{\infty} (\mathbf{A}_d^T)^t \mathbf{C}_d^T \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^t \quad (10.184)$$

La existencia de la suma es consecuencia de la estabilidad del sistema, pues los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}_d$  tienen magnitud menor que 1. El gramiano de observabilidad discreto satisface la ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}_d^T \mathbf{Q}_d \mathbf{A}_d - \mathbf{Q}_d + \mathbf{C}_d^T \mathbf{C}_d = 0 \quad (10.185)$$

### Principio de Dualidad

Podemos notar un paralelo notable entre los resultados del Teorema 10.3 en la página 290 y del Teorema 10.5 en la página 295, y también entre las definiciones de los gramianos (10.158) y (10.182). Estas observaciones conducen al **principio de dualidad**, el cual se formaliza a continuación:

**Teorema 10.6** (Dualidad). *Considere el modelo en variables de estado descrito por la 4-tupla  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . Entonces el sistema es completamente controlable si y solo si el sistema dual  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{D}^T)$  es completamente observable.*

□□□

Note que  $\mathbf{D}$  no juega ningún papel en la controlabilidad ni en la observabilidad del sistema.

### Descomposición canónica y detectabilidad

El principio de dualidad anterior permite obtener resultados relacionados con observabilidad, aplicando resultados sobre controlabilidad al sistema dual, o bien, vice-versa.

El siguiente resultado es el *dual* del Lema 10.6 en la página 292.

**Lema 10.9.** Si  $\text{rango}\{\Gamma_o[\mathbf{A}, \mathbf{C}]\} = k < n$ , existe una transformación de similitud  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ , tal que las nuevas matrices de estado tienen la forma:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_o & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{no} \end{bmatrix} \quad (10.186)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T} = [\bar{\mathbf{C}}_o \quad 0] \quad (10.187)$$

donde  $\bar{\mathbf{A}}_o$  tiene dimensión  $k$  y el par  $(\bar{\mathbf{C}}_o, \bar{\mathbf{A}}_o)$  es completamente observable.

□□□

Este resultado tiene una relevancia similar a la descomposición canónica asociada para el caso de la controlabilidad. Para apreciar esto, aplicamos el *dual* del Lema 10.6 en la página 292 para expresar el estado (transformado) y las ecuaciones de salida en la forma particionada que se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_o(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{no}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_o & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_{no}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_o \\ \bar{\mathbf{B}}_{no} \end{bmatrix} u(t) \quad (10.188)$$

$$y(t) = [\bar{\mathbf{C}}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o(t) \\ \bar{\mathbf{x}}_{no}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}u(t) \quad (10.189)$$

La descripción anterior pone en evidencia el problema que puede surgir cuando se intenta controlar un sistema usando sólo su salida, pues en esta no aparece información alguna sobre  $\bar{\mathbf{x}}_{no}$ .

El **subespacio observable** de un modelo es el espacio formado por todos los estados que se generan como combinaciones lineales de los estados en  $\bar{\mathbf{x}}_o$ . La estabilidad de este subespacio queda determinada por la ubicación de los autovalores de la matriz  $\bar{\mathbf{A}}_o$ .

El **subespacio no observable** de un modelo, es el espacio formado por todos los estados generados como combinación lineal de los estados en  $\bar{\mathbf{x}}_{no}$ . La estabilidad de este subespacio queda determinada por los autovalores de la matriz  $\bar{\mathbf{A}}_{no}$ . Si el subespacio no observable es estable, decimos que el sistema es **detectable**.

Podemos apreciar una propiedad clave de la descripción (10.188)–(10.189), ya que la función de transferencia del sistema queda expresada como:

$$H(s) = \bar{\mathbf{C}}_o(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_o)^{-1}\bar{\mathbf{B}}_o + \mathbf{D} \quad (10.190)$$

La ecuación (10.190) revela que los autovalores del subespacio no observable no pertenecen al conjunto de polos de la función de transferencia del sistema. Esto implica que existe una cancelación de todos los polos correspondientes a las raíces de  $\det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{no})$ .

### Forma canónica observable

Es posible obtener las formas canónicas duales a las presentadas en los Lemas 10.7 y 10.8. Presentamos a continuación solo uno de los resultados *duales*.

**Lema 10.10.** *Considere un sistema escalar o SISO, completamente observable. Entonces existe una transformación de similaridad tal que lleva al modelo a la forma canónica observable:*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (10.191)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] x(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.192)$$

□□□

### 10.6.3. Descomposición Canónica

En la sección anterior vimos que el espacio de estado de un sistema no completamente controlable puede separarse en un subespacio controlable y uno no controlable (Lemas 10.6). Análogamente, el resultado *dual* establece que el espacio de estado de un sistema no completamente observable puede separarse en un subespacio observable y uno no observable (Lemas 10.9). El siguiente resultado combina ambos resultados.

**Teorema 10.7** (Descomposición Canónica). *Considere un sistema descrito por un modelo en espacios de estado. Entonces, siempre existe una transformación de similaridad  $\mathbf{T}$  tal que el modelo transformado, con su nuevo vector de estado  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$  toma la forma:*

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{34} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{C}} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \ \mathbf{0} \ \bar{\mathbf{C}}_2 \ \mathbf{0}] \quad (10.193)$$

(i) *El subsistema  $[\bar{\mathbf{A}}_{co}, \bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{C}}_1]$  es completamente controlable y completamente observable, y tiene la misma función de transferencia que el sistema original (ver Lema 10.11 en la página siguiente).*

(ii) *El subsistema:*

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}, [\bar{\mathbf{C}}_1 \ \mathbf{0}] \quad (10.194)$$

*es completamente controlable.*

(iii) El subsistema:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \bar{\mathbf{A}}_{13} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \quad (10.195)$$

es completamente observable.

□□□

La Figura 10.12 ilustra la estructura interna de un sistema de acuerdo al teorema anterior. En ella,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_{no}(t)$ ,  $\mathbf{x}_{nc}(t)$  y  $\mathbf{x}_{nc-no}(t)$  representan la parte del estado completamente controlable y observable, no observable, no controlable, y no controlable ni observable, respectivamente.

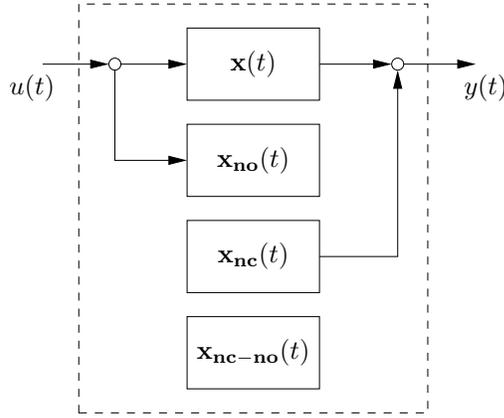


Figura 10.12: Descomposición canónica del modelo de estado.

La descomposición canónica descrita en el Teorema 10.7 tiene una importante consecuencia para la función de transferencia del modelo, ya que ésta sólo modela el subsistema completamente observable y completamente controlable.

**Lema 10.11.** Considere la función de transferencia  $H(s)$  dada por:

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (10.196)$$

Entonces:

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \bar{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{co})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D} \quad (10.197)$$

La 4-tupla  $\{\bar{\mathbf{A}}_{co}, \bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{C}}_1, \mathbf{D}\}$  corresponde a una realización mínima del modelo de estado.

□□□

Además, si denotamos por  $\Lambda\{\mathbf{M}\}$  el conjunto de autovalores de una matriz  $\mathbf{M}$ , entonces:

$$\Lambda\{\bar{\mathbf{A}}\} = \Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{co}\} \cup \Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{22}\} \cup \Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{33}\} \cup \Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{44}\} \quad (10.198)$$

donde:

- $\Lambda\{\bar{\mathbf{A}}\}$  Autovalores del sistema
- $\Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{co}\}$  Autovalores del subsistema controlable y observable
- $\Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{22}\}$  Autovalores del subsistema controlable pero no observable
- $\Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{33}\}$  Autovalores del subsistema no controlable pero observable
- $\Lambda\{\bar{\mathbf{A}}_{44}\}$  Autovalores del subsistema no controlable y no observable

Observamos que la controlabilidad de un sistema dado depende de la estructura de sus entradas, es decir, depende de dónde se aplican y cómo *entran* en el sistema aquellas variables que son manipulables. Por lo tanto, los estados de un subsistema pueden ser no controlables desde una entrada, pero completamente controlables desde otra. Esto tiene consecuencias en el diseño de sistemas de control, pues en un proceso real no todas sus *entradas* pueden ser manipuladas y, en consecuencia, puede que sea imposible llevar las variables de la planta a ciertas ubicaciones del espacio de estado.

Análogamente, la observabilidad de un sistema depende de las salidas que se consideran. Algunos estados pueden ser no observables desde una salida dada, pero puede ser completamente observables desde otra. En el contexto del análisis y diseño de sistemas de control, esto se traduce en que puede ser difícil (imposible) obtener información sobre ciertas variables internas de la planta, a partir de las salidas medidas disponibles.

## 10.7. Observadores

Cuando las variables de estado de un sistema deben ser medidas para monitoreo, control u otros propósitos, existen importantes aspectos tanto técnicos como económicos a considerar. El problema de *observar* el estado de un sistema es una generalización del caso en que se desea medir indirectamente alguna variable del sistema usando un modelo y otras variables más fáciles de medir.

Un observador es un **estimador** de las variables de estado de un sistema a partir de su modelo (de estado) y mediciones de la entrada y la salida del sistema.

### 10.7.1. Dinámica del observador

Supongamos que un sistema tiene un modelo de estado dado por las ecuaciones (10.45)–(10.46) con  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  (sistema estrictamente propio). La ecuación que define la dinámica del observador está dada por:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{J}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \quad (10.199)$$

donde la matriz  $\mathbf{J}$  es la **ganancia del observador**. Este observador tiene como propósito estimar el estado del sistema original usando la entrada y la salida de dicho sistema, así como las matrices de su modelo en espacios de estado.

Una pregunta natural es: si disponemos de un buen modelo del sistema y además conocemos su entrada  $\forall t \geq 0$ , ¿por qué es necesario entonces medir la salida para estimar el estado? ¿no bastaría con *simular* el sistema? La clave aquí es que **no conocemos el estado inicial del sistema**, y por lo tanto no sería posible obtener la trayectoria del estado, sólo conociendo la entrada, aunque el modelo fuese perfecto.

Si consideramos el error de estimación del estado  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ , su dinámica se obtiene restando (10.199) de (10.45). Esto es:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{J}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (10.200)$$

donde observamos que el error de estimación converge a cero si y sólo si todos los autovalores de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{J}\mathbf{C}$  tienen parte real negativa, es decir, si el **polinomio del observador**:

$$E(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C}) \quad (10.201)$$

es estrictamente Hurwitz.

### Discusión

- La ecuación (10.200) es válida sólo si el modelo es una representación exacta del sistema bajo análisis. Errores de modelado tendrán consecuencias sobre el observador, tales como error de estimación que no converge a cero.
- Si el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  es completamente observable, entonces los autovalores de  $\mathbf{A} - \mathbf{J}\mathbf{C}$  pueden situarse arbitrariamente en la región de estabilidad en el plano complejo. Por tanto, la *velocidad de convergencia* de la estimación es parte del diseño del observador. Estos autovalores se conocen como los **polos del observador**.
- Si el par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  es detectable, entonces el observador asegura error cero asintóticamente, a pesar que no todos los autovalores de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{J}\mathbf{C}$  pueden situarse a gusto.
- Si el sistema no es completamente observable, y el subespacio no observable contiene modos inestables, entonces el error de estimación no converge.

**Ejemplo 10.19.** Para ilustrar el uso de un observador consideremos nuevamente el modelo de estado del Ejemplo 10.8. En este caso particular, queremos que los polos del observador se ubiquen en  $s = -4$ ,  $s = -6$  y  $s = -8$ . Entonces la ganancia del observador  $\mathbf{J}$  debe elegirse adecuadamente, por ejemplo, usando MATLAB :



MATLAB

```
>> A=[ 0 1 0; 0 0 1; 4 0 -3];
>> B=[ 0; 0; 1];
>> C=[-10 4 0];
>> J=place(A',C',[-4 -6 -8])
```

$$J = [-4,5247 \quad -7,5617 \quad -4,1543]^T \quad (10.202)$$

Para apreciar la dinámica del observador, supondremos que el estado inicial del sistema es  $\mathbf{x}(0) = [-1 \ 2 \ 1]^T$  y que la entrada del sistema es una señal cuadrada de amplitud 1, y frecuencia igual a 1 [rad/s]. El observador se inicia con  $\hat{\mathbf{x}}(0) = 0$ . Entonces, la norma del error de estimación,  $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$  evoluciona como se muestra en la Figura 10.13

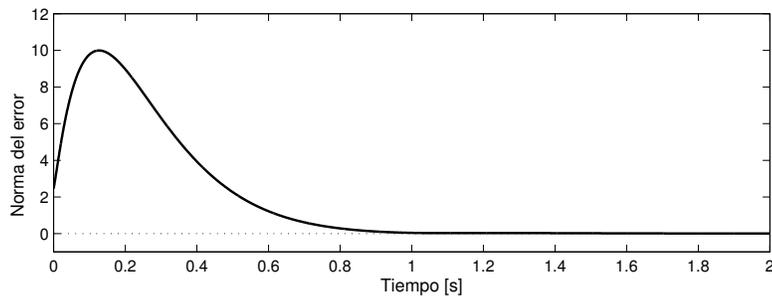


Figura 10.13: Error de estimación del estado

Es importante notar que en este ejemplo la planta es inestable, lo que implica que tanto el estado como su estimación crecen indefinidamente. Sin embargo, bajo el supuesto de un modelo exacto, el error de estimación converge a cero.

□□□

### 10.7.2. Observadores y ruido de medición

Hasta el momento hemos supuesto que la entrada del sistema,  $u(t)$ , y su salida,  $y(t)$ , están disponibles sin errores de ningún tipo. En general, esta suposición es válida sólo para la entrada pues usualmente ésta es generada por el mismo *dispositivo* que estima el estado. Sin embargo, en la medición de la salida  $y(t)$ , siempre tendremos la presencia de ruido.

Para analizar el efecto de este ruido de medición, denotemos por  $\mathbf{y}_m(t)$  la medición, es decir, la salida *real* de la planta contaminada con ruido:

$$\mathbf{y}_m(t) = y(t) + \mathbf{v}(t) \quad (10.203)$$

donde  $\mathbf{v}(t)$  se denomina ruido de medición aditivo. El error de medición satisface la ecuación:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{J}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{J}\mathbf{v}(t) \quad (10.204)$$

Por lo tanto:

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J}\mathbf{V}(s) \quad (10.205)$$

Es decir, el error debido al ruido será pequeño si la función de transferencia  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J}$  es capaz de actuar como *filtro* para el ruido  $\mathbf{v}(t)$ .

**Ejemplo 10.20.** *Un sistema es modelado por las ecuaciones de estado:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad -1]; \quad D = 0 \quad (10.206)$$

Supongamos que queremos estimar una variable del sistema  $z(t) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{x}(t)$ , donde  $\mathbf{\Gamma}^T = [1 \quad 1]$ . Entonces, una estimación de esta variable es  $\hat{z}(t)$ , que se obtiene como:

$$\hat{z}(t) = \mathbf{\Gamma}^T \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (10.207)$$

Entonces, la parte ruidosa en la estimación de  $z(t)$  es  $z_v(t)$ , cuya transformada de Laplace satisface

$$Z_v(s) = H_v(s)V(s) \quad , \quad \text{donde } H_v(s) = \mathbf{\Gamma}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J} \quad (10.208)$$

A continuación consideramos dos elecciones diferentes del polinomio del observador:

$$E_1(s) = (s + 0,5)(s + 0,75) \quad y \quad E_2(s) = (s + 10)(s + 20) \quad (10.209)$$

El lector puede apreciar que esto implica que el observador definido por  $E_1(s)$  será más lento definido por  $E_2(s)$ . Cada polinomio determina la ganancia del observador, tal como en el Ejemplo 10.19. Las correspondientes funciones de transferencias del filtro del ruido de medición están dadas por:

$$H_1(s) = \mathbf{\Gamma}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}_1\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J}_1 = \frac{1,875s + 5,625}{s^2 + 1,25s + 0,375} \quad (10.210)$$

$$H_2(s) = \mathbf{\Gamma}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{J}_2\mathbf{C})^{-1}\mathbf{J}_2 = \frac{144s + 432}{s^2 + 30s + 200} \quad (10.211)$$

La Figura 10.14, muestra el diagrama de Bode<sup>5</sup> de cada uno de los filtros obtenidos. Es interesante apreciar en la figura que el filtro más lento resulta ser más inmune a ruido de alta frecuencia, comparado con el más lento, factor que resulta crucial en el diseño del observador.

□□□

<sup>5</sup>Ver Capítulo 9.

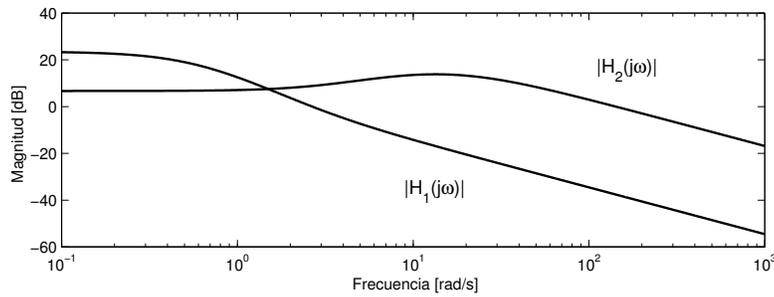


Figura 10.14: Característica de filtraje de los observadores

En el diseño de un observador, siempre existe un compromiso entre la velocidad de convergencia del error de observación y la inmunidad de la estimación frente al ruido de medición.

Una forma sistemática de encarar este problema es usar la teoría de filtros óptimos, como los filtros de Kalman-Bucy. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, las referencias [2, 17, 27].

## 10.8. Problemas para el lector

**Problema 10.1.** Determine una representación en variables de estado de los siguientes sistemas:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \frac{d}{dt}u(t) + 2u(t) \quad (10.212)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \omega^2y(t) = u(t) \quad (10.213)$$

$$y[k] = y[k - 1] + u[k] - u[k - 1] \quad (10.214)$$

$$y[k] = u[k - 4] \quad (10.215)$$

**Problema 10.2.** Para cada uno de los sistemas del problema anterior:

**10.2.1** Determine los autovalores de la matriz de transición.

**10.2.1** Determine una representación de estado equivalente, en que la matriz de estado ( $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}_d$ ) sea diagonal. Sugerencia: utilice la matriz de autovectores como transformación de similaridad.

**Problema 10.3.** Considere el siguiente modelo no lineal:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 0,1x_1(t)x_2(t) + u(t) \quad (10.216)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t)(x_1(t))^2 \quad (10.217)$$

$$y(t) = x_1(t) + (1 + x_2(t))^2 \quad (10.218)$$

Construya un modelo lineal en torno al punto de operación definido por  $u_Q = 1$ .

**Problema 10.4. Sistema predador-presa (Lotka-Volterra).**

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales, que describe la dinámica de una población de conejos ( $c(t) > 0$ ) y de zorros ( $z(t) > 0$ ):

$$\frac{dc}{dt} = \alpha c(t) + \beta c(t)z(t) \quad (10.219)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma z(t) + \delta c(t)z(t) \quad (10.220)$$

en que los parámetros  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  son positivos.

**10.4.1** Determine todos los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones.

**10.4.2** Obtenga el sistema linealizado en torno a cada uno de los puntos de equilibrio anteriores.

**10.4.3** Estudie y compare el tipo de soluciones del sistema linealizado en cada uno de los puntos de equilibrio.

**10.4.4** Elija algún valor para los parámetros, y simule el sistema original y el linealizado en torno a cada punto de equilibrio, representando la solución en el plano  $(c(t), z(t))$ .

**Problema 10.5.** Consideremos el levitador magnético del Ejemplo 10.3 en la página 264.

**10.5.1** Determine la función de transferencia desde la entrada  $e(t)$  si se considera la corriente  $i(t)$  como salida.

**10.5.2** ¿Qué puede comentar sobre los polos de la transferencia y los autovalores de la matriz de estado?

**10.5.3** Note que en nuestro modelo físico simplificado la corriente  $i(t)$  no es afectada por la posición ni por la velocidad vertical de la esfera. ¿Cómo es posible incluir el efecto del cambio de posición de la esfera en la inductancia del electroimán? Hágalo y repita los dos puntos anteriores para el nuevo modelo de estado.

**Problema 10.6.** Considere el modelo en variables de estado de un sistema:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (10.221)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (10.222)$$

y una transformación del estado  $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}(t)$ , en que  $\mathbf{T}$  es una matriz no singular.

Demuestre que la función de transferencia dada por  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$  y por la nueva representación  $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{D}}\}$ , dada por (10.65), son iguales.

**Problema 10.7.** Considere la función de transferencia de un sistema de tiempo discreto (en la que no hay cancelaciones):

$$H[z] = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} \quad (10.223)$$

**10.7.1** Demuestre que una realización mínima de dicho sistema está dada por las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.224)$$

$$\mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}] \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (10.225)$$

Sugerencia: Proceda análogamente al caso de tiempo continuo, en la Sección §10.3.4, notando que, al usar la transformada Zeta (Apéndice E):

$$F[z] = \mathcal{Z}\{f[t]\} \iff zF[z] = \mathcal{Z}\{f[t+1]\} \quad (10.226)$$

**10.7.2** Determine una representación de estado (realización) mínima para el sistema:

$$H[z] = \frac{z + 1}{z^3 - 3z^2 + 3z - 1} \quad (10.227)$$

**10.7.3** ¿Qué sucede si la función de transferencia es bipropia? Determine una realización mínima para el sistema definido por:

$$H[z] = \frac{2z^2 - z + 1}{(z - 0,8)(z - 0,6)} \quad (10.228)$$

**Problema 10.8.** Dado el sistema:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (10.229)$$

$$y(t) = [-2 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t) \quad (10.230)$$

**10.8.1** Determine los autovalores del sistema.

**10.8.2** Determine las matrices de observabilidad y controlabilidad, y sus respectivos rangos. ¿Es el sistema completamente controlable y observable?

**10.8.3** Determine si el sistema es estabilizable. Determine si el sistema es detectable.

**Problema 10.9.** Considere los sistemas definidos en variables de estado:

$$\text{Sistema 1 : } \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = -2x_1(t) + u_1(t) \\ y_1(t) = 2x_1(t) \end{cases} \quad (10.231)$$

$$\text{Sistema 2 : } \begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_2(t) \\ y_2(t) = [0,5 \ 1] \mathbf{x}_2(t) \end{cases} \quad (10.232)$$

**10.9.1** Determine el modelo de estado de la interconexión serie del Sistema 1 seguido del Sistema 2.

**10.9.2** Determine si el modelo de estado obtenido es completamente controlable y completamente observable.

**10.9.3** Compare con la función de transferencia de dicha interconexión y comente.

**10.9.4** Repita los puntos anteriores si ahora se conecta el Sistema 2 seguido del Sistema 1.

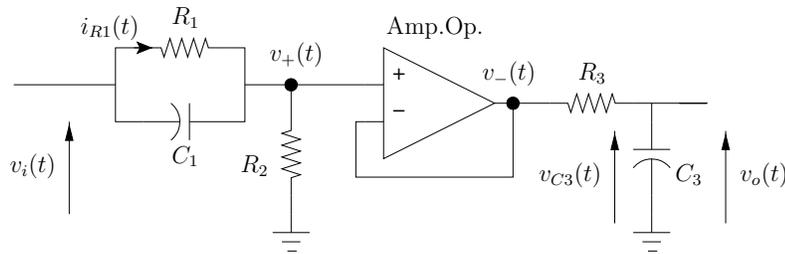


Figura 10.15: Circuito electrónico para el Problema 10.10.

**Problema 10.10.** Considere el circuito electrónico de la Figura 10.15 en que el amplificador operacional actúa como seguidor de voltaje, es decir,  $v_+(t) = v_-(t)$ .

10.10.1 Determine un modelo de estado del circuito, eligiendo como variables de estado  $x_1(t) = i_{R1}(t)$  y  $x_2(t) = v_{C3}(t)$ .

10.10.2 Determine la matriz de controlabilidad y bajo qué condiciones sobre los valores de las componentes el sistema es completamente controlable.

10.10.3 Determine las funciones de transferencia entre  $v_i(t)$  y  $v_+(t)$ , y entre  $v_-(t)$  y  $v_o(t)$ .

10.10.4 A partir las transferencias anteriores determine la función de transferencia del circuito, es decir, entre  $v_i(t)$  y  $v_o(t)$ . Comente.

**Problema 10.11.** Consideremos nuevamente el modelo de estado del circuito electrónico obtenido en el Problema 10.10. Considere los siguientes valores de las componentes electrónicas:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1[\text{K}\Omega]; \quad C_1 = 0,9[\text{mF}]; \quad C_3 = 1[\text{mF}] \quad (10.233)$$

10.11.1 Determine el gramiano de controlabilidad  $\mathbf{P}$  del sistema (Sugerencia: utilice el comando `gram` en MATLAB).

10.11.2 Determine la energía de control (10.157) si como estado inicial del sistema se considera cada uno de los autovectores del gramiano  $\mathbf{P}$ . Comente.

10.11.3 Determine la función de transferencia del sistema. Comente.

**Problema 10.12.** Demuestre que el rango de la matriz de observabilidad definida en (10.176) es invariante respecto a transformaciones de similitud (Sugerencia: Proceda análogamente a la demostración del Teorema 10.4 en la página 290).

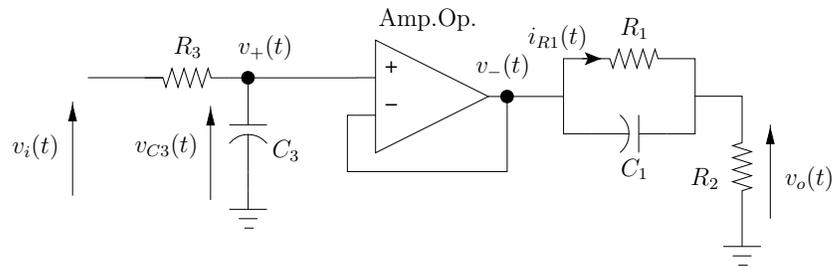


Figura 10.16: Circuito electrónico para el Problema 10.13.

**Problema 10.13.** Consideremos el circuito electrónico de la Figura 10.16. Éste corresponde al mismo del Problema 10.10 en que se han intercambiado las redes eléctricas a la derecha e izquierda del amplificador operacional.

**10.13.1** Determine un modelo de estado del circuito, eligiendo como variables de estado  $x_1(t) = v_{C3}(t)$  y  $x_2(t) = i_{R1}(t)$ .

**10.13.2** Determine la matriz de observabilidad y bajo qué condiciones sobre los valores de las componentes el sistema es completamente observable.

**10.13.3** Determine las funciones de transferencia entre  $v_i(t)$  y  $v_+(t)$ , y entre  $v_-(t)$  y  $v_o(t)$ .

**10.13.4** A partir las transferencias anteriores determine la función de transferencia del circuito, es decir, entre  $v_i(t)$  y  $v_o(t)$ . Comente.

**Problema 10.14.** Consideremos el modelo de estado del circuito electrónico obtenido en el Problema 10.13. Considere los siguientes valores de las componentes electrónicas:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1[\text{K}\Omega]; \quad C_1 = 0,9[\text{mF}]; \quad C_3 = 1[\text{mF}] \quad (10.234)$$

**10.14.1** Determine el gramiano de observabilidad  $\mathbf{Q}$  del sistema (Sugerencia: utilice el comando `gram` en MATLAB).

**10.14.2** Determine la energía de la salida del sistema (10.181) si como estado inicial del sistema se considera cada uno de los autovectores del gramiano  $\mathbf{Q}$ . Comente.

**10.14.3** Determine la función de transferencia del sistema. Comente.

**Problema 10.15.** Determine la forma canónica del observador para el modelo de estado de un sistema. Esta corresponde al dual del Lema 10.8 en la página 293.

**Problema 10.16.** *Proponga una representación en variables de estado de las siguientes señales (de tiempo continuo y de tiempo discreto), y especifique las condiciones iniciales correspondientes.*

$$f(t) = 3 \cos(5t + 0,2\pi)$$

$$f(t) = 2 \cos(2t) \cos(10t)$$

$$f(t) = (\operatorname{sen}(3t))^2$$

$$f(t) = t^3 e^{-0,1t}$$

$$f[t] = (0,8)^t \cos(0,1\pi t)$$

$$f[t] = 4t^2$$

**Problema 10.17.** *Desarrolle la teoría de observadores para sistemas de tiempo discreto. Compare con el caso de tiempo continuo.*



---

## Capítulo 11

# Sistemas híbridos

### 11.1. Introducción

Uno de los paradigmas más fecundos de la ingeniería moderna es el uso de la tecnología digital en el procesamiento de señales. Esto se refleja en diversos campos tales como las telecomunicaciones, la bioingeniería, la automatización de procesos y el procesamiento de imágenes y voz, entre otros. El progreso de la tecnología electrónica y de la capacidad de procesamiento asociada han hecho que este paradigma se extienda y consolide.

Los sistemas digitales usados en procesamiento de señales, cualquiera sea su propósito, manejan señales que son discretas en magnitud (con discretización determinada por el número de bits) y discretas en tiempo (debido a que existe una sincronización con un reloj o temporizador). Por ejemplo, en un computador con registros de 16 bits y una unidad procesadora central (CPU) de 2 [GHz], se pueden representar números enteros positivos con magnitud cuya discretización corresponde a  $2^{-16}$  veces el valor máximo representado. Esto es el *quantum* de magnitud. A su vez, las operaciones que se realizan en la CPU y las transferencias de datos sólo pueden iniciarse en instantes que son múltiplos del período del reloj, es decir, múltiplos de 0,5[ns].

Muchas veces se usan como sinónimo las expresiones *digital* y *tiempo discreto*. En rigor, no son sinónimos, ya que un registro digital tiene un valor que está definido en **todo instante**, es decir, en tiempo continuo. Aceptaremos la sinonimia porque sólo nos interesa analizar lo que pasa con ese valor almacenado en los instantes que corresponden a múltiplos del ciclo del reloj, es decir, cuando se puede producir algún cambio. Sin embargo, debemos tener presente que si el dispositivo digital tiene una discretización muy gruesa, es decir, un quantum grande, debido a un número reducido de *bits*, es necesario hacer un análisis de este efecto en el procesamiento de las señales

Parte importante de las aplicaciones en el campo del procesamiento de señales involucran la interacción de señales o la interconexión de sistemas de tiempo continuo con aquellos definidos para tiempo discreto. Cuando un siste-

ma incluye componentes tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto, se habla de **sistemas híbridos**.

La comunicación de sistemas que procesan señales de distinta naturaleza requiere resolver dos problemas: el problema de **muestreo**, que permite transformar una señal de tiempo continuo en una señal de tiempo discreto y el problema de **reconstrucción**, es decir, la transformación de una señal de tiempo discreto en una señal de tiempo continuo.

Para enfatizar la diferencia entre transformadas de señales de tiempo continuo y discreto, a lo largo de este capítulo hemos usado la siguiente notación:

- Denotamos por  $y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , una señal de tiempo continuo y por  $y[k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , una señal de tiempo discreto.
- Denotamos por  $Y(\cdot)$  las transformadas (de Fourier o Laplace) de una señal continua  $y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- Denotamos por  $Y[\cdot]$  las transformadas (de Fourier o Zeta) de una señal discreta  $y[k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 11.2. Muestreo de señales

Supongamos que deseamos procesar digitalmente una señal de tiempo continuo  $y(t)$ , entonces debemos tomar el valor de la señal en un instante dado, es decir, tomar una muestra y transformarla en una colección de bits. En otras palabras, intervienen dos procesos: muestreo y cuantización. . Técnicamente se requiere un muestreador y un conversor tal como se indica, de manera simplificada, en la Figura 11.1. El muestreador discretiza en el tiempo y el conversor discretiza la amplitud de la señal. En lo sucesivo, supondremos que la conversión analógica-digital ( $A/D$ ) es de alta precisión y de alta velocidad, es decir, el proceso de cuantización no introduce errores numéricos ni retardos.

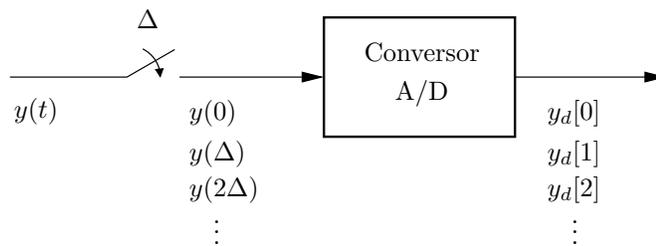


Figura 11.1: Proceso de muestreo y cuantización.

Por simplicidad, la señal  $y(t)$  se suele muestrear en forma periódica, con período  $\Delta$ [s], correspondiente a una frecuencia de muestreo  $f_m = 1/\Delta$ [Hz] o frecuencia angular de muestreo  $\omega_m = 2\pi/\Delta$ [rad/s]. Como resultado, obtenemos

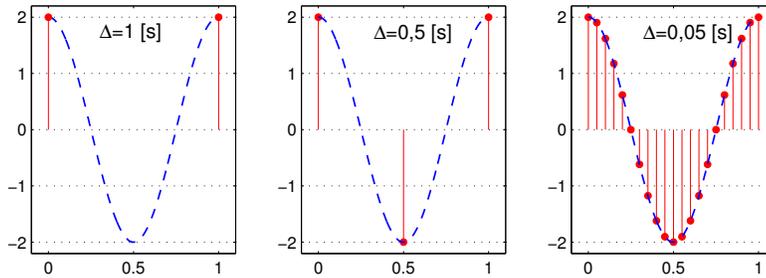


Figura 11.2: Muestreo de una señal sinusoidal a diferentes frecuencias. Ejemplo 11.1

el conjunto de muestras  $\{y(0), y(\Delta), y(2\Delta), \dots\}$  que puede considerarse como una secuencia discreta  $\{y_d[0], y_d[1], y_d[2], \dots\}$ . Para el análisis de esta secuencia de tiempo discreto podemos aplicar los métodos desarrollados en el Capítulo 4.

Al muestrear una señal de tiempo continuo puede *perderse información* pues sólo conoceremos los valores de la señal en los instantes de muestreo. El primer fenómeno interesante de observar se relaciona con la selección de la frecuencia de muestreo. Por ejemplo, si la señal a muestrear es una constante, entonces, la información codificada en la señal se captura con cualquier frecuencia de muestreo. Como contrapartida, si la señal cambia rápidamente, es necesario muestrear rápido (comparativamente) para que la secuencia de tiempo discreto capture esa dinámica de cambio. En la Sección 11.4 veremos que, bajo los supuestos adecuados, la secuencia discreta contiene información suficiente para reconstruir (casi) perfectamente la señal original,

Las ambigüedades que surgen de una elección desacertada del período de muestreo se ilustran en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 11.1.** *Suponga que  $y(t) = 2 \cos(2\pi t)$ , es decir, se trata de una señal sinusoidal de frecuencia 1 [Hz]. Consideremos ahora tres valores distintos para la frecuencia de muestreo ( $\omega_m = 2\pi f_m$  [rad/s]):*

- (a)  $f_m = 1$  [Hz], es decir,  $\Delta = 1$  [s],
- (b)  $f_m = 2$  [Hz], es decir,  $\Delta = 0,5$  [s], y
- (c)  $f_m = 20$  [Hz], es decir,  $\Delta = 0,05$  [s].

Los tres casos son mostrados en los gráficos de la Figura 11.2, donde se puede observar lo siguiente:

- (i) El muestreo a  $f_m = 1$  [Hz] genera una secuencia de valores constantes. Esto indica que el proceso de discretización temporal entrega un resultado totalmente equívoco. En otras palabras, dado  $y_d[k]$ , no hay forma de recuperar la función de tiempo continuo  $y(t)$ . Note que si el mismo muestreo se hubiera usado en la señal  $y(t) = 2 \sin(2\pi t)$ , entonces,  $y_d[k]$  hubiese sido cero  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

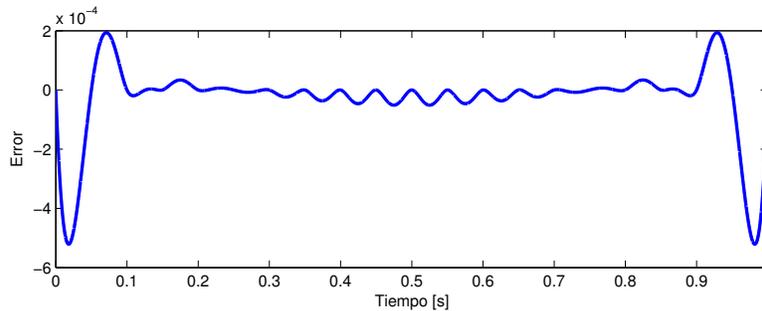


Figura 11.3: Error de reconstrucción usando interpolación cúbica.

- (ii) El muestreo a  $f_m = 2$  [Hz] genera una secuencia de valores constantes de signo alternado. Aunque se preserva la naturaleza periódica de la señal  $y(t)$ , así como su frecuencia exacta, el resultado también es equívoco, por cuanto sería imposible recuperar la señal original a partir de sus muestras. Por ejemplo, esas muestras podrían corresponder a una señal cuadrada.
- (iii) El muestreo a  $f_m = 20$  [Hz] genera una secuencia de valores que aproxima en forma muy cercana la señal original. Demostraremos más adelante que, en casos como éste existe un procedimiento para recuperar la señal original con un grado de exactitud tan grande como se desee.

Para verificar la última aseveración podemos intentar una reconstrucción por interpolación cúbica, por ejemplo, usando el comando `spline` en MATLAB. La Figura 11.3 muestra que el error de reconstrucción es muy pequeño (del orden de  $10^{-4}$ ). □□□

MATLAB

```
>>tt=[0:1e-5:1];Delta=0.05;t=[0:Delta:1];
>>y=2*cos(2*pi*tt);yk=2*cos(2*pi*t);
>>yaprox=spline(t,yk,tt); subplot(211);plot(tt,y-yaprox);
```

El fenómeno ilustrado en el Ejemplo 11.1 cuando la frecuencia de muestreo es muy baja ( $\Delta = 1$  [s]), se conoce como doblaje de frecuencia o *aliasing*. En términos conceptuales este fenómeno se manifiesta en que componentes de alta frecuencia de la señal de tiempo continuo se manifiestan como componentes de baja frecuencia en el espectro de la señal muestreada.

## 11.3. Análisis en frecuencia de señales muestreadas

Una vez que se obtiene la secuencia discreta  $y_d[k]$  podemos usar las herramientas desarrolladas en el Capítulo 6 para realizar un análisis espectral. En esta sección nos interesará relacionar ese análisis con el análisis espectral de la señal de tiempo continuo  $y(t)$ .

### 11.3.1. Tren de impulsos y su espectro

El análisis de los sistemas híbridos, requiere analizar, en un contexto común, secuencias discretas y señales continuas. Una herramienta útil es el uso de un tren de impulsos (deltas de Dirac), el que permite asociar un espectro o transformada de Fourier de tiempo continuo a una señal discreta. El siguiente resultado será de utilidad más adelante:

**Lema 11.1.** *Considere el tren de impulsos (deltas de Dirac):*

$$m_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) \quad (11.1)$$

*El espectro o transformada de Fourier de esta señal de tiempo continuo es un tren de impulsos en frecuencia dado por:*

$$M_{\Delta}(j\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_m \ell) \quad (11.2)$$

donde  $\omega_m = 2\pi/\Delta$  es la frecuencia angular de muestreo.

#### **Demostración**

La señal  $m_{\Delta}(t)$  es periódica de período  $\Delta > 0$ , por tanto podemos expresarla mediante la serie de Fourier exponencial:

$$m_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_m \ell t} \quad \text{en que } \omega_m = \frac{2\pi}{\Delta} \quad (11.3)$$

donde, usando propiedades de la transformada de Fourier (ver Ejemplo C.4 en la página 389), se obtiene el resultado (11.2):

$$M_{\Delta}(j\omega) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_m \ell t} \right\} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \{ 1 \cdot e^{j\omega_m \ell t} \} \quad (11.4)$$

□□□

El resultado anterior se representa gráficamente en la Figura 11.4.

El lector puede verificar que la transformada de Fourier de toda señal periódica contiene impulsos (vea Corolario C.2 en la página 391). Las áreas de estos impulsos corresponden al *espectro de línea* asociado a los coeficientes de la serie de Fourier en el Capítulo 5.

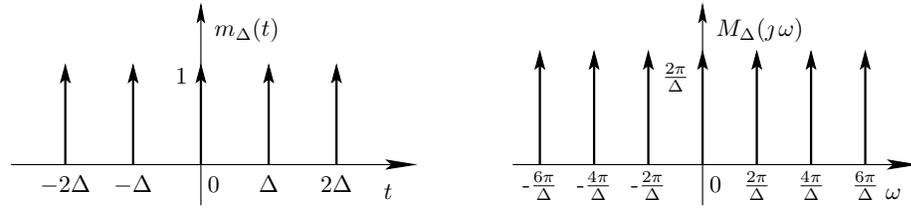


Figura 11.4: Tren de impulsos y su espectro.

### 11.3.2. Muestreo impulsivo

El tren de impulsos  $m_{\Delta}(t)$  definido en (11.1), es útil para asociar un espectro al conjunto de muestras que se obtienen de una señal arbitraria  $y(t)$ . Supongamos que dicha señal se muestrea uniformemente cada  $\Delta$  segundos, dando lugar a la secuencia de tiempo discreto:

$$y_d[k] = y(k\Delta) = y(t)|_{t=k\Delta} \quad ; k \in \mathbb{Z} \quad (11.5)$$

Cada muestra de la secuencia puede considerarse como el *peso* de un impulso en el instante en que fue tomada, o lo que es lo mismo, podemos multiplicar la señal original  $y(t)$  por el tren de impulsos (11.1), obteniendo una nueva señal de tiempo continuo:

$$y_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_d[k] \delta(t - k\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k\Delta) \delta(t - k\Delta) = y(t) m_{\Delta}(t) \quad (11.6)$$

Este *muestreo impulsivo* es una idealización que permite asociar a la secuencia discreta  $y_d[k]$  una señal de tiempo continuo  $y_{\Delta}(t)$  formada por un tren de deltas de Dirac. Esto se ilustra en la Figura 11.5. Note que sólo para propósitos didácticos se ha descrito la señal  $y_{\Delta}(t)$  con impulsos de Dirac de alto variable; como se sabe, la información no está codificada en el alto de los impulsos, el que siempre tiende a  $\infty$ , sino en el área de cada uno de ellos.

A continuación presentamos el principal resultado de esta sección que relaciona la transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) de  $y_d[k]$ , con el espectro (transformada de Fourier) de  $y(t)$  y de  $y_{\Delta}(t)$ .

**Lema 11.2.** *Dado el período de muestreo  $\Delta > 0$ , considere las señales  $y(t)$  e  $y_{\Delta}(t) = y(t)m_{\Delta}(t)$ , y sus respectivas transformadas de Fourier  $Y(j\omega)$  e  $Y_{\Delta}(j\omega)$ . Considere además la secuencia  $y_d[k] = y(k\Delta)$  y su transformada de Fourier de tiempo discreto  $Y_d[e^{j\theta}]$ . Entonces, tenemos que:*

$$Y_d[e^{j\theta}]|_{\theta=\omega\Delta} = Y_{\Delta}(j\omega) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Y(j\omega + j\omega_m\ell) \quad (11.7)$$

en que  $\omega_m = 2\pi/\Delta$  es la frecuencia angular de muestreo.

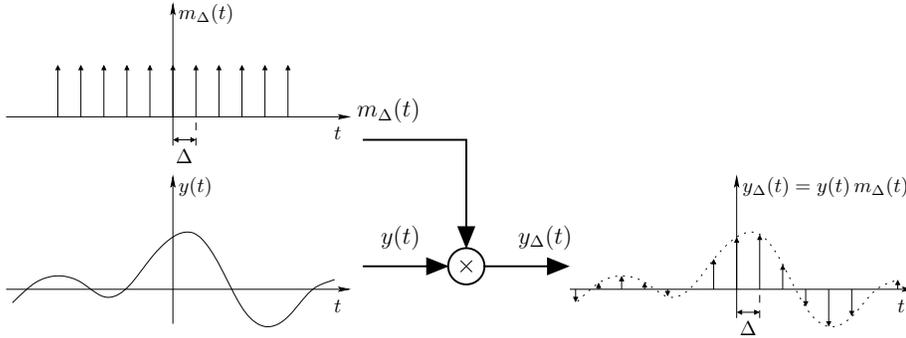


Figura 11.5: Señal muestreada mediante un tren de impulsos.

**Demostración**

Recordemos que la TFTD de la secuencia  $y_d[k]$  está dada por:

$$Y_d[e^{j\theta}] = \mathcal{F}_d \{y_d[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_d[k] e^{-jk\theta} \quad (11.8)$$

Por otro lado, usando la definición (C.1), tenemos que la transformada de Fourier de  $y_\Delta(t)$  es:

$$\begin{aligned} Y_\Delta(j\omega) &= \mathcal{F} \{y(t) m_\Delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k\Delta) \delta(t - k\Delta) \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( y(k\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) e^{-j\omega t} dt \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k\Delta) e^{-j\omega k\Delta} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Comparando las ecuaciones (11.8) y (11.9) se obtiene la primera igualdad en (11.7).

La transformada de Fourier de  $y_\Delta(t)$  puede también obtenerse aplicando el

Lema C.9 en la página 396:

$$\begin{aligned}
 Y_{\Delta}(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} Y(j\omega) * M_{\Delta}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\zeta) M_{\Delta}(j\omega - j\zeta) d\zeta \\
 &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\zeta) \left( \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(j\omega - j\zeta - j\omega_m \ell) \right) d\zeta \\
 &= \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\zeta) \delta(j\omega - j\zeta - j\omega_m \ell) d\zeta \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} Y(j\omega + j\omega_m \ell) \tag{11.10}
 \end{aligned}$$

Esto demuestra la segunda igualdad en (11.7). □□□

Una observación importante es que el espectro de la señal muestreada, dado por (11.7), corresponde a la suma, escalada por  $1/\Delta$ , del espectro de la señal de tiempo continua subyacente y de ese espectro desplazado en múltiplos positivos y negativos de la frecuencia de muestreo,  $\omega_m$ . Esta característica de la señal muestreada es clave para la recuperación de la señal original, tal como se apreciará en la siguiente sección.

## 11.4. Reconstrucción

En esta sección examinamos el problema inverso al de la Sección §11.2: supongamos que una señal  $y(t)$  es muestreada cada  $\Delta[s]$ , generando la secuencia  $y_d[k] = y(k\Delta)$ , tal como se representa en la Figura 11.1 ¿Bajo qué condiciones y en qué forma es posible **reconstruir** la señal original  $y(t)$ ?

Para construir el marco del resultado principal, desarrollaremos primero un ejemplo.

**Ejemplo 11.2.** Considere la señal de tiempo continuo:

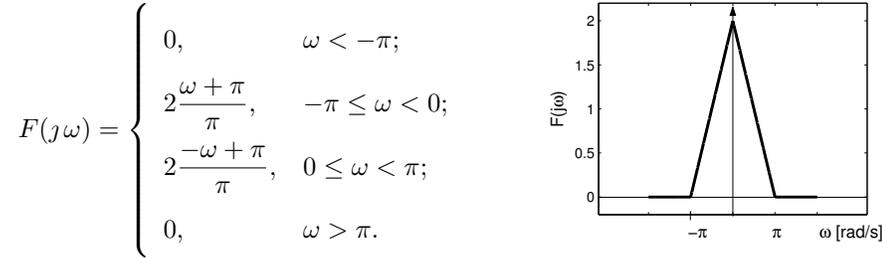
$$f(t) = 2 \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi^2 t^2} \tag{11.11}$$

Note que  $f(t)$  es una función par, por lo cual su transformada de Fourier  $F(j\omega) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ . Esta transformada se puede calcular usando el código MAPLE :

```

MAPLE
>with(inttrans) :
>f(t):=2*(1-cos(Pi*t))/(Pi^2*t^2):
>j:=sqrt(-1):jw=j*w:F(jw):= fourier(f(t),t,w);

```



Si ahora suponemos que la señal es muestreada cada  $0,5[s]$ , el espectro de la señal muestreada es el que aparece en la Figura 11.6(a). En ésta se aprecia claramente la estructura de la suma de espectros anticipada por (11.7).

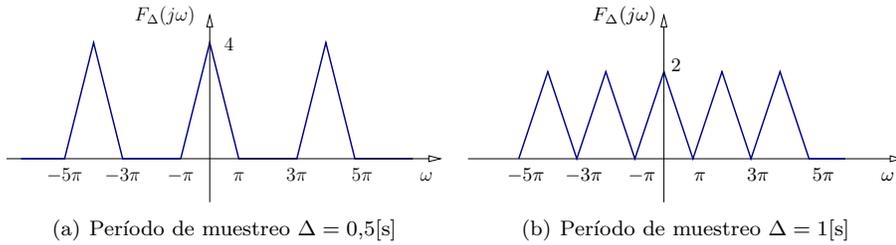


Figura 11.6: Espectro de la señal  $f(t) = 2\frac{1-\cos(\pi t)}{\pi^2 t^2}$  muestreada cada  $\Delta [s]$ .

Si, en cambio, muestreamos cada  $1[s]$ , el espectro de la señal muestreada es el que aparece en la Figura 11.6(b) Note que, con esta frecuencia de muestreo, aún se puede reconocer la suma de espectros revelada en (11.7).

Finalmente, si el muestreo de la señal de tiempo continuo (11.11) se hace cada  $\frac{4}{3}[s]$ , el espectro resultante de la señal muestreada es el que aparece en la Figura 11.7(a). En este caso, ya no es posible reconocer la suma (11.7). Para apreciar la ambigüedad del resultado, suponga que la señal de tiempo continuo a muestrear sea  $\tilde{f}(t)$ , con espectro  $\tilde{F}(j\omega)$ , mostrado en la Figura 11.7(b). Lo clave es que si  $\tilde{f}(t)$  se muestrea cada  $\frac{4}{3}[s]$ , el espectro de la señal de tiempo discreto resultante, de acuerdo a (11.7) sería el mismo de la Figura 11.7(a). En otras palabras, dos señales de tiempo continuo diferentes pueden generar secuencias muestreadas iguales teniendo, por lo tanto, la misma TFTD. Este último caso manifiesta el problema de doblaje o aliasing a que se hizo referencia en la Sección §11.2.

□□□

Del ejemplo precedente se observa que es posible recuperar de alguna forma la señal original si se dan tres condiciones:

**Condición 1** La señal de tiempo continuo,  $f(t)$ , a muestrear tiene energía sólo en una banda limitada, es decir,  $|F(j\omega)| = 0, \forall \omega \geq \omega_c$ , para algún  $0 < \omega_c < \infty$ .

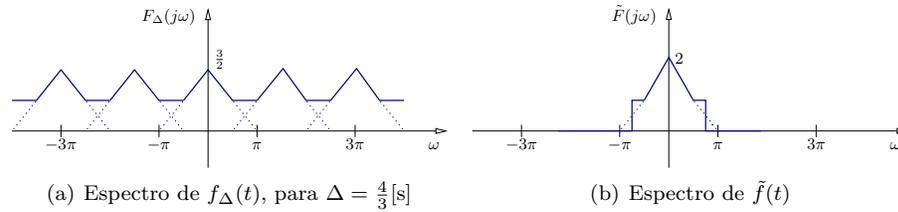


Figura 11.7: Al muestrear las señales  $f(t)$  y  $\tilde{f}(t)$  con período  $\Delta = \frac{4}{3}$  [s] se obtienen secuencias con el mismo espectro.

**Condición 2** La frecuencia angular de muestreo,  $\omega_m$ , es mayor que  $2\omega_c$ . Esto asegura que en la expresión (11.7), no hay doblaje de frecuencia de los espectros de la señal original. En el ejemplo, en el que  $\omega_c = \pi$ , esta condición requiere que  $\omega_m$  sea mayor que  $2\pi$ ; con la elección  $\Delta = \frac{4}{3}$ , la frecuencia angular de muestreo  $\omega_m$  sólo alcanza a  $\frac{3\pi}{2}$ , con lo que no se cumple la primera condición.

**Condición 3** Para la reconstrucción usamos un filtro pasabajos ideal con respuesta en frecuencia  $H_{pb}(j\omega)$  dada por:

$$H_{pb}(j\omega) = \begin{cases} \Delta & ; |\omega| \leq \omega_m/2 \\ 0 & ; |\omega| > \omega_m/2 \end{cases} \quad (11.12)$$

La Figura 11.8 muestra la respuesta en frecuencia del filtro ideal (11.12) para la señal muestreada  $f(t)$  en el ejemplo anterior, cuando  $\Delta = 0,5$  [s]. En esta figura se aprecia que el filtro enmascara el espectro de la señal muestreada, recuperando exactamente el espectro de la señal original de tiempo continuo.

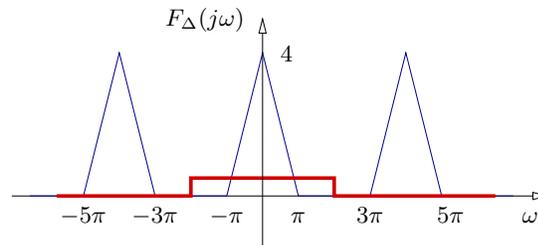


Figura 11.8: Filtraje de reconstrucción con filtro ideal (línea gruesa).

### 11.4.1. Reconstrucción ideal

El proceso de reconstrucción bajo las condiciones descritas previamente puede también ser modelado en el dominio del tiempo. Para ello notamos primero que la respuesta a impulso del filtro ideal (11.12) está dada por:

$$h_f(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H_{pb}(j\omega)\} = \frac{\text{sen}(0,5\omega_m t)}{0,5\omega_m t} \quad (11.13)$$

entonces la señal original se puede recuperar por la convolución en el tiempo:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_d[k] h_f(t - k\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \frac{\text{sen}(0,5\omega_m(t - k\Delta))}{0,5\omega_m(t - k\Delta)} \quad (11.14)$$

Este resultado se conoce como teorema de Shannon, que a continuación presentamos formalmente.

**Teorema 11.1** (Teorema de reconstrucción de Shannon). *Una señal  $f(t)$  cuyo espectro es distinto de cero sólo en el rango  $[-\omega_c, \omega_c]$ , puede ser reconstruida exactamente a partir de las muestras de la señal, si ellas se obtienen a una frecuencia de muestreo  $\omega_m$  donde  $\omega_m > 2\omega_c$ . La reconstrucción está dada por:*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) \frac{\text{sen}(0,5\omega_m(t - k\Delta))}{0,5\omega_m(t - k\Delta)} \quad (11.15)$$

□□□

La frecuencia  $\omega_c = \omega_m/2$  se denomina **frecuencia de Nyquist**. La tasa límite de muestreo  $\omega_m = 2\omega_c$  (denominada tasa de Nyquist) puede considerarse para la reconstrucción sólo si el espectro  $F(j\omega)$  de la señal a muestrear es *finito* en  $\omega = \omega_c$ , es decir, sólo si  $f(t)$  no contiene sinusoidales de frecuencia  $\omega_c$ . Por ejemplo, si  $f(t) = \text{sen}(\omega_c t)$  entonces  $F(j\omega)$  contiene impulsos en  $\omega = \omega_c$  y si elegimos como frecuencia de muestreo  $\omega_m = 2\omega_c$  obtendremos  $f_d[k] = f(k\Delta) = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

El teorema de Shannon contiene dos elementos esenciales:

- (i) Existe una frecuencia mínima de muestreo que garantiza que la señal de tiempo discreto contiene toda la información de la señal de tiempo continuo subyacente.
- (ii) Existe un procedimiento para recuperar exactamente la señal de tiempo continuo, a partir de las muestras.

Desafortunadamente el problema reside en que el procedimiento ideal de reconstrucción es no realizable, pues el filtro ideal con respuesta a impulso  $h_f(t)$  es **no causal**<sup>1</sup>. Debido a esto, la reconstrucción perfecta definida por la ecuación (11.15) sólo puede implementarse mediante aproximaciones. Esta dificultad esencial da origen a métodos aproximados de reconstrucción.

<sup>1</sup>Sugerimos al lector revisar la Nota 6.1 en la página 134

### 11.4.2. Retentor de orden cero

La forma más simple de reconstruir una señal  $f(t)$ , en base a sus muestras descritas en la secuencia  $f_d[k]$ , es mantener constante el valor de la muestra en  $t = k\Delta$  hasta  $t = (k + 1)\Delta$ , es decir, la señal reconstruida  $f_r(t)$  está definida por:

$$f_r(t) = f_d[k] = f(k\Delta) \quad ; \quad k\Delta \leq t < (k + 1)\Delta \quad (11.16)$$

Esta estrategia se denomina reconstrucción con retentor de orden cero<sup>2</sup>, y se muestra en la Figura 11.9. Note que este proceso introduce escalones en la señal reconstruida  $f_r(t)$ , los cuales son más finos cuanto más alta es la tasa de muestreo. Estos escalones introducen componentes de alta frecuencia que no están presentes en la señal original  $f(t)$ .

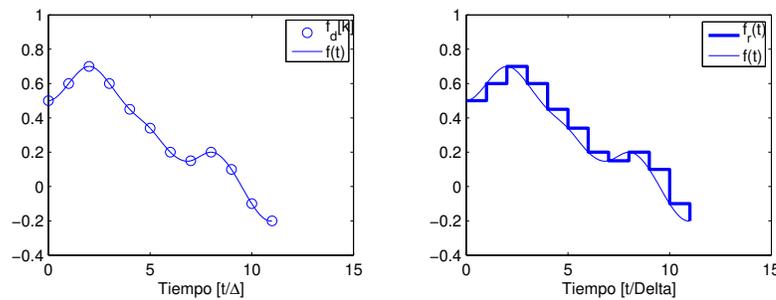


Figura 11.9: Reconstrucción de una señal de tiempo continuo usando retentor de orden cero.

Un modelo para el proceso de reconstrucción de orden cero se muestra en la Figura 11.10. El modelo tiene sentido sólo como un todo, pues el *muestreador de impulsos* no es físicamente realizable, pero nos permite asociar a la secuencia de tiempo discreto  $f_d[k]$  un tren de impulsos definido en tiempo continuo. En otras palabras, la señal a la salida de ese muestreador es la misma presentada en la Sección §11.3.2:

$$f_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_d[k] \delta(t - k\Delta) \quad (11.17)$$

La reconstrucción usando el retentor de orden cero se modela filtrando el tren de impulsos a través del sistema con respuesta en frecuencia:

$$H_o(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\Delta}}{j\omega} = \Delta \frac{\text{sen}(0,5\omega\Delta)}{0,5\omega\Delta} e^{-j0,5\omega\Delta} \quad (11.18)$$

La diferencia principal entre este tipo de reconstrucción y la descrita por el teorema de Shannon es el que el filtro descrito en (11.18) no es el filtro

<sup>2</sup>Zero Order Hold (ZOH), en inglés.

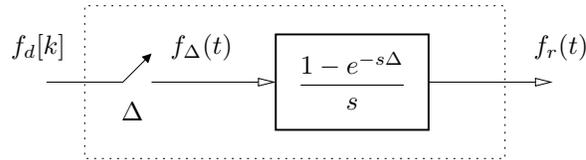


Figura 11.10: Modelo para la reconstrucción de orden cero.

ideal requerido por Shannon. En consecuencia, la calidad de la reconstrucción se puede medir analizando cuanto se aleja (11.18) de (11.12). El comportamiento de este retentor se describe en la Figura 11.11, donde se muestra  $|H_o(j\omega)|$  y, para efectos comparativos, se incluye la respuesta en frecuencia ideal (11.12).

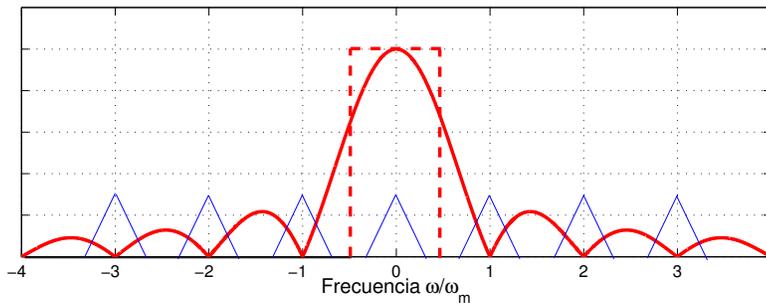


Figura 11.11: Magnitud de la respuesta en frecuencia del retentor de orden cero (línea gruesa), del filtro ideal (línea segmentada) y espectro de la señal muestreada en el Ejemplo 11.2 (línea fina).

En la Figura 11.11 se ha incluido un espectro típico de una señal muestreada, para la que se cumple la condición  $\omega_m > 2\omega_c$ . En la figura podemos observar que:

- (i)  $|H_o(j\omega)|$  no es constante en  $[-0,5\omega_m, 0,5\omega_m]$ , y es claramente diferente a  $|H_{pb}(j\omega)|$ .
- (ii) A diferencia del filtro ideal, la ganancia del filtro de reconstrucción no se mantiene en cero en ningún rango finito de frecuencias, es decir, la atenuación no es infinita en ningún rango finito de frecuencias. Esto explica que el espectro de la señal reconstruida no sea cero a muy altas frecuencias y está en armonía con la presencia de los escalones en  $f_r(t)$ .
- (iii) A pesar de lo anterior, se aprecia que la atenuación del retentor es  $\infty$  en  $\omega = \pm\ell\omega_m, \forall \ell \in \mathbb{Z}^+$ .
- (iv) Si  $\omega_m$  se hace crecer, entonces, aumenta la atenuación de las componentes del espectro centradas en múltiplos de la frecuencia de muestreo.

- (v) El efecto señalado en el punto precedente es consistente con la observación que una mayor frecuencia de muestreo genera escalones más finos, lo cual indica una menor presencia, en el espectro de  $f_r(t)$ , de componentes de alta frecuencia.

### 11.4.3. Retentor de primer orden

La reconstrucción de la señal de tiempo continuo también puede realizarse prolongando la línea recta que *pasa* por la muestra en  $t = k\Delta$  y aquella en  $t = (k - 1)\Delta$ . La señal reconstruida mediante este retentor de primer orden<sup>3</sup> queda definida por:

$$f_r(t) = \frac{f_d[k] - f_d[k-1]}{\Delta}(t - k\Delta) + f_d[k] \quad ; \quad k\Delta \leq t < (k+1)\Delta \quad (11.19)$$

La Figura 11.12 nos permite comparar este tipo de retentor con el de orden cero, cuando se muestrea y reconstruye una senoide.

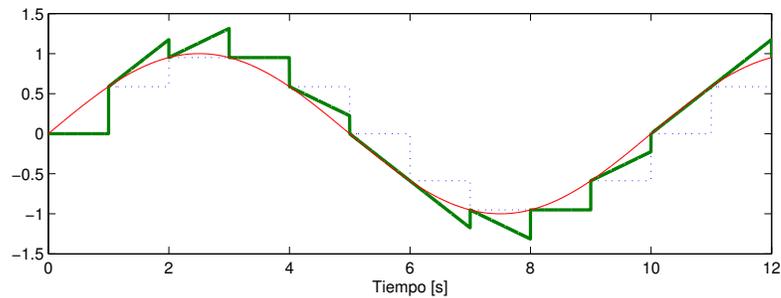


Figura 11.12: Comparación de retentores de orden cero y uno. Se muestra la señal continua (línea fina) junto con la retención de orden cero (línea segmentada) y la retención de primer orden (línea gruesa),  $\Delta = 1$  [s].

Un modelo que describe el proceso de reconstrucción de primer orden, se muestra en la Figura 11.13. Al igual que en el caso del retentor de orden cero (ver Figura 11.10), el modelo requiere el uso de un *muestreador de impulsos*. En este caso debemos tener nuevamente presente que éste es un elemento ficticio que sólo tiene sentido en conjunto con el filtro de reconstrucción.

El filtro de reconstrucción de primer orden tiene una respuesta en frecuencia dada por:

$$H_1(j\omega) = \Delta(1 + j\omega\Delta) \left( \frac{\text{sen}(0,5\omega\Delta)}{0,5\omega\Delta} \right)^2 e^{-j\omega\Delta} \quad (11.20)$$

La Figura 11.14 permite comparar la magnitud de la respuesta en frecuencia de los retentores de orden cero y uno. Como principal ventaja del retentor

<sup>3</sup>First Order Hold (FOH), en inglés.

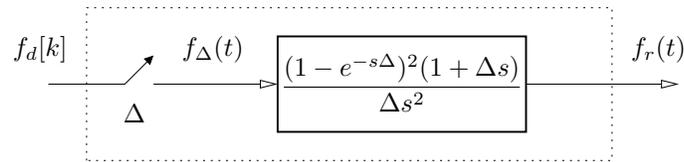


Figura 11.13: Modelo para la reconstrucción de primer orden

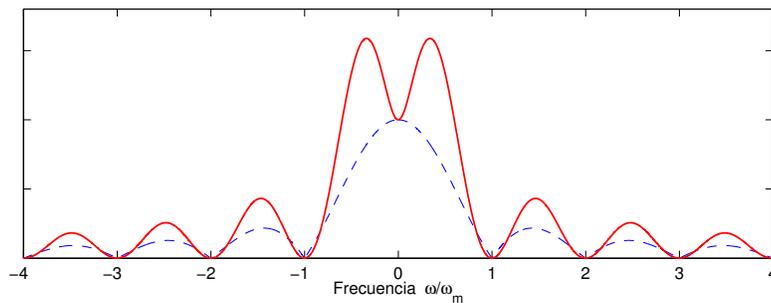


Figura 11.14: Magnitud de la respuesta en frecuencia del retentor de orden cero (línea segmentada) y del retentor de primer orden (línea llena).

de primer orden podemos apreciar que, además de tener ganancia cero en los múltiplos de la frecuencia de muestreo  $\omega_m$ , la atenuación alrededor de dichas frecuencias es mayor que la del retentor de orden cero. Este rasgo indica que el retentor de primer orden es capaz de filtrar mejor los sumandos  $F(j\omega + \ell\omega_m)$ ,  $\ell \neq 0$ , en la ecuación (11.7). A pesar de lo anterior, el retentor de orden cero es el más empleado en la práctica por diversas razones, entre ellas:

- (i) La implementación de los retentores de primer orden es más compleja. Note que los retentores de primer orden deben implementarse en electrónica analógica; en cambio los retentores de orden cero, se implementan automáticamente con los registros digitales que retienen su contenido entre dos instantes de muestreo.
- (ii) El análisis teórico de los sistemas híbridos con retentores de primer orden es más complejo.
- (iii) Las ventajas de desempeño del retentor de primer orden disminuyen a medida que aumenta la frecuencia de muestreo, lo cual ha sido facilitado por el constante progreso de la tecnología digital.

Existen otras alternativas de reconstrucción. Una de ellas es el retentor generalizado, cuyos detalles, para el lector interesado, se pueden encontrar, por ejemplo, en [12].

## 11.5. Sistemas híbridos. Casos relevantes

En esta sección usamos los resultados de las secciones anteriores (y de los capítulos precedentes) para estudiar dos configuraciones básicas en las que intervienen señales de tiempo continuo y de tiempo discreto. Antes de ello conviene hacer algunas precisiones y recordar algunas suposiciones:

- El paso de tiempo continuo a tiempo discreto requiere en la práctica de conversores análogo-digitales. Estos dispositivos se han omitido en el análisis bajo el supuesto que son de alta precisión y de alta velocidad.
- El procesamiento en tiempo discreto requiere de un procesamiento digital, que también se supone de alta velocidad y de alta precisión.
- El paso de tiempo discreto a tiempo continuo requiere de conversores digital-análogos. Éstos también se omiten en este análisis bajo el supuesto que son de alta precisión y de alta velocidad. Además, se suponen que ambos conversores,  $A/D$  y  $D/A$ , están sincronizados.
- En los sistemas híbridos aparecen dos interruptores de muestreo:
  - Uno que transforma una señal continua en una secuencia de deltas de Kronecker. Éste corresponde a la idealización de un dispositivo electrónico.

$$\begin{array}{ccc}
 f(t) & \xrightarrow{\Delta} & f_d[k] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\ell\Delta)\delta_K[k-\ell] \\
 & \searrow & \\
 & & \Delta
 \end{array}$$

- El segundo representa la transformación desde una secuencia de deltas de Kronecker (secuencia de tiempo discreto) a una secuencia de deltas de Dirac. Como hemos dicho previamente, éste es un elemento ficticio que sólo tiene sentido como parte del modelo del bloque reconstructor.

$$\begin{array}{ccc}
 f_d[k] & \xrightarrow{\Delta} & f_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_d[k]\delta_D(t-k\Delta) \\
 & \searrow & \\
 & & \Delta
 \end{array}$$

### 11.5.1. Procesamiento digital de señales

La Figura 11.15 representa el esquema básico utilizado en el procesamiento digital de señales, donde se aprovecha la versatilidad y capacidad de cálculo que poseen los sistemas discretos para implementar diferentes tipos de funciones. Una referencia valiosa en este tipo de aplicaciones es [36].

En la Figura 11.15 una señal de tiempo continuo  $u(t)$  es muestreada, luego procesada en forma discreta, para finalmente ser reconstruida. Esta *señal de salida* puede ser muestreada nuevamente, por ejemplo, con propósito de observación. Las variables y bloques involucrados se desglosan a continuación:

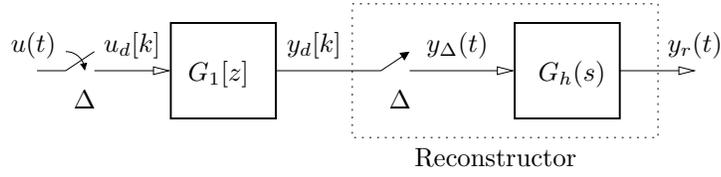


Figura 11.15: Muestreo, procesamiento discreto y reconstrucción de una señal de tiempo continuo.

$u(t)$  : Señal de tiempo continuo.

$u_d[k]$  : Señal muestreada, que puede interpretarse como un tren de deltas de Kronecker:

$$u_d[k] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u(\ell\Delta)\delta[k - \ell] \quad (11.21)$$

$G_1[z]$  : Procesador (sistema) estable de tiempo discreto, por ejemplo, un filtro digital.

$y_d[k]$  : Señal de salida resultante del procesamiento digital.

$y_\Delta(t)$  : Tren de impulsos (deltas de Dirac) a la entrada del retentor:

$$y_\Delta(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y_d[k]\delta(t - k\Delta) \quad (11.22)$$

$G_h(s)$  : Retentor de orden cero, de primer orden u otro, encargado de reconstruir la señal continua.

$y_r(t)$  : Salida del retentor, la cual es el resultado del proceso de reconstrucción.

Del esquema anterior, podemos obtener las siguientes ecuaciones:

$$Y_d[z] = G_1[z]U_d[z] \quad (11.23)$$

Sin embargo, al utilizar la idea de muestreo impulsivo, el Lema 11.2 asegura que:

$$Y_\Delta(j\omega) = Y_d[z] \Big|_{z=e^{j\omega\Delta}} \quad (11.24)$$

Si suponemos que la transformada de Fourier de  $u(t)$ ,  $U(j\omega)$ , existe, entonces tenemos que:

$$Y_\Delta(j\omega) = G_1[e^{j\omega\Delta}]U_d[e^{j\omega\Delta}] \quad (11.25)$$

$$Y_r(j\omega) = Y_\Delta(j\omega)G_h(j\omega) = G_1[e^{j\omega\Delta}]G_h(j\omega)U_d[e^{j\omega\Delta}] \quad (11.26)$$

donde:

$$U_d[e^{j\omega\Delta}] = \frac{1}{\Delta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} U(j\omega + j\omega_m\ell) \quad (11.27)$$

### 11.5.2. Discretización de sistemas de tiempo continuo

En este caso nos interesa obtener, dado un esquema como el de la Figura 11.16, un modelo en tiempo discreto que relacione las muestras de la entrada con las muestras de la salida. Esta configuración es relevante, por ejemplo, cuando un sistema físico real es controlado por algún dispositivo digital, por medio de la señal de comando o entrada  $u_d[k]$ . Para estudiar el tema en profundidad se sugiere [3] y [12].

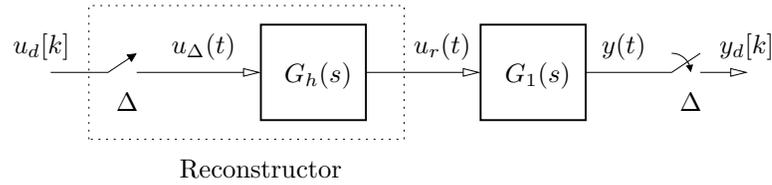


Figura 11.16: Acción de tiempo discreto sobre sistema de tiempo continuo y discretización de la respuesta.

En la Figura 11.16 las variables y bloques tienen el siguiente significado:

$u_d[k]$  : Secuencia de tiempo discreto.

$u_\Delta(t)$  : Tren de impulsos o deltas de Dirac:

$$u_\Delta(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u_d[\ell] \delta(t - \ell\Delta) \quad (11.28)$$

$G_h(s)$  : Retentor de orden cero, de primer orden u otro.

$u_r(t)$  : Resultado del proceso de reconstrucción.

$G_1(s)$  : Sistema de tiempo continuo.

$y(t)$  : respuesta del sistema  $G_1(s)$  a la excitación  $u_r(t)$ .

$y_d[k]$  : señal muestreada o tren del deltas de Kronecker:

$$y_d[k] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y(\ell\Delta) \delta[k - \ell] \quad (11.29)$$

Como consecuencia del muestreo impulsivo en la ecuación (11.28), tenemos que:

$$U_\Delta(s) = \int_{0^-}^{\infty} u_\Delta(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} u_d[k] e^{-sk\Delta} = U_d[z] \Big|_{z=e^{s\Delta}} \quad (11.30)$$

Por lo tanto:

$$U_r(s) = G_h(s)U_\Delta(s) = G_h(s)U_d[e^{s\Delta}] \quad (11.31)$$

$$Y(s) = G_1(s)G_h(s)U_d[e^{s\Delta}] \quad (11.32)$$

En particular, si consideramos como filtro de reconstrucción el retentor de orden cero en la Figura 11.10, entonces tenemos que:

$$U_r(s) = \frac{1 - e^{-s\Delta}}{s} U_d[e^{s\Delta}] \quad (11.33)$$

$$Y(s) = G_1(s)U_r(s) = G_1(s)\frac{1 - e^{-s\Delta}}{s} U_d[e^{s\Delta}] \quad (11.34)$$

Las expresiones de arriba, aunque correctas, no permiten deducir expresiones analíticas para la respuesta temporal, excepto cuando la excitación  $u(t)$  es una señal muy sencilla. Por ejemplo, si la entrada es un escalón unitario,  $u_d[k] = \mu[k]$ , entonces la salida del retentor de orden cero es también un escalón,  $u_r(t) = \mu(t)$ . En consecuencia, la respuesta  $y(t)$  es la respuesta a escalón de  $G_1(s)$ .

Para tener una visión cuantitativa además de conceptual, nos interesa obtener un modelo que relacione directamente  $u_d[k]$  con  $y_d[k] = y(k\Delta)$ . De esta forma, la descripción se expresará en el dominio de tiempo discreto y, usando la transformada Zeta, se obtiene:

$$Y_d[z] = H_d[z]U_d[z] \quad (11.35)$$

Recordemos que la función de transferencia discreta  $H_d[z]$  es la transformada Zeta de la respuesta del sistema a un delta de Kronecker, con condiciones iniciales cero (Capítulo 8), es decir:

$$H_d(z) = \mathcal{Z} \left\{ y_d[k] \Big|_{u_d[k]=\delta[k]} \right\} \quad (11.36)$$

Por otro lado:

$$u_d[k] = \delta[k] \Rightarrow u_\Delta(t) = \delta(t) \Rightarrow u_r(t) = \mu(t) - \mu(t - \Delta) \quad (11.37)$$

Es decir, si  $u_d[k]$  es un delta de Kronecker, entonces  $u_\Delta(t)$  es un delta de Dirac y, por tanto, la salida del retentor de orden cero  $u_r(t)$  es un *pulso unitario* de duración  $\Delta[s]$ . En consecuencia,  $H_d[z]$  se puede calcular muestreando la respuesta a impulso del bloque compuesto por  $G_1(s)$  y  $G_h(s)$ . Si denominamos esa respuesta como  $h(t)$ , y su transformación de Laplace como  $H(s)$ , entonces:

$$H(s) = (1 - e^{-\Delta s}) \frac{G_1(s)}{s} \Rightarrow h(t) = y_s(t) - y_s(t - \Delta) \quad (11.38)$$

donde  $y_s(t)$  es la respuesta de  $G_1(s)$  a un escalón unitario. Finalmente, combinando (11.36)–(11.38) se concluye que:

$$H_d[z] = \mathcal{Z} \left\{ h(t) \Big|_{t=k\Delta} \right\} = Y_s[z] - z^{-1}Y_s[z] = \frac{z-1}{z}Y_s[z] \quad (11.39)$$

en que:

$$Y_s[z] = \mathcal{Z} \left\{ y_s(t) \Big|_{t=k\Delta} \right\} \quad (11.40)$$

El resultado anterior se formaliza en el siguiente lema.

**Lema 11.3** (Función de transferencia de pulso). *Dado el esquema de la Figura 11.16, en que se utiliza como filtro de reconstrucción un retentor de orden cero, entonces el modelo que relaciona las secuencias de entrada  $u_d[k]$  y de salida  $y_d[k]$  está dado por:*

$$Y_d[z] = H_d[z]U_d[z] \quad (11.41)$$

en que  $U_d[z] = \mathcal{Z} \{u_d[k]\}$ ,  $Y_d[z] = \mathcal{Z} \{y_d[k]\}$ , y la función de transferencia de pulso  $H_d[z]$  está dada por:

$$H_d[z] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\} \right\} \quad (11.42)$$

□□□

La ecuación (11.42) establece que la función de transferencia discreta se puede obtener a partir del muestreo de la respuesta a escalón de  $G_1(s)$ .

**Ejemplo 11.3.** *En el esquema de la Figura 11.16, usando retentor de orden cero, determine la función de transferencia desde  $U_d[z]$  hasta  $Y_d[z]$  para los siguientes casos:*

$$(a) \quad G_1(s) = \frac{K}{s+a} \quad ; \quad (b) \quad G_1(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)} \quad (11.43)$$

**Caso (a):** *La respuesta a escalón del sistema está dada por:*

$$y_s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(s+a)} \right\} = \frac{K}{a} (1 - e^{-at}) \quad (11.44)$$

Para calcular  $Y_s[z]$  usamos las muestras de la señal  $y_s(t) \Big|_{t=k\Delta}$ , es decir:

$$\begin{aligned} Y_s[z] &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{a} (1 - e^{-a\Delta k}) \right\} = \frac{Kz}{a} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-a\Delta}} \right) \\ &= \frac{Kz}{a} \frac{1 - e^{-a\Delta}}{(z-1)(z - e^{-a\Delta})} \end{aligned} \quad (11.45)$$

Finalmente:

$$H_d[z] = \frac{z-1}{z} Y_s[z] = \frac{K(1 - e^{-a\Delta})}{a(z - e^{-a\Delta})} \quad (11.46)$$

**Caso (b):** La respuesta a escalón de  $G_1(s)$  en este caso es:

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G_1(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(s+a)(s+b)} \right\} \\ &= \frac{K}{ab} \left( 1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt} \right) \end{aligned} \quad (11.47)$$

Por lo tanto:

$$Y_s[z] = \frac{Kz}{ab} \left( \frac{1}{z-1} + \frac{b}{a-b} \frac{1}{z-e^{-a\Delta}} - \frac{a}{a-b} \frac{1}{z-e^{-b\Delta}} \right) \quad (11.48)$$

con lo cual finalmente obtenemos:

$$H_d[z] = \frac{K}{ab} \frac{\beta_1 z + \beta_0}{(z-e^{-a\Delta})(z-e^{-b\Delta})} \quad (11.49)$$

en que:

$$\beta_1 = a(1-e^{-b\Delta}) - b(1-e^{-a\Delta}) \quad (11.50)$$

$$\beta_0 = -ae^{-a\Delta}(1-e^{-b\Delta}) + be^{-b\Delta}(1-e^{-a\Delta}) \quad (11.51)$$

□□□

Una vez comprendido el proceso conceptual de construir relaciones como las del ejemplo precedente, es conveniente utilizar las herramientas del *software* moderno para la mecánica de los cálculos. Por ejemplo, MAPLE provee una herramienta, *spreadsheet*, que permite tabular resultados como los del ejemplo, para distintas funciones de transferencia  $G_1(s)$ .

## 11.6. Modelos de estado para sistemas muestreados

Como hemos dicho antes, los modelos de tiempo discreto a menudo se obtienen al hacer muestrear las entradas y salidas de un sistema de tiempo continuo. En esta sección, extenderemos los modelos de estado presentados en el Capítulo 10, a sistemas como el de la Figura 11.16, bajo la suposición que se utiliza un retentor de orden cero.

Si consideramos el modelo en variables de estado, lineal, invariante y de tiempo continuo definido en (10.45)–(10.46), con estado inicial  $\mathbf{x}(k_0\Delta) = \mathbf{x}_0$ , entonces podemos usar la ecuación (10.47) en la página 266 para obtener el estado en el siguiente instante de muestreo:

$$\mathbf{x}(k_0\Delta + \Delta) = e^{\mathbf{A}(k_0\Delta + \Delta - k_0\Delta)} \mathbf{x}(k_0\Delta) + \int_{k_0\Delta}^{k_0\Delta + \Delta} e^{\mathbf{A}(k_0\Delta + \Delta - \tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \quad (11.52)$$

Además,  $u(\tau)$  es generada mediante un retentor de orden cero, por lo tanto:

$$u(\tau) = u(k_0\Delta) \quad k_0\Delta \leq \tau < k_0\Delta + \Delta \quad (11.53)$$

De esta forma, reemplazando (11.53) en (11.52) y haciendo el cambio de variable  $\eta = k_0\Delta + \Delta - \tau$ , se obtiene:

$$\mathbf{x}(k_0\Delta + \Delta) = e^{\mathbf{A}\Delta}\mathbf{x}(k_0\Delta) + \int_0^\Delta e^{\mathbf{A}\eta}d\eta \mathbf{B} u(k_0\Delta) \quad (11.54)$$

Entonces, dado el estado y la entrada en un instante  $k_0\Delta$ , la salida del sistema queda definida por la ecuación (10.46), es decir:

$$y(k_0\Delta) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k_0\Delta) + \mathbf{D} u(k_0\Delta) \quad (11.55)$$

Por lo tanto, dado un sistema de tiempo continuo con un modelo en variables de estado con matrices  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ , si muestreamos sus entradas y salidas cada  $\Delta$  segundos, entonces, el sistema muestreado equivalente queda descrito por el modelo de estado en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}(k\Delta + \Delta) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k\Delta) + \mathbf{B}_d u(k\Delta) \quad (11.56)$$

$$y(k\Delta) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(k\Delta) + \mathbf{D}_d u(k\Delta) \quad (11.57)$$

donde las matrices son:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\Delta} \quad ; \quad \mathbf{B}_d = \int_0^\Delta e^{\mathbf{A}\eta}d\eta \mathbf{B} \quad ; \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C} \quad ; \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D} \quad (11.58)$$

Existen diferentes métodos para obtener la matriz  $\mathbf{A}_d$  definida en (11.58), como la exponencial de una matriz. Una opción es utilizar la definición de la exponencial de una matriz en el Apéndice F, sin embargo, a menudo es más simple calcularla empleando la transformada de Laplace inversa, de manera que:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\Delta} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \} \Big|_{t=\Delta} \quad (11.59)$$

Note que el método propuesto involucra tres pasos esencialmente:

- (i) A partir de la matriz  $\mathbf{A}$ , se obtiene la matriz inversa de  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ .
- (ii) A continuación se aplica transformada de Laplace inversa a cada componente de  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ .
- (iii) Finalmente, las funciones temporales en cada una de las entradas de la matriz obtenida se evalúan en  $t = \Delta$ .

La integral que define la matriz  $\mathbf{B}_d$  en (11.58) puede reescribirse, si  $\mathbf{A}$  es no singular, como:

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(e^{\mathbf{A}\Delta} - \mathbf{I})\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B} \quad (11.60)$$

**Ejemplo 11.4.** Consideremos el sistema mecánico del Ejemplo 10.1 en la página 261, que fue descrito en variables de estado según las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} f(t) \quad (11.61)$$

donde  $f(t)$  es la fuerza externa, y donde podemos escoger como salida del sistema ya sea la posición de la masa,  $x_1(t)$ , o su velocidad,  $x_2(t)$ .

Para simplificar las expresiones, supongamos valores para los parámetros del sistema. Se fija la masa  $M = 1$  [kg], la constante de roce viscoso  $D = 1,2$  [Ns/m] y la constante del resorte  $K = 0,32$  [N/m].

La matriz  $\mathbf{A}_d$  se obtiene usando (11.59) :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} s & -1 \\ 0,32 & s + 1,2 \end{array} \right]^{-1} \right\} \Big|_{t=\Delta} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta} & 2,5(e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta}) \\ 0,8(e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta}) & -e^{-0,4\Delta} + 2e^{-0,8\Delta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.62)$$

La matriz  $\mathbf{B}_d$  se obtiene, según (11.58), integrando:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_d &= \int_0^\Delta \begin{bmatrix} 2e^{-0,4\eta} - e^{-0,8\eta} & 2,5(e^{-0,4\eta} - e^{-0,8\eta}) \\ 0,8(e^{-0,4\eta} - e^{-0,8\eta}) & -e^{-0,4\eta} + 2e^{-0,8\eta} \end{bmatrix} d\eta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6,25e^{-0,4\Delta} + 3,125e^{-0,8\Delta} + 3,125 \\ 2,5(e^{-0,4\Delta} - e^{-0,8\Delta}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.63)$$

Note que ambas matrices,  $\mathbf{A}_d$  y  $\mathbf{B}_d$  son funciones de  $\Delta$ . Por tanto, el período de muestreo  $\Delta$ , tiene una clara influencia sobre el comportamiento del sistema muestreado, tal como veremos más adelante.

□□□

### 11.6.1. Efecto del período de muestreo

Si observamos las ecuaciones (11.58), podemos notar que las matrices  $\mathbf{A}_d$  y  $\mathbf{B}_d$  dependen de la elección del período de muestreo  $\Delta$ . Esta elección tiene un efecto directo sobre la posición de los polos del sistema muestreado.

**Lema 11.4.** Consideremos un sistema de tiempo continuo operando en la configuración de la Figura 11.16. Supongamos además que el sistema tiene un conjunto de autovalores, no repetidos dado por  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Si este sistema es muestreado cada  $\Delta$  [s], entonces los autovalores del sistema discreto resultante son  $\{\eta_1, \dots, \eta_\ell\}$ , en que:

$$\eta_\ell = e^{\lambda_\ell \Delta} \quad (11.64)$$

*Demostración*

La matriz del sistema de tiempo continuo  $\mathbf{A}$  puede ser diagonalizada utilizando sus autovalores:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \mathbf{T} \quad (11.65)$$

donde  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  son los autovalores del sistema de tiempo continuo. Entonces, usando (11.58):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}\Delta} = e^{\mathbf{T}^{-1} \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \mathbf{T} \Delta} \\ &= e^{\mathbf{T}^{-1} \text{diag}\{\lambda_1 \Delta, \dots, \lambda_n \Delta\} \mathbf{T}} \\ &= \mathbf{T}^{-1} \text{diag}\{e^{\lambda_1 \Delta}, \dots, e^{\lambda_n \Delta}\} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (11.66)$$

donde el último paso es consecuencia de la definición de la exponencial de una matriz (Apéndice F). De esta forma, a partir de (11.66) resulta evidente que los autovalores de  $\mathbf{A}_d$  son precisamente  $\{e^{\lambda_1 \Delta}, \dots, e^{\lambda_n \Delta}\}$ .

□□□

La Figura 11.17 muestra el estado  $x_1(k\Delta)$  del sistema muestreado en el Ejemplo 11.4, con condición inicial  $\mathbf{x}_o = [1 \ 0]^T$ , para diferentes valores de  $\Delta$ . Note que el eje horizontal corresponde a los instantes discretos  $k$ , por tanto los instantes de tiempo reales son  $t = k\Delta$ [s].

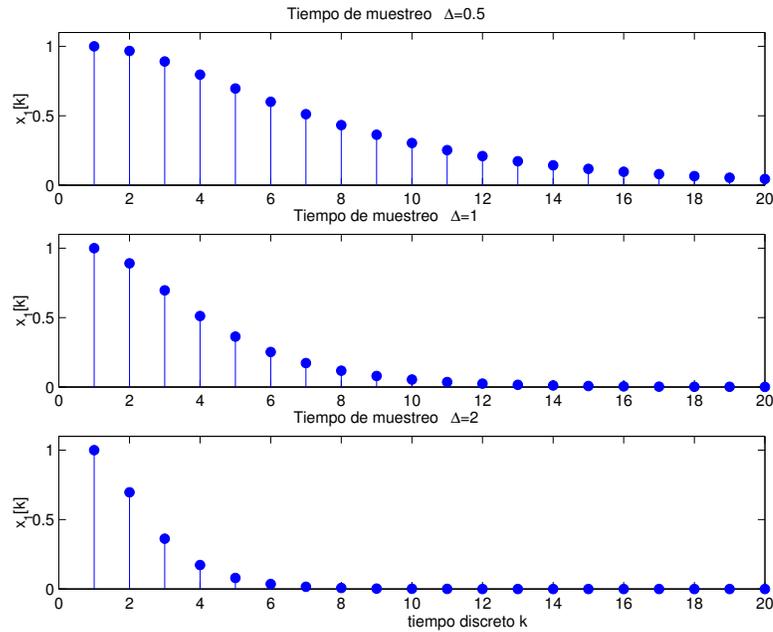


Figura 11.17: Efecto del muestreo en los modos naturales

### 11.6.2. Sistemas muestreados y retardos

En la Sección §10.3, mencionamos que *no es posible* describir sistemas de tiempo continuo con retardos puros mediante un modelo de estado de dimensión finita. Sin embargo, este problema puede ser evitado muestreando las señales. Esto se ilustra a través del siguiente ejemplo.

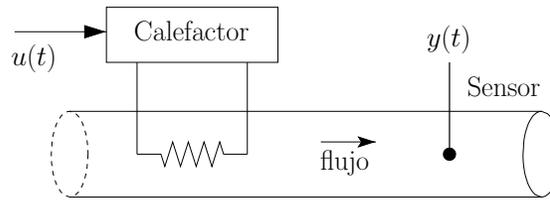


Figura 11.18: Sistema térmico con retardo.

**Ejemplo 11.5.** Considere el sistema térmico que se bosqueja en la Figura 11.18. La temperatura medida en el caudal,  $y(t)$ , depende de la potencia de la fuente de calor. Esta a su vez depende de la señal de control  $u(t)$ . Los cambios en  $u(t)$  producen cambios en la temperatura  $y(t)$ , pero con un retardo no despreciable,  $\tau$  [s].

El sistema linealizado se representa mediante la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s) = \frac{e^{-\tau s} K}{s + \lambda} \quad (11.67)$$

Supongamos luego que las señales de entrada y salida son muestreadas cada  $\Delta$  [s].

El retardo  $\tau$  es función de la velocidad del flujo y supondremos por simplicidad que es un múltiplo del período de muestreo, es decir,  $\tau = m\Delta$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Este retardo se convierte en un factor  $z^m$  en el denominador de la función de transferencia en el dominio de la transformada Zeta. Es decir, el retardo aparece como  $m$  polos en el origen. Por su parte, la ecuación (11.64) establece que cada autovalor del sistema continuo  $s = -\lambda$  se transforman en un autovalor del sistema discreto en  $z = e^{-\lambda\Delta}$ . La función de transferencia resultante es:

$$\frac{Y[z]}{U[z]} = H[z] = \frac{K}{\lambda} \frac{1 - e^{-\lambda\Delta}}{z^m (z - e^{-\lambda\Delta})} \quad (11.68)$$

que puede expresarse mediante el modelo de estado discreto:

$$x_1[t + 1] = x_2[t] \quad (11.69)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x_m[t + 1] = x_{m+1}[t] \quad (11.70)$$

$$x_{m+1}[t + 1] = e^{-\lambda\Delta}x_{m+1}[t] + \frac{K}{\lambda}(1 - e^{-\lambda\Delta})u[t] \quad (11.71)$$

$$y[t] = x_1[t] \quad (11.72)$$

Aún más, podemos interpretar las variables de estado  $x_{m+1}[t], \dots, x_1[t]$  como la temperatura en puntos equi-espaciados entre el calefactor y el sensor de temperatura (suponiendo un caudal de velocidad constante).

□□□

Cuando el retardo  $\tau$  no es múltiplo exacto del período de muestreo  $\Delta$ , en la función de transferencia aparecen adicionalmente un polo en el origen y un cero (Vea el Problema 11.13 y la referencia [13]).

## 11.7. Problemas para el lector

**Problema 11.1.** Calcule la transformada zeta de la señal muestreada  $f[k]$  que resulta de muestrear  $f(t)$  cada  $\Delta$  [s], para

11.1.1  $f(t) = te^{-3t}$ ,  $\Delta = 0,1$

11.1.2  $f(t) = 3 \cos(\pi t)$ ,  $\Delta = 0,5$

11.1.3  $f(t) = \text{signo}(\cos(\pi t))$ ,  $\Delta = 0,2$

**Problema 11.2.** Suponga que se muestrea una señal  $f(t) = 2e^{-0,1t} \cos(4\pi t)$  cada 2 [s]. Grafique  $f(k\Delta)$  y  $f(t)$  en el mismo gráfico. Analice y comente

**Problema 11.3.** Suponga que la transformada zeta de  $f[k] = f(k\Delta)$  es  $F[z]$ . Proponga un  $f(t)$  y un período de muestreo  $\Delta$ , para cada uno de los siguientes casos

11.3.1  $F[z] = \frac{1}{z - 0,6}$

11.3.2  $F[z] = \frac{0,1}{(z - 0,9)z}$

11.3.3  $F[z] = \frac{1}{z^2 - 0,4z + 1,4}$

**Problema 11.4.** Una señal triangular de amplitud unitaria y frecuencia 2 [Hz] es filtrada con un filtro analógico Butterworth de segundo orden y frecuencia de corte 4 [Hz]. Compare con la aplicación del esquema de la Figura 11.15, usando retentor de orden cero y eligiendo adecuadamente el filtro digital  $G_1[z]$  y el período de muestreo  $\Delta$  [s].

**Problema 11.5.** Verifique la definición del retentor de primer orden (11.19).

**Problema 11.6.** Suponga que en el esquema de la Figura 11.16 se usa un retentor de orden cero. Calcule la función de transferencia  $H[z]$  en cada uno de los siguientes casos

11.6.1  $G_1(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}$ ,  $\Delta = 0,2$

11.6.2  $G_1(s) = 4 \frac{-s + 1}{(s + 2)(s + 4)}$ ,  $\Delta = 0,1$

11.6.3  $G_1(s) = \frac{1}{(-s + 2)}$ ,  $\Delta = 0,2$

11.6.4  $G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 0,1s + 4}$ ,  $\Delta = 0,05$

*Sugerencia: use la función **c2d** de MATLAB .*

**Problema 11.7.** Suponga que en la Figura 11.16,  $G_1(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1}$ . Calcule  $H_d[z]$  si  $\Delta = 0,2$  [s] y

**11.7.1**  $\tau = 0,2$

**11.7.2**  $\tau = 0,6$

**11.7.3**  $\tau = 0,3$

**Problema 11.8.** En el problema 11.7, analice, en general, el caso en  $\tau$  es un múltiplo entero de  $\Delta$ , y el caso en que no lo es.

**Problema 11.9.** Verifique que la matriz  $\mathbf{B}_d$  en el Ejemplo 11.4 puede obtenerse mediante la ecuación (11.60).

**Problema 11.10.** Considere una señal  $f(t)$  muestreada cada  $\Delta$  [s]. Construya el modelo de estado para la señal, en cada uno de los siguientes casos

**11.10.1**  $f(t) = 3 \cos(\pi t) + 4$ ,  $\Delta = 0,2$

**11.10.2**  $f(t) = \cos(2\pi t) - \sin(5\pi t + 0,25\pi)$ ,  $\Delta = 0,2$

**Problema 11.11.** Considere la Figura 11.16. Calcule una representación de estado para sistema muestreado para los casos del Problema 11.6. Se sugiere hacerlo manualmente y luego, comprobar con MATLAB .

**Problema 11.12.** Usando su respuestas para Problema 11.6, obtenga directamente la representación de estado. Compare con los resultados que obtuvo al resolver el Problema 11.11

**Problema 11.13.** Considere nuevamente el sistema con retardo puro presentado en el Ejemplo 11.5 en la página 337.

**11.13.1** Verifique la expresión obtenida en (11.68) para la función de transferencia en tiempo discreto.

**11.13.2** Verifique que si el retardo satisface  $0 < \tau < \Delta$ , la función de transferencia de pulso obtenida mediante (11.42) posee un polo en el origen y un cero adicional. Analice los casos límite cuando  $\tau \rightarrow 0$  y cuando  $\tau \rightarrow \Delta$ .

## Capítulo 12

# Construcción de modelos

### 12.1. Introducción

Una de las tareas más interesantes y complejas en el estudio de sistemas es la de construir modelos para describir, de la manera más precisa posible, el sistema bajo análisis. Un modelo es siempre una representación aproximada de la realidad y, en sus aspectos esenciales, se relaciona íntimamente con el propósito que queremos darle. Por ejemplo, un motor eléctrico puede tener distintos modelos según cual es el interés del analista: un modelo electro-mecánico, un modelo térmico, o un modelo que describa los fenómenos vibratorios y de esfuerzos. Sin embargo, una vez definido el propósito del modelo, éste debe capturar los rasgos esenciales del sistema, tanto cualitativa como cuantitativamente.

Para construir modelos se pueden utilizar diversos enfoques. En todos ellos se combinan, en distintas proporciones, el conocimiento que se logra a través de la fenomenología asociada al sistema (física, química, biología, etc.) y el conocimiento experimental, que surge de observaciones y mediciones. En este capítulo, nos concentramos básicamente en la información experimental, aunque la fenomenología es muy útil en la selección de la clase de modelo a utilizar.

Es necesario señalar además, que **el objetivo esencial de un modelo es poder predecir el comportamiento del sistema bajo condiciones de excitación distintas a las observadas**. En otras palabras el modelo es un mecanismo de inferencia y predicción.

El problema que queremos resolver aquí se puede definir de la siguiente forma:

Dada una historia de **datos** del sistema (datos de entrada y salida, en tiempo continuo o discreto), determinar un **modelo** matemático que pueda replicar en la forma más precisa posible, bajo algún **criterio** de optimalidad, la historia de datos disponibles.

En la determinación de un modelo existen pues, tres elementos fundamentales:

1. La selección de una **clase de modelos**,  $\mathcal{M}$ , por ejemplo, una ecuación diferencial o recursiva de un orden dado con parámetros (coeficientes) a determinar. Más adelante veremos que los métodos existentes permiten considerar modelos no lineales, pero en que los parámetros a determinar aparecen linealmente como, por ejemplo, en la ecuación (12.12) en la página 345.
2. Un **experimento** que permite recolectar datos, por ejemplo, el aplicar una excitación de amplio espectro al sistema. Es importante que la historia de datos obtenida sea tal que se distingan los rasgos característicos del sistema. Por ejemplo, si el sistema que deseamos modelar es una red RLC (Ejemplo 3.6 en la página 46), no nos servirá recolectar datos de la respuesta estacionaria del sistema cuando las fuentes que alimentan la red son constantes, ya que las características esenciales de dicho sistema están contenidas en la respuesta transitoria.
3. Un **criterio o costo** a optimizar asociado a la calidad del modelo que permite determinar el mejor modelo dentro de la clase elegida  $\mathcal{M}$ . Este criterio puede ser, por ejemplo, minimizar la suma (o integral) de los errores de predicción al cuadrado.

La clase de modelos se elige, usualmente, usando criterios fenomenológicos. Por ejemplo, si el comportamiento del sistema a modelar está dominado por tres componentes dinámicos, una descripción razonable es el conjunto de las ecuaciones diferenciales de tercer orden.

En muchos casos, el experimento no puede ser diseñado de acuerdo a las necesidades del analista, sino que se deben usar datos provenientes de la operación normal del sistema a modelar. Además, es común que se desee o necesite ir refinando el modelo en forma recursiva (e incluso en tiempo real, es decir, se va refinando el cálculo a medida que se van obteniendo nuevos datos).

Es importante notar que en el procedimiento descrito, cuando se resuelve el problema de optimización, sólo queda garantizado que el modelo obtenido es el óptimo *dentro de la clase elegida*. Si el mecanismo generador de los datos (el sistema a modelar) no pertenece a la clase de modelos elegida, como suele suceder, entonces siempre habrá un error de modelado, sin importar cuan informativo sea el experimento para recolectar datos. Aún más, desde el punto de vista práctico, puede ser incluso cuestionable el suponer la existencia de un *modelo verdadero*, pues por muy complejo y elaborado que sea éste siempre habrá diferencias con el sistema real.

Finalmente, es importante señalar que existe una gran cantidad de literatura en el área de **Identificación de Sistemas**, que aborda el problema de la obtención de un modelo para un sistema (o conjunto de datos) dado. En este capítulo nos concentraremos en el problema específico de la estimación de parámetros para una clase de modelos dada, usando el método de mínimos cuadrados, ampliamente utilizado por su simplicidad y robustez. Es importante mencionar además que estudiaremos los problemas de convergencia y sesgo, no

haremos consideraciones probabilísticas sobre la presencia de ruido en los datos, ni analizaremos las propiedades estadísticas de los estimadores utilizados. El lector interesado en estos y otros temas relacionados puede consultar la amplia literatura existente, por ejemplo, [11, 18, 31, 41].

## 12.2. Modelos en tiempo continuo.

Si bien la mayor parte de la literatura sobre identificación de sistemas considera sólo el caso de sistemas de tiempo discreto, incluimos en esta sección el modelado de sistemas en tiempo continuo para ilustrar, como hemos hecho a lo largo del texto, que los principios y conceptos fundamentales involucrados se pueden aplicar indistintamente en ambos ámbitos.

Para motivar la discusión y el tratamiento teórico del tema, consideramos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 12.1.** *Suponga que la clase de modelos elegida,  $\mathcal{M}$ , está definida por*

$$y(t) = \alpha (u(t))^3 + e(t) \quad (12.1)$$

donde  $u(t)$  es la entrada del sistema a modelar, y  $\alpha$  es un parámetro a determinar que caracteriza a la clase  $\mathcal{M}$ .

Suponga además que se realiza un experimento recolector de datos en el sistema a modelar. Como resultado del mismo se obtienen datos<sup>1</sup> de entrada y salida,  $u(t)$  e  $y(t)$ , en el intervalo  $[0; t_f]$ .

La mejor estimación del valor de  $\alpha$  en (12.1), que denotaremos por  $\hat{\alpha}$ , se puede calcular, por ejemplo, minimizando un funcional de costo  $J(\alpha)$  de la forma:

$$J(\alpha) = \int_0^{t_f} (y(\tau) - \alpha (u(\tau))^3)^2 d\tau \quad (12.2)$$

De este modo:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} J(\alpha) \quad (12.3)$$

En este ejemplo, la función a minimizar depende sólo de una variable, el parámetro  $\alpha$ , y la minimización se realiza derivando  $J(\alpha)$  con respecto a  $\alpha$  e igualando a cero. Este proceso de cálculo lleva a:

$$\hat{\alpha} = \left[ \int_0^{t_f} (u(\tau))^6 d\tau \right]^{-1} \int_0^{t_f} y(\tau)(u(\tau))^3 d\tau \quad (12.4)$$

Note que si el sistema a modelar pertenece a la clase de modelos elegida, es decir, si existe  $\alpha_o$  tal que  $y(t) = \alpha_o(u(t))^3$ , entonces  $\hat{\alpha} = \alpha_o$ , siempre que  $u(t) \neq 0$  en algún lapso no cero dentro del intervalo  $[0; t_f]$ . Esto puede ser verificado al sustituir  $y(t)$  por  $\alpha_o(u(t))^3$  en (12.4).

□□□

<sup>1</sup>Note que se trata de datos experimentales de la planta

La ecuación (12.4) arroja una estimación del parámetro *a posteriori*, es decir, una vez que se han recogido todos los datos, por lo que también se le denomina estimación de tanda (*batch*). Existe una formulación alternativa donde  $\hat{\alpha}$  evoluciona a medida que se obtienen más datos, es decir, la estimación de  $\alpha$  se realiza en línea o en tiempo real. Ese enfoque es desarrollado en detalle a continuación.

**Ejemplo 12.2.** Para hacer el tratamiento más simple, definimos las siguientes variable auxiliares:

$$\phi(t) = (u(t))^3 \quad (12.5)$$

$$p(t) = \left[ \int_0^t (u(\tau))^6 d\tau \right]^{-1} = \left[ \int_0^t (\phi(\tau))^2 d\tau \right]^{-1} \quad (12.6)$$

De esta forma, reemplazando  $t_f$  por  $t$  en (12.4) tenemos:

$$\hat{\alpha}(t) = p(t) \int_0^t y(\tau)\phi(\tau) d\tau \quad (12.7)$$

Esta expresión para el parámetro óptimo  $\hat{\alpha}(t)$  puede entenderse como la respuesta de un sistema dinámico, es decir, como solución de una ecuación diferencial. Al derivar (12.6) respecto al tiempo  $t$ , se obtiene:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -(p(t)\phi(t))^2 \iff \frac{d(p(t))^{-1}}{dt} = (\phi(t))^2 \quad (12.8)$$

Luego, derivando (12.7) y usando (12.8) se obtiene:

$$\frac{d\hat{\alpha}(t)}{dt} = p(t)\phi(t) \underbrace{[y(t) - \hat{\alpha}(t)\phi(t)]}_{e(t)} \quad (12.9)$$

donde  $e(t)$  es el error que se comete al predecir la salida  $y(t)$  usando el modelo y la entrada observada de la planta.

Las ecuaciones (12.8) y (12.9) permiten calcular  $\hat{\alpha}(t)$  en tiempo real, por ejemplo, usando SIMULINK .

Note que, para que la simulación funcione, se debe asignar una condición distinta de cero a  $p(0)$ . Se invita al lector a estudiar el efecto de distintas elecciones para  $p(0)$ . El lector también podrá observar, en cambio, que el valor inicial  $\hat{\alpha}(0)$  puede ser cualquiera, incluso cero.

□□□

De esta forma, los ejemplos precedentes ilustran dos formas de estimar el parámetro  $\alpha$  en el modelo (12.1):

- En el Ejemplo 12.1 utilizamos la ecuación (12.4), que requiere conocer previamente un conjunto de datos del sistema en un periodo de tiempo no cero.
- En el Ejemplo 12.2, en cambio, las ecuaciones diferenciales (12.8) y (12.9) permiten calcular la estimación óptima del parámetro  $\alpha$ ,  $\hat{\alpha}(t)$ , a medida que se obtienen las mediciones.

### 12.2.1. Teoría básica

A continuación analizamos el método general para sistemas de tiempo continuo, siguiendo los principios esbozados en los dos ejemplos anteriores.

La **clase de modelos**  $\mathcal{M}$  que consideramos es el conjunto de modelos lineales en los parámetros a determinar, es decir, todos los modelos que pueden expresarse como la regresión lineal:

$$y(t) = \phi(t)^T \theta + e(t) \quad (12.10)$$

donde  $y(t)$  es la salida de la cual se conocen datos,  $\phi(t)$  se denomina vector de regresión, y sus elementos, llamados regresores, pueden contener tanto elementos de la salida  $y(t)$  como de la entrada  $u(t)$ . Por su parte, el vector  $\theta \in \mathbb{R}^p$  contiene los parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  que distinguen cada elemento en  $\mathcal{M}$ . Por su parte,  $e(t)$  condensa nuestra certeza que, en general, no existe valor de  $\theta$  tal que  $\phi(t)^T \theta$  genere exactamente las mediciones en  $y(t)$ .

En la literatura de identificación de sistemas existen diferentes tendencias para la construcción del vector de regresión  $\phi(t)$ , en base a supuestos sobre los datos disponibles de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$ . En este texto sólo consideraremos el método de **mínimos cuadrados**, ampliamente utilizado, que se caracteriza por su robustez y simplicidad. Éste se basa en la entrada y la salida del sistema, y debe su nombre a la minimización del error cuadrático

$$e(t)^2 = (y(t) - \phi(t)^T \theta)^2 \quad (12.11)$$

acumulado en el intervalo de observación, es decir, para el caso de tiempo continuo, corresponde a la integral (12.15). Este enfoque es conocido por su sigla inglesa LSE, *Least Squares Estimate*.

**Nota 12.1.** *El método de mínimos cuadrados se remonta a Gauss y pertenece a una clase más general de métodos conocidos como métodos del error de predicción. Este enfoque es ampliamente utilizado, por ejemplo, en MATLAB y es conocido por su sigla inglesa PEM, Prediction Error Methods [31].*

Note que la expresión (12.10) es bastante general, ya que la única restricción es que el modelo sea *lineal en los parámetros a estimar*, y no necesariamente lineal entre entrada y salida. Por ejemplo, el modelo:

$$y(t) = a\sqrt{u(t)} + bu(t) + c \cos(u(t)) + d + e(t) \quad (12.12)$$

define una relación no lineal entre las señales  $u(t)$  e  $y(t)$ , y, sin embargo, es lineal en los parámetros  $a, b, c, d$ . Esto significa que puede ser escrito en la forma (12.10), en que:

$$\phi(t) = [\sqrt{u(t)} \quad u(t) \quad \cos(u(t)) \quad 1]^T \quad (12.13)$$

$$\theta = [a \quad b \quad c \quad d]^T \quad (12.14)$$

Veremos más adelante, que la forma (12.10) es lo suficientemente general para describir también sistemas dinámicos.

Para modelar un sistema con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , como miembro de la clase  $\mathcal{M}$ , nos interesa encontrar el vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$  óptimo, que denotamos por  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  y que minimiza el costo cuadrático:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{t_f} (y(\tau) - \boldsymbol{\phi}(\tau)^T \boldsymbol{\theta})^2 d\tau \quad (12.15)$$

El producto  $\boldsymbol{\phi}(\tau)^T \boldsymbol{\theta}$  corresponde a una estimación de la salida del sistema a modelar, utilizando el elemento genérico de la clase  $\mathcal{M}$ . El lector puede apreciar que la diferencia  $e(\tau) = y(\tau) - \boldsymbol{\phi}(\tau)^T \boldsymbol{\theta}$  puede interpretarse como el *error de predicción*, y es un caso especial del enfoque PEM, el que abarca situaciones más generales.

El método de estimación cuadrática permite determinar cual de los elementos de  $\mathcal{M}$  es el que arroja la predicción con menor error cuadrático acumulado. Esto es equivalente a seleccionar el óptimo  $\boldsymbol{\theta}$ . De esta forma, el mejor estimador  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  está dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} J(\boldsymbol{\theta}) \quad (12.16)$$

La minimización de (12.15) se hace a través del procedimiento tradicional: derivando respecto de la incógnita y luego haciendo esa derivada igual a cero, con la salvedad que, en este caso, se trata de funciones de varias variables.

**Teorema 12.1.** *Dado la clase de modelos  $\mathcal{M}$ , definida por:*

$$y(t) = \boldsymbol{\phi}(t)^T \boldsymbol{\theta} + e(t) \quad (12.17)$$

*y una historia de datos para  $y(t)$  y para los regresores en  $\boldsymbol{\phi}(t)$  en el intervalo  $[0, t_f]$ , entonces el error cuadrático acumulado dado por el costo:*

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \int_0^{t_f} (y(\tau) - \boldsymbol{\phi}(\tau)^T \boldsymbol{\theta})^2 d\tau \quad (12.18)$$

*es minimizado por la elección:*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[ \int_0^{t_f} \boldsymbol{\phi}(\tau) \boldsymbol{\phi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \int_0^{t_f} \boldsymbol{\phi}(\tau) y(\tau) d\tau \quad (12.19)$$

### **Demostración**

*Al considerar la derivada del costo  $J(\boldsymbol{\theta})$  respecto a  $\boldsymbol{\theta}$ , vemos que se trata de la derivada de una función escalar respecto de un vector, por tanto la derivada corresponde al gradiente  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}$ :*

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{dJ(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} = -2 \int_0^{t_f} \boldsymbol{\phi}(\tau) (y(\tau) - \boldsymbol{\phi}(\tau)^T \boldsymbol{\theta}) d\tau \quad (12.20)$$

*Al hacer cero el gradiente se obtiene el estimado  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  dado por (12.19).*

Podemos verificar que esta última expresión minimiza el funcional de costo (12.18) calculando la segunda derivada vectorial, es decir, el Hessiano de  $J(\boldsymbol{\theta})$ :

$$\mathbf{H}_J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{d^2 J(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}^2} = 2 \int_0^{t_f} \boldsymbol{\phi}(\tau)\boldsymbol{\phi}(\tau)^T d\tau \quad (12.21)$$

El Hessiano  $\mathbf{H}_J(\boldsymbol{\theta})$  obtenido es una matriz positiva definida (ver Apéndice F) bajo condiciones muy generales para el vector  $\boldsymbol{\phi}(\tau)$  en  $\tau \in [0; t_f]$ , cuya deducción escapa al marco de este texto.

□□□

Los resultados precedentes pueden ser ilustrados con el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 12.3.** Considere la función  $y(t) = \cos(2\pi t)$ , en un período, es decir, en  $t \in [0; 1]$ . Determine los coeficientes del polinomio de segundo orden que mejor aproxima  $f(t)$  en el intervalo dado.

Las especificaciones precedentes significan que la clase de modelos elegida  $\mathcal{M}$ , está definida por:

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + e(t) = [1 \quad t \quad t^2] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + e(t) \quad (12.22)$$

lo que permite hacer las siguientes asociaciones:

$$\boldsymbol{\phi}(t)^T = [1 \quad t \quad t^2]; \quad \boldsymbol{\theta}^T = [a_0 \quad a_1 \quad a_2] \quad (12.23)$$

de donde se obtiene:

$$\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)^T = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{bmatrix}; \quad y(t)\boldsymbol{\phi}(t)^T = [\cos(2\pi t) \quad t\cos(2\pi t) \quad t^2\cos(2\pi t)] \quad (12.24)$$

Los coeficientes óptimos, en mínimo cuadrado del error, se calculan entonces usando (12.19). Para el cálculo, se utiliza el siguiente código MAPLE

```
MAPLE
>Fi:=Matrix([[1],[t],[t^2]]):FiT:=Transpose(Fi):
>FiFiT:=Multiply(Fi,FiT):Fiy:=ScalarMultiply(Fi,cos(2*Pi*t)):
>IFiFiT:=MatrixInverse(map(int,FiFiT,t=0..1)):
>IFiy:=map(int,Fiy,t=0..1):
>teta:=Multiply(IFiFiT,IFiy):
```

el que entrega, como resultado:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^T = [\hat{a}_0 \quad \hat{a}_1 \quad \hat{a}_2] = \frac{1}{\pi^2} [15 \quad -90 \quad 90] \quad (12.25)$$

Para efectos de comparación se muestran en la Figura 12.1 la señal original y la aproximación óptima dada por

$$\boldsymbol{\phi}(t)^T \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\pi^2} (15 - 90t + 90t^2) \quad (12.26)$$

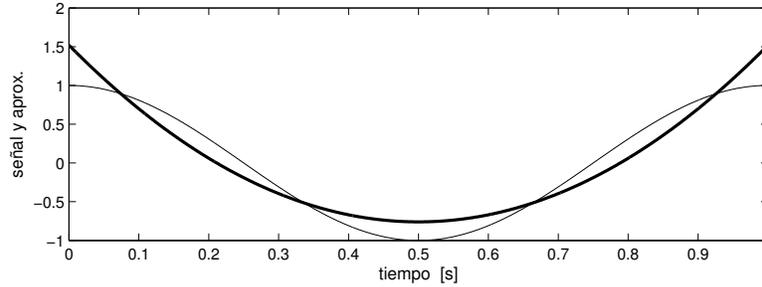


Figura 12.1: Señal  $y(t)$  (en línea fina) y aproximación óptima (en línea gruesa).

La expresión (12.19) proporciona una forma de construir el modelo, estimando  $\boldsymbol{\theta}$ , una vez que se han acumulado los datos en un lapso  $[0; t_f]$ . Tal como se ilustró en el Ejemplo 12.2 en la página 344, también es posible construir un estimador  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ , que vaya evolucionando a medida que se van considerando nuevos datos. Este procedimiento también evita la inversión de la matriz que se requiere en (12.19), como se aprecia en el siguiente teorema.

**Teorema 12.2.** Considere la clase de modelos  $\mathcal{M}$  definida por (12.17), el funcional de costo (12.18) en que  $t_f = t$  y un experimento que permite construir  $\boldsymbol{\phi}(\tau)$  para  $\tau \in [0; t]$ . Entonces el estimador óptimo,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$  se puede obtener a través de:

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -\mathbf{P}(t)\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)^T\mathbf{P}(t) \quad (12.27)$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\phi}(t) \left( y(t) - \boldsymbol{\phi}(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \right) = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\phi}(t)e(t) \quad (12.28)$$

### Demostración

Definamos previamente la matriz  $\mathbf{P}(t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  de la forma:

$$\mathbf{P}(t) = \left[ \int_0^t \boldsymbol{\phi}(\tau)\boldsymbol{\phi}(\tau)^T d\tau \right]^{-1} \quad (12.29)$$

y la matriz:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}(t)^{-1} = \int_0^t \boldsymbol{\phi}(\tau)\boldsymbol{\phi}(\tau)^T d\tau \quad (12.30)$$

Entonces:

$$\frac{d\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}\mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = 0 \quad (12.31)$$

Esto lleva a:

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -\mathbf{P}(t) \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} \mathbf{P}(t) = -\mathbf{P}(t) \boldsymbol{\phi}(t) \boldsymbol{\phi}(t)^T \mathbf{P}(t) \quad (12.32)$$

donde hemos usado el hecho que

$$\frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = \boldsymbol{\phi}(t) \boldsymbol{\phi}(t)^T \quad (12.33)$$

Por otro lado, a partir de (12.19), considerando  $t_f = t$ , tenemos que:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{P}(t) \int_0^t \boldsymbol{\phi}(\tau) y(\tau) d\tau \quad (12.34)$$

donde, al derivar, se obtiene:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \int_0^{t_f} \boldsymbol{\phi}(\tau) y(\tau) d\tau + \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\phi}(t) y(t) \quad (12.35)$$

$$= -\mathbf{P}(t) \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} \underbrace{\int_0^{t_f} \boldsymbol{\phi}(\tau) y(\tau) d\tau}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)} + \mathbf{P}(t) \boldsymbol{\phi}(t) y(t) \quad (12.36)$$

Finalmente, usando (12.33), se obtiene la expresión en la ecuación (12.28).  $\square\square\square$

El Teorema 12.2 establece un procedimiento a través del cual la estimación de los parámetros del modelo se va obteniendo a medida que se dispone de nueva información. Esto se conoce como estimación en línea, o en tiempo real. Para utilizar esta técnica, se requiere inicializar el algoritmo con valores para  $\mathbf{P}(0)$  y para  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ . Usualmente se escoge  $\mathbf{P}(0)$  como una matriz diagonal con elementos positivos grandes; esto se justifica a partir de la ecuación (12.28), donde se observa que  $\mathbf{P}(t)$  juega el rol de ganancia de corrección. La elección de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$  es usualmente cero, con ello reflejamos la ausencia de información inicial sobre los valores de los parámetros; sin embargo, si hay información disponible, la elección puede reflejar esa información. Note que, en general,  $\mathbf{P}(t)$  tiende a cero, ya que  $\mathbf{Q}(t)$  crece constantemente, por lo que  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$  tiende a un valor constante, aunque no necesariamente el error de predicción tiende a cero.

### 12.2.2. Modelos lineales

La teoría desarrollada en la sección precedente se aplica a cualquier clase de modelos  $\mathcal{M}$ , con la única condición que los miembros de esa clase sean lineales en el vector de parámetros, es decir, tengan la forma (12.10). Esto naturalmente que incluye modelos no lineales en la entrada y la salida, tal como se ilustró en los Ejemplos 12.1 y 12.2. Sin embargo, en esta sección enfocaremos nuestra atención en modelos dinámicos lineales de tiempo continuo. Con este objetivo

definiremos la clase  $\mathcal{M}$  por la ecuación diferencial (3.1) en la página 36, que reproducimos a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) \\ = b_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2} \frac{d^{n-2} u(t)}{dt^{n-2}} + \dots + b_0 u(t) + e(t) \end{aligned} \quad (12.37)$$

Antes de desarrollar la metodología general, y para adquirir mayor perspectiva, examinaremos un ejemplo muy simple:

**Ejemplo 12.4.** La clase  $\mathcal{M}$  es elegida como en (12.37), con  $n = 1$ , es decir:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + e(t) \quad (12.38)$$

La primera opción para construir la forma (12.10) en este caso es:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \left[ \int_0^t u(\tau) d\tau \quad - \int_0^t y(\tau) d\tau \right]^T \quad (12.39)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [b_0 \quad a_0]^T \quad (12.40)$$

Sin embargo, esta forma de selección del vector de regresión  $\boldsymbol{\phi}(t)$  no es razonable, pues, debido a las integrales presentes, basta que las señales tengan un valor medio distinto de cero para que el vector  $\boldsymbol{\phi}(t)$  crezca sin límite.

Intentaremos otro enfoque, para cuya descripción usaremos el operador de Heaviside, definido en (3.2). El modelo (12.38) puede ser re-escrito como:

$$0 = -(\rho + a_0)y(t) + b_0 u(t) + e(t) \quad (12.41)$$

Supongamos se define un polinomio operador mónico estable:

$$E(\rho) = \rho + e_0 \quad , \quad e_0 > 0 \quad (12.42)$$

De esta forma (12.41) se puede escribir como:

$$0 = -\frac{\rho + a_0}{E(\rho)} y(t) + \frac{b_0}{E(\rho)} u(t) + \frac{1}{E(\rho)} e(t) \quad (12.43)$$

Sumando  $y(t)$  a ambos lados se obtiene:

$$y(t) = y(t) - \frac{\rho + a_0}{E(\rho)} y(t) + \frac{b_0}{E(\rho)} u(t) + \frac{1}{E(\rho)} e(t) = (e_0 - a_0) \frac{y(t)}{E(\rho)} + b_0 \frac{u(t)}{E(\rho)} + \frac{1}{E(\rho)} e(t) \quad (12.44)$$

Así, una elección natural es:

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \left[ \frac{u(t)}{E(\rho)} \quad \frac{y(t)}{E(\rho)} \right]^T \quad (12.45)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [b_0 \quad e_0 - a_0]^T \quad (12.46)$$

Note que en este caso el vector de regresión contiene la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  **filtradas** por  $1/E(\rho)$ .

□□□

A continuación, y siguiendo la metodología introducida en el Ejemplo 12.4, analicemos el caso más general. Definimos:

$$A(\rho) = \rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \dots a_0 \quad (12.47)$$

$$B(\rho) = b_{n-1}\rho^{n-1} + b_{n-2}\rho^{n-2} + \dots b_0 \quad (12.48)$$

$$E(\rho) = \rho^n + e_{n-1}\rho^{n-1} + \dots e_0 \quad (12.49)$$

donde observamos que  $A(\rho)$  y  $E(\rho)$  se eligen como polinomios mónicos y  $E(\rho)$  es estable, es decir, tiene todos sus ceros con parte real negativa. De esta forma, el modelo (12.37) se puede re-escribir como:

$$0 = -\frac{A(\rho)}{E(\rho)}y + \frac{B(\rho)}{E(\rho)}u(t) + \frac{1}{E(\rho)}e(t) \quad (12.50)$$

Si ahora sumamos  $y(t)$  a ambos lados se obtiene:

$$y(t) = \frac{E(\rho) - A(\rho)}{E(\rho)}y + \frac{B(\rho)}{E(\rho)}u(t) + \frac{1}{E(\rho)}e(t) \quad (12.51)$$

Entonces la elección de  $\phi(t)$  consistente con el método LSE es:

$$\phi(t) = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\rho^{n-1}u(t)}{E(\rho)} & \frac{\rho^{n-2}u(t)}{E(\rho)} & \dots & \frac{u(t)}{E(\rho)} & \frac{\rho^{n-1}y(t)}{E(\rho)} & \frac{\rho^{n-2}y(t)}{E(\rho)} & \dots & \frac{y(t)}{E(\rho)} \end{array} \right]^T \quad (12.52)$$

y el vector de parámetros es:

$$\theta = [b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \dots \quad b_0 \quad e_{n-1} - a_{n-1} \quad e_{n-2} - a_{n-2} \quad \dots \quad e_0 - a_0]^T \quad (12.53)$$

El desarrollo precedente tiene una diferencia con la teoría básica y, en particular con el funcional de costo a minimizar, el que pasó de la expresión dada en (12.15), a:

$$J_f(\theta) = \int_0^{t_f} \{e_f(t)\}^2 dt = \int_0^{t_f} (y_f(\tau) - \phi_f(\tau)^T \theta)^2 d\tau \quad (12.54)$$

donde el subíndice f en  $e_f(t)$ ,  $y_f(\tau)$  y  $\phi_f(\tau)$ , corresponde a filtrar  $e(t)$ ,  $y(\tau)$  y  $\phi(\tau)$ , respectivamente, a través del filtro con transferencia de Fourier  $1/E(j\omega)$ .

**Ejemplo 12.5.** Supongamos que la clase  $\mathcal{M}$  es el conjunto de ecuaciones diferenciales de tercer orden, lineales y de coeficientes constantes, entonces:

$$\phi(t) = \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{\rho^2 u(t)}{E(\rho)} & \frac{\rho u(t)}{E(\rho)} & \frac{u(t)}{E(\rho)} & \frac{\rho^2 y(t)}{E(\rho)} & \frac{\rho y(t)}{E(\rho)} & \frac{y(t)}{E(\rho)} \end{array} \right]^T \quad (12.55)$$

$$\theta = [b_2 \quad b_1 \quad \dots \quad b_0 \quad e_2 - a_2 \quad e_1 - a_1 \quad e_0 - a_0]^T \quad (12.56)$$

donde  $E(\rho)$  es cualquier polinomio de tercer grado cuyas raíces tenga parte real menor que cero.

□□□

Note que las señales que constituyen los regresores, en el vector (12.52) y en los ejemplos analizados, corresponden a las señales originales  $u(t)$  e  $y(t)$  filtradas, sin embargo, todos los filtros involucrados son estables y estrictamente propios. La elección del ancho de banda del filtro es uno de los parámetros del método que el usuario puede ajustar para lograr ciertas características del error.

**Ejemplo 12.6.** Consideremos el mismo sistema del Ejemplo 12.4, con  $b_0 = 5$  y  $a_0 = 3$ . Usando SIMULINK, se construye un esquema para obtener, en línea, estimaciones para los valores de  $b_0$  y  $a_0$ . Esta simulación sigue el Teorema 12.2 y se desarrolla con las siguientes características:

- (i) tiempo de simulación: 3 [s],
- (ii) polinomio  $E(\rho) = \rho + 10$ ,
- (iii) valores iniciales  $\mathbf{P}(0) = 10000\mathbf{I}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = [0 \ 0]^T$ , y
- (iv) el sistema es excitado con una onda cuadrada y simétrica, de frecuencia 1 [Hz].

Los resultados de la estimación de los parámetros que arroja la simulación se muestran en la Figura 12.2.

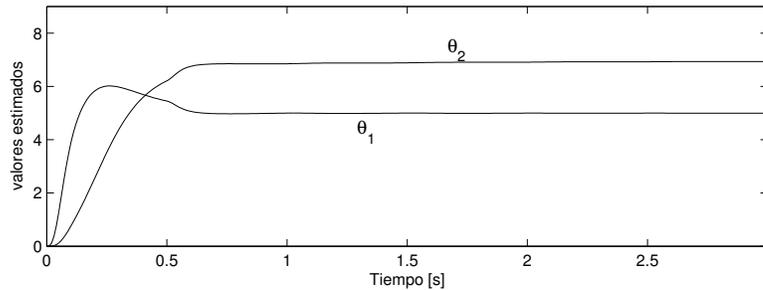


Figura 12.2: Aplicación de método en línea para estimar parámetros en Ejemplo 12.6.

Observamos que  $\boldsymbol{\theta}(2) \approx [5 \ 7]^T$  y dado que  $\boldsymbol{\theta} = [b_0 \ e_0 - a_0]^T$ , entonces los valores estimados de los parámetros son  $\hat{b}_0 \approx 5$  y  $\hat{a}_0 \approx 5$ , que coinciden con los valores reales de los parámetros.

Note que en este ejemplo, el sistema cuyo modelo se desea construir, pertenece a la misma clase  $\mathcal{M}$ , a la que pertenece el modelo cuyos parámetros se estiman. Ello, y la ausencia de errores en la medición de  $u(t)$  e  $y(t)$ , permiten que haya un calce perfecto.

### 12.3. Modelos en tiempo discreto

La construcción de modelos para sistemas de tiempo continuo es de gran interés conceptual, sin embargo, la implementación en la práctica de los métodos

propuestos en las secciones anteriores requiere, en última instancia el uso de un procesador u otro dispositivo digital. Por lo tanto, necesariamente existe un proceso de muestreo de las señales (ver Capítulo 11), a partir de las cuales nos interesa estimar un modelo de tiempo discreto para el sistema.

Al igual que en el caso de tiempo continuo, presentamos a continuación un ejemplo como introducción y motivación en este tema.

**Ejemplo 12.7.** *Suponga que la clase de modelos elegida,  $\mathcal{M}$ , está definida por:*

$$y[t] = \alpha(u[t])^3 + e[t] \quad (12.57)$$

donde  $u[t]$  es la entrada del sistema a modelar y  $e[t]$  captura el error del modelo.

Suponga además que se realiza un experimento para obtener información sobre el sistema a modelar. Como resultado del mismo se obtienen datos de entrada y salida,  $u[t]$  e  $y[t]$ , en el intervalo  $[0; N]$ .

De esta forma, el mejor valor de  $\alpha$  en (12.57), que denotamos por  $\hat{\alpha}$ , se puede calcular, por ejemplo, minimizando un funcional de costo  $J(\alpha)$  de la forma:

$$J(\alpha) = \sum_{\ell=0}^N \left( y[\ell] - \alpha(u[\ell])^3 \right)^2 = \sum_{\ell=0}^N e[\ell]^2 \quad (12.58)$$

Así, tenemos que:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} J(\alpha) \quad (12.59)$$

La minimización se realiza derivando  $J(\alpha)$  respecto a la variable  $\alpha$ , e igualando a cero. Esto nos lleva a:

$$\hat{\alpha} = \left[ \sum_{\ell=0}^N (u[\ell])^6 \right]^{-1} \sum_{\ell=0}^N y[\ell] (u[\ell])^3 \quad (12.60)$$

Note que si el sistema a modelar pertenece a la clase de modelos elegida, es decir, si existe  $\alpha_o$  tal que  $y[t] = \alpha_o(u[t])^3$ , entonces  $\hat{\alpha} = \alpha_o$ , siempre que  $u[t] \neq 0$  en algún lapso no cero en el intervalo  $[0; N]$ .

□□□

La ecuación (12.60) arroja una estimación *a posteriori* del parámetro  $\alpha$ , es decir, una vez que se han recogido los datos. Sin embargo, existe una formulación alternativa donde  $\hat{\alpha}$  evoluciona a medida que se obtienen más datos, tal como se demuestra a continuación.

**Ejemplo 12.8.** *Para hacer el tratamiento más simple haremos las siguientes substituciones:*

$$p[t] = \left[ \sum_{\ell=0}^t (u[\ell])^6 \right]^{-1} \quad (12.61)$$

$$\phi[t] = (u[t])^3 \quad (12.62)$$

Entonces, al reemplazar  $N$  por  $t$  en (12.60) tenemos:

$$\hat{\alpha}[t] = p[t] \sum_{\ell=0}^t y[\ell] \phi[\ell] \quad (12.63)$$

Luego, usando la definición (12.61), tenemos que:

$$p[t] = \frac{p[t-1]}{1 + p[t-1] \phi[t]^2} = p[t-1] - p[t-1] \phi[t]^2 p[t] \quad (12.64)$$

Combinando (12.63) y (12.64) se obtiene:

$$\hat{\alpha}[t] = \hat{\alpha}[t-1] + p[t] \phi[t] \underbrace{(y[t] - \hat{\alpha}[t-1] \phi[t])}_{e[t]} \quad (12.65)$$

donde  $e[t]$  es el error que se comete al predecir la salida  $y[t]$  usando el modelo y la entrada observada de la planta.

Las ecuaciones (12.64) y (12.65) permiten calcular  $\hat{\alpha}[t]$  en tiempo real, como se puede verificar realizando una simulación en SIMULINK.

Al igual que en el caso de tiempo continuo, para que la simulación funcione se debe asignar una condición distinta de cero a  $p[0]$ . Se invita al lector a observar el efecto de distintas elecciones para  $p[0]$ . El lector puede verificar, en cambio, que el valor inicial  $\hat{\alpha}[0]$  puede ser cualquiera, incluso cero.

□□□

De esta forma, los ejemplos precedentes ilustran dos formas de estimar el parámetro  $\alpha$  en el modelo (12.57):

- En el Ejemplo 12.7 utilizamos la ecuación (12.60), que requiere conocer previamente un conjunto de datos del sistema en un periodo de tiempo no cero.
- En el Ejemplo 12.8, en cambio, las ecuaciones recursivas (12.65) y (12.65) permiten calcular la estimación óptima del parámetro  $\alpha = \alpha[t]$  a medida que se obtienen los datos, al expresarla como salida de un sistema dinámico.

### 12.3.1. Teoría básica

Formularemos a continuación el método general para la obtención de modelos para sistemas de tiempo discreto.

La clase de modelos a usar,  $\mathcal{M}$ , está definida por todos los sistemas lineales en los parámetros a determinar, es decir, todos los modelos que se pueden expresar mediante la regresión lineal:

$$y[t] = \phi[t]^T \theta + e[t] \quad (12.66)$$

donde  $\phi[t]$  es un vector, llamado vector de regresión, y sus elementos se denominan regresores, que pueden corresponder tanto a datos de la entrada como de la

salida. Por su parte, el vector  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$  contiene los parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  que distinguen cada elemento en  $\mathcal{M}$ . Por su parte,  $e[t]$  condensa nuestra certeza que, en general, no existe valor de  $\boldsymbol{\theta}$  tal que  $\boldsymbol{\phi}[t]^T \boldsymbol{\theta}$  genere exactamente las mediciones en  $y[t]$ .

Al igual que para el caso de tiempo continuo, existen diferentes tendencias para la construcción del vector de regresión. Sin embargo, en este texto sólo consideraremos el método de **mínimos cuadrados**, ampliamente utilizado y que se caracteriza por su simplicidad y robustez. Vea la Nota [12.1 en la página 345](#).

Note que la expresión (12.66) es bastante general, ya que la única restricción es que el modelo sea *lineal en los parámetros a estimar*, y no necesariamente lineal entre entrada y salida. Así, en forma análoga al caso de tiempo continuo, notamos que el modelo

$$y_m[t] = a\sqrt{u[t]} + b u[t] + c \cos(u[t]) + d + e[t] \quad (12.67)$$

define una relación no lineal entre  $u[t]$  e  $y_m[t]$ , y, sin embargo, es lineal en los parámetros  $a, b, c, d$ . Esto significa que puede ser escrito en la forma (12.66), en que:

$$\boldsymbol{\phi}[t] = [\sqrt{u[t]} \quad u[t] \quad \cos(u[t]) \quad 1]^T \quad (12.68)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a \quad b \quad c \quad d]^T \quad (12.69)$$

Veremos más adelante que la forma (12.66) es lo suficientemente general puede describir sistemas dinámicos de tiempo discreto.

Para modelar un sistema con entrada  $u[t]$  y salida  $y[t]$ , como miembro de la clase  $\mathcal{M}$ , nos interesa encontrar el vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$  óptimo, que denotamos por  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , de modo de minimizar:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\ell=0}^N (y[\ell] - \boldsymbol{\phi}[\ell]^T \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_{\ell=0}^N (e[\ell])^2 \quad (12.70)$$

El producto  $\boldsymbol{\phi}[\ell]^T \boldsymbol{\theta}$  corresponde a una estimación de la salida del sistema a modelar, utilizando el elemento genérico de la clase  $\mathcal{M}$ . El lector puede apreciar nuevamente que la diferencia  $e[\ell] = y[\ell] - \boldsymbol{\phi}[\ell]^T \boldsymbol{\theta}$  puede interpretarse como el *error de predicción*.

El método de estimación cuadrática permite determinar cual de los elementos de  $\mathcal{M}$  es el que arroja la predicción con menor error cuadrático acumulado. Esto es equivalente a seleccionar el óptimo  $\boldsymbol{\theta}$ , que puede expresarse como:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p} J(\boldsymbol{\theta}) \quad (12.71)$$

La minimización de (12.70) se hace a través del procedimiento tradicional: derivando respecto de la incógnita y luego haciendo esa derivada igual a cero, excepto que en este caso se trata de funciones de varias variables.

**Teorema 12.3.** *Dado la clase de modelos  $\mathcal{M}$ , definida por:*

$$y[t] = \boldsymbol{\phi}[t]^T \boldsymbol{\theta} + e[t] \quad (12.72)$$

*y una historia de datos para  $y[t]$  y los regresores en  $\boldsymbol{\phi}[t]$  en el intervalo  $[0, N]$ , entonces el error cuadrático acumulado dado por el costo:*

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\ell=0}^N (y[\ell] - \boldsymbol{\phi}[\ell]^T \boldsymbol{\theta})^2 \quad (12.73)$$

*es minimizado por la elección:*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[ \sum_{\ell=0}^N \boldsymbol{\phi}[\ell] \boldsymbol{\phi}[\ell]^T \right]^{-1} \sum_{\ell=0}^N \boldsymbol{\phi}[\ell] y[\ell] \quad (12.74)$$

#### **Demostración**

*Al considerar la derivada del costo  $J(\boldsymbol{\theta})$  respecto a  $\boldsymbol{\theta}$ , vemos que se trata de la derivada de una función escalar respecto de un vector, por tanto la derivada corresponde al gradiente  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}$ :*

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{dJ(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} = -2 \sum_{\ell=0}^N \boldsymbol{\phi}[\ell] (y[\ell] - \boldsymbol{\phi}[\ell]^T \boldsymbol{\theta}) \quad (12.75)$$

*Al hacer cero el gradiente se obtiene el estimado  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  dado por (12.74).*

*Podemos verificar que esta última expresión (12.74) minimiza el funcional de costo (12.73) calculando la segunda derivada (vectorial, es decir, el Hessiano) de  $J(\boldsymbol{\theta})$ :*

$$\mathbf{H}_J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{d^2 J(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}^2} = 2 \sum_{\ell=0}^N \boldsymbol{\phi}[\ell] \boldsymbol{\phi}[\ell]^T \quad (12.76)$$

*El Hessiano  $\mathbf{H}_J(\boldsymbol{\theta})$  obtenido es una matriz positiva definida (ver Apéndice F) bajo condiciones muy generales para el vector  $\boldsymbol{\phi}[\ell]$  en  $0 < \ell \leq N$ , cuya deducción va más allá del alcance de este texto. Estas condiciones, en lo sustantivo, exigen que la señal de entrada tenga un rico contenido espectral, lo que se describe técnicamente como **persistencia de excitación**. Un estudio de este tema se puede encontrar en las referencias indicadas al comienzo de este capítulo.*

□□□

La expresión (12.74) proporciona una forma de construir el modelo, estimando  $\boldsymbol{\theta}$ , una vez que se han acumulado los datos en un lapso  $[0; N]$ . Tal como se ilustró en el Ejemplo 12.8, también es posible construir un estimado,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}[t]$ , que vaya evolucionando a medida que se van considerando nuevos datos. Como en el caso de tiempo continuo, este procedimiento tiene, como ventaja adicional, el que se evita la inversión matricial requerida en (12.74).

**Teorema 12.4.** *Considere la clase de modelos  $\mathcal{M}$ , definida por (12.72), el funcional de costo (12.73) y un experimento que permite construir  $\phi[\ell]$  para  $0 < \ell \leq N$ . Entonces el estimador óptimo,  $\hat{\theta}[t]$  se puede obtener a través de:*

$$\mathbf{P}[t] = \mathbf{P}[t-1] - \frac{\mathbf{P}[t-1]\phi[t]\phi[t]^T\mathbf{P}[t-1]}{1 + \phi[t]^T\mathbf{P}[t-1]\phi[t]} \quad (12.77)$$

$$\hat{\theta}[t] = \hat{\theta}[t-1] + \mathbf{P}[t]\phi[t](y[t] - \phi[t]\hat{\theta}[t]) = \hat{\theta}[t-1] + \mathbf{P}[t]\phi[t]e[t] \quad (12.78)$$

### Demostración

Definamos primero la matriz  $\mathbf{P}[t] \in \mathbb{R}^{p \times p}$  de la forma:

$$\mathbf{P}[t] = \left[ \sum_{\ell=0}^t \phi[\ell]\phi[\ell]^T \right]^{-1} \quad (12.79)$$

y la matriz:

$$\mathbf{Q}[t] = \mathbf{P}[t]^{-1} = \sum_{\ell=0}^t \phi[\ell]\phi[\ell]^T = \mathbf{Q}[t-1] + \phi[t]\phi[t]^T \quad (12.80)$$

Si ahora aplicamos el Lema de Inversión Matricial (ver Apéndice F) podemos obtener  $\mathbf{P}[t] = \mathbf{Q}[t]^{-1}$  en función de  $\mathbf{P}[t-1] = \mathbf{Q}[t-1]^{-1}$ . De esta forma se obtiene la ecuación (12.77).

Por otro lado, al usar (12.74) se tiene que:

$$\mathbf{P}[t]^{-1}\hat{\theta}[t] = \sum_{\ell=0}^t \phi[\ell]y[\ell] \quad (12.81)$$

$$\mathbf{P}[t-1]^{-1}\hat{\theta}[t-1] = \sum_{\ell=0}^{t-1} \phi[\ell]y[\ell] \quad (12.82)$$

y al multiplicar ambos lados de (12.77) por  $\phi[t]$  se obtiene:

$$\mathbf{P}[t]\phi[t] = \frac{\mathbf{P}[t-1]\hat{\theta}[t-1]}{1 + \phi[t]^T\mathbf{P}[t-1]\phi[t]} \quad (12.83)$$

La sustracción, miembro a miembro de (12.81) y (12.82) lleva a:

$$\hat{\theta}[t] = \mathbf{P}[t]\mathbf{P}[t-1]^{-1}\hat{\theta}[t-1] + \mathbf{P}[t]\phi[t]y[t] \quad (12.84)$$

Finalmente, usando (12.77) y (12.83) en (12.84), se obtiene (12.78).  $\square\square\square$

El Teorema 12.4 establece un procedimiento a través del cual la estimación de los parámetros del modelo se va obteniendo a medida que se dispone de nueva información, es decir, en tiempo real o en línea. Al igual que en el caso de tiempo continuo, el algoritmo se inicializa, usualmente, con  $\mathbf{P}[0]$  grande y  $\hat{\theta}[0] = 0$ . Note que, en general,  $\mathbf{P}[t]$  tiende a cero, ya que  $\mathbf{Q}[t]$  crece constantemente, por lo que  $\hat{\theta}[t]$  tiende a un valor constante, aunque no necesariamente el error de predicción tiende a cero.

### 12.3.2. Modelos lineales

La teoría desarrollada en la sección precedente se aplica a cualquier clase de modelos  $\mathcal{M}$ , con la única condición que los miembros de esa clase sean lineales en el vector de parámetros, es decir, tengan la forma (12.66). Esto naturalmente incluye modelos no lineales en la entrada y la salida, tal como se ilustra en los Ejemplos 12.7 y 12.8. Sin embargo, en esta sección enfocaremos nuestra atención en modelos dinámicos lineales de tiempo discreto. Con este objetivo definiremos la clase  $\mathcal{M}$  por la ecuación recursiva (4.1) en la página 59, que reproducimos a continuación:

$$y[t] + a_{n-1}y[t-1] + \dots + a_1y[t-n+1] + a_0y[t-n] = b_mu[t] + b_{m-1}u[t-1] + \dots + b_1u[t-m+1] + b_0u[t-m] + e[t] \quad (12.85)$$

Antes de desarrollar la metodología general, examinaremos un ejemplo muy simple, para adquirir perspectiva.

**Ejemplo 12.9.** La clase  $\mathcal{M}$  es elegida como en (12.85), con  $n = 1$ , es decir:

$$y[t] + a_0y[t-1] = b_0u[t] + e[t] \quad (12.86)$$

La primera opción para construir la forma (12.66) en este caso es:

$$\phi[t] = [u[t] \quad -y[t-1]]^T \quad (12.87)$$

$$\theta = [b_0 \quad a_0]^T \quad (12.88)$$

A diferencia del caso de tiempo continuo (ver Ejemplo 12.4 en la página 350), esta elección para el vector de regresión  $\phi[t]$  es razonable y la metodología de la sección anterior puede ser aplicada sin mayores dificultades.

□□□

El Ejemplo 12.9 permite inducir una metodología general, ya que podemos expresar la ecuación (12.85) como:

$$y[t] = \phi[t]^T \theta + e[t] \quad (12.89)$$

$$\phi[t] = [u[t] \quad \dots \quad u[t-m] \quad -y[t-1] \quad \dots \quad -y[t-n]]^T \quad (12.90)$$

$$\theta = [b_m \quad b_{m-1} \quad \dots \quad b_0 \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad a_0]^T \quad (12.91)$$

De esta forma, podemos apreciar que los regresores en el vector  $\phi[t]$  son ahora los mismos elementos en las secuencias  $u[t]$  e  $y[t]$ , a diferencia de la metodología obtenida en la Sección §12.2.2, donde el vector de regresión se formó con las señales de entrada y salida filtradas.

Para concluir, desarrollamos un ejemplo que ilustra la construcción de modelos de tiempo discreto, con estimación en línea de los parámetros de ese modelo.

**Ejemplo 12.10.** Supongamos que se elige la clase de modelos dada por:

$$y[t] = -a_1y[t-1] - a_0y[t-2] + b_1u[t-1] + b_0u[t-2] + e[t] \quad (12.92)$$

entonces podemos reconocer las siguientes asignaciones:

$$\phi[t] = [u[t-1] \quad u[t-1] \quad -y[t-1] \quad -y[t-2]]; \quad \theta = [b_1 \quad b_0 \quad a_1 \quad a_0]^T \quad (12.93)$$

Usando SIMULINK, generamos datos en línea a través de un sistema cuya ecuación de recursión es exactamente

$$y[t] = 0,7y[t-1] - 0,1y[t-2] + 0,2u[t-1] + 0,3u[t-2] \quad (12.94)$$

es decir, el sistema y el modelo a ajustar pertenecen a la misma clase. Con estas elecciones, se construye el esquema SIMULINK para obtener, en línea, estimaciones para los elementos del vector  $\theta$ . La simulación se desarrolla con las siguientes características:

- (i) tiempo de simulación: 10 [s], donde un unidad de tiempo discreto corresponde a 1 [s],
- (ii) valores iniciales  $\mathbf{P}[0] = 10000\mathbf{I}$ ,  $\hat{\theta}[0] = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , y
- (iii) el sistema es excitado con una onda cuadrada y simétrica, de frecuencia 0.1 [Hz] y amplitud 1.

Los resultados de la simulación se muestran en la Figura 12.3.

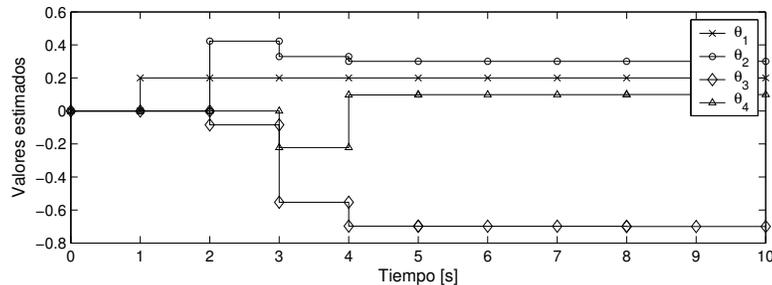


Figura 12.3: Aplicación de método en línea para estimar parámetros en Ejemplo 12.10.

Los resultados muestran que la estimación arroja los resultados correctos, ya que:

$$\hat{\theta} \approx [0,2 \quad 0,3 \quad -0,7 \quad 0,1] \quad (12.95)$$

Este buen resultado es posible, dado que el sistema a modelar y el modelo a estimar pertenecen a la misma clase.

□□□

## 12.4. Problemas para el lector

**Problema 12.1.** Considere un sistema no-lineal con modelo verdadero dado por:

$$y(t) = -0,5u(t) + (u(t))^2 \quad (12.96)$$

**12.1.1** Suponga un experimento de duración  $T = 5$  en que se utiliza una entrada  $u(t) = \text{sen}(2\pi t)$ . Determine la expresión más simple posible para la salida  $y(t)$ .

**12.1.2** Usando las señales obtenidas en el experimento anterior, calcule los valores óptimos de los parámetros en un modelo de la forma:

$$(i) \quad y(t) = \alpha u(t) + e(t)$$

$$(ii) \quad y(t) = \alpha u(t) + \beta(u(t))^2 + e(t)$$

$$(iii) \quad y(t) = \alpha u(t) + \beta(u(t))^2 + \gamma(u(t))^3 + e(t)$$

Sugerencia: Use MAPLE .

**12.1.3** Usando SIMULINK , construya los estimadores en tiempo real de los parámetros para cada una de las clases de modelos en el punto anterior.

---

**Problema 12.2.** Construya y pruebe los esquemas SIMULINK que permiten estimar en línea, los parámetros de los sistemas del Ejemplo 12.4 y 12.5.

---

**Problema 12.3.** Construya y pruebe los esquemas SIMULINK que permiten estimar en línea, los parámetros del sistema de tiempo discreto del Ejemplo 12.9.

---

**Problema 12.4.** Considere el sistema lineal de segundo orden definido por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 0,5\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (12.97)$$

**12.4.1** Determine la respuesta del sistema cuando se aplica un escalón unitario en la entrada en  $t = 0$ , con condiciones iniciales iguales a cero. Simule también esta respuesta en MATLAB -SIMULINK en el intervalo  $0 \leq t \leq 20$ .

**12.4.2** Considerando los datos de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  muestreadas cada  $0,5[\text{seg}]$ , es decir,  $u[k] = u(0,5k)$  e  $y[k] = y(0,5k)$  en que  $0 \leq 0,5k \leq 20$  (obtenidos de la simulación), estime los parámetros de un modelo discreto lineal de segundo orden:

$$y[k + 2] + a_1y[k + 1] + a_0y[k] = b_1u[k + 1] + b_0u[k] + e[k] \quad (12.98)$$

**12.4.3** Compare el modelo obtenido con el que resulta de discretizar el sistema continuo, suponiendo un retentor de orden cero en la entrada (vea la Sección §11.5.2 o utilice la función `c2d` de MATLAB ).

---

**Problema 12.5.** *Construya y pruebe los esquemas SIMULINK que permiten estimar en línea, los parámetros del sistema de tiempo discreto del Ejemplo 12.9.*

---

**Problema 12.6.** *Suponga que desea representar una señal  $f(t)$ , en el intervalo  $[0; T]$ , por una combinación de tres señales:  $1, e^{j\ell\omega_0 t}, e^{-j\ell\omega_0 t}$ , donde  $\ell \in N, \omega_0 T = 2\pi$ . Demuestre que los resultados que se obtienen tras aplicar LSE coinciden con las fórmulas para calcular los coeficientes de la serie de Fourier exponencial.*

*Generalice y comente sus resultados.*

---



## Apéndice A

# Series de Taylor

En este apéndice revisamos brevemente la expansión en serie de Taylor de funciones reales, que es de fundamental importancia en el proceso de linealización de sistemas. Por esta misma razón, hemos puesto cierto énfasis en la aproximación de primer orden (lineales) de funciones no-lineales.

### A.1. Serie de Taylor en una variable

Considere una función  $g(x)$ , donde  $x \in \mathbb{R}$  y sea  $x_Q$  un valor arbitrario en  $\mathbb{R}$ , tal que  $g(x)$  es continua en  $x = x_Q$ , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow x_Q} g(x) = g(x_Q) \quad (\text{A.1})$$

Suponga además que  $g(x)$  es infinitamente diferenciable en  $x = x_Q$ , es decir, todas las derivadas de  $g(x)$  en  $x = x_Q$  existen y son continuas.

Entonces la función  $g(x)$  se puede expandir en serie de potencias de  $(x - x_Q)$ , es decir, admite la siguiente representación en una serie de Taylor:

$$\begin{aligned} g(x) &= g|_Q + \left. \frac{dg}{dx} \right|_Q (x - x_Q) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_Q (x - x_Q)^2 + \dots \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left. \frac{d^\ell g}{dx^\ell} \right|_Q (x - x_Q)^\ell \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

donde usamos  $(\cdot)|_Q$  para denotar el objeto  $(\cdot)$  evaluado en el punto  $Q$ , en este caso  $x = x_Q$ . Usualmente, cuando la expansión en serie se hace en torno a  $x_Q = 0$  ésta se denomina serie de MacLaurin.

La necesidad de la continuidad de  $g(x)$  y sus derivadas resulta evidente de la expresión (A.2).

A partir de esta expansión, podemos construir aproximaciones de primer, segundo, tercer orden o superiores, truncando la serie después del término en

que  $x$  aparece elevado a la primera, segunda, tercera o potencia superior, respectivamente. Por ejemplo, la aproximación de primer orden es:

$$\hat{g}_1(x) = k_0 + k_1(x - x_Q); \quad k_0 = g(x_Q); \quad k_1 = \left. \frac{dg}{dx} \right|_Q \quad (\text{A.3})$$

Esta aproximación de primer orden tiene un claro significado geométrico, como se puede apreciar en la Figura A.1, pues corresponde a la recta tangente a  $g(x)$  en el punto  $(x_Q, g(x_Q))$ .

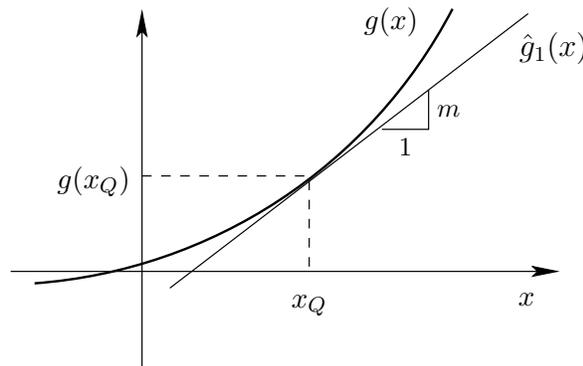


Figura A.1: Aproximación de primer orden para función no lineal de una variable.

En esta figura observamos que, al menos para esta función en particular, a medida que nos alejamos del punto de operación, el error que se comete al aproximar  $g(x)$  por  $\hat{g}_1(x)$  aumenta.

MAPLE

```
> taylor(g(x), x=xQ, 3),
```

$$g(x_Q) + D(g)(x_Q)(x - x_Q) + \frac{1}{2}D^2g(x_Q)(x - x_Q)^2 + O((x - x_Q)^3)$$

MAPLE

```
> taylor(exp(x), x=0, 6);
```

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^6)$$

## A.2. Serie de Taylor en dos variables

La misma idea resumida en la sección anterior se puede extender al caso de una función  $g(x_1, x_2)$ , con  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ .

Sea  $(x_{1Q}, x_{2Q})$  un par arbitrario tal que  $g(x_1, x_2)$  es continua e infinitamente diferenciable en  $x_1 = x_{1Q}$ ,  $x_2 = x_{2Q}$ . Entonces  $g$  puede expandirse en serie de potencias de  $(x_1 - x_{1Q})$  y  $(x_2 - x_{2Q})$ :

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= g(x_{1Q}, x_{2Q}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_Q (x_1 - x_{1Q}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_Q (x_2 - x_{2Q}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right|_Q (x_1 - x_{1Q})^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right|_Q (x_2 - x_{2Q})^2 \\ &\quad + \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_Q (x_1 - x_{1Q})(x_2 - x_{2Q}) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde el término general de la expansión es:

$$\frac{1}{\ell!j!} \left. \frac{\partial^{\ell+j} g}{\partial x_1^\ell \partial x_2^j} \right|_Q (x_1 - x_{1Q})^\ell (x_2 - x_{2Q})^j \quad (\text{A.5})$$

En forma análoga al caso de una variable, podemos truncar esta serie para tener aproximaciones de primer, segundo, tercer, etc. orden. Por ejemplo, la aproximación de primer orden está dada por:

$$\hat{g}_1(x_1, x_2) = k_0 + k_{11}(x_1 - x_{1Q}) + k_{12}(x_2 - x_{2Q}) \quad (\text{A.6})$$

en que:

$$k_0 = g(x_{1Q}, x_{2Q}) \quad k_{11} = \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_Q \quad k_{12} = \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_Q \quad (\text{A.7})$$

MAPLE

```
> mtaylor(g(x1, x2), [x1=x1Q, x2=x2Q], 2);
```

$$g(x_{1Q}, x_{2Q}) + D[1](g)(x_{1Q}, x_{2Q})(x_1 - x_{1Q}) + D[2](g)(x_{1Q}, x_{2Q})(x_2 - x_{2Q})$$

MAPLE

```
> mtaylor(sqrt(x1*x2), [x1=x1Q, x2=x2Q], 2);
```

$$\sqrt{x_{1Q}x_{2Q}} + \frac{\sqrt{x_{1Q}x_{2Q}}}{2x_{1Q}}(x_1 - x_{1Q}) + \frac{\sqrt{x_{1Q}x_{2Q}}}{2x_{2Q}}(x_2 - x_{2Q})$$

### A.3. El caso general

La idea desarrollada en las secciones anteriores para funciones de una y dos variables, se puede generalizar para el caso de una función  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

Sea  $(x_{1Q}, x_{2Q}, \dots, x_{nQ})$  una  $n$ -tupla tal que  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es continua e infinitamente diferenciable en  $x_1 = x_{1Q}, x_2 = x_{2Q}, \dots, x_n = x_{nQ}$ . Entonces la expansión en serie de Taylor está dada por:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\ell_1, \dots, \ell_n=0}^{\infty} \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_n!} \left. \frac{\partial^{\ell_1 + \dots + \ell_n} g}{\partial x_1^{\ell_1} \dots \partial x_n^{\ell_n}} \right|_Q (x_1 - x_{1Q})^{\ell_1} \dots (x_n - x_{nQ})^{\ell_n} \quad (\text{A.8})$$

donde  $n_\ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n$ .

Una forma alternativa de expresar la serie de Taylor (A.8) para una función de varias variables está dada por:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left( (x_1 - x_{1Q}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - x_{nQ}) \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\ell g \quad (\text{A.9})$$

Usando cualquiera de las expresiones anteriores, la aproximación de primer orden, por truncamiento de la serie de Taylor es entonces:

$$\hat{g}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_0 + \sum_{i=1}^n k_{1i} (x_i - x_{iQ}) \quad (\text{A.10})$$

en que:

$$k_0 = g(x_{1Q}, x_{2Q}, \dots, x_{nQ}) \quad (\text{A.11})$$

$$k_{1i} = \left. \frac{dg}{dx_i} \right|_Q \quad (\text{A.12})$$

Es importante señalar que los desarrollos precedentes siguen siendo válidos aunque las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sean a su vez funciones de una variable temporal (como lo son para el caso de sistemas dinámicos) u otra variable independiente.

### A.4. Algunas reglas prácticas

La teoría general precedente permite construir algunas reglas básicas para expandir funciones complicadas en serie de Taylor, tal como detallamos a continuación.

[R1] Considere las funciones no lineales  $g(x)$  y  $h(x)$  y un punto de operación común dado por  $x_Q$ , entonces las aproximaciones de primer orden para las funciones que se indican son:

$$\hat{g}_1(x) = g(x_Q) + \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_Q (x - x_Q) \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{h}_1(x) = h(x_Q) + \left. \frac{dh(x)}{dx} \right|_Q (x - x_Q) \quad (\text{A.14})$$

$$\widehat{(g+h)}_1 = g(x_Q) + h(x_Q) + \left( \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_Q + \left. \frac{dh(x)}{dx} \right|_Q \right) (x - x_Q) \quad (\text{A.15})$$

$$\widehat{(gh)}_1 = g(x_Q)h(x_Q) + \left( h(x_Q) \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_Q + g(x_Q) \left. \frac{dh(x)}{dx} \right|_Q \right) (x - x_Q) \quad (\text{A.16})$$

[R2] La aproximación de primer orden de la  $\ell$ -ésima derivada:

$$g(x) = \frac{d^\ell x(t)}{dt^\ell} \quad (\text{A.17})$$

en torno a cualquier punto de operación  $x(t) = x_Q$  es la derivada misma, pues ésta es una función **lineal** en si. De hecho, si definimos:

$$x^{(\ell)} \triangleq \frac{d^\ell x(t)}{dt^\ell} \quad (\text{A.18})$$

entonces:

$$g = x^{(\ell)} \Rightarrow \hat{g}_1 = x_Q^{(\ell)} + \underbrace{\left. \frac{dg}{dx^{(\ell)}} \right|_Q}_1 (x^{(\ell)} - x_Q^{(\ell)}) = x^{(\ell)} \quad (\text{A.19})$$

Es importante apreciar que en la ecuación (A.17) hemos cometido cierto abuso de notación, pues  $g(x)$  en realidad no depende de  $x(t)$  sino que de la  $\ell$ -ésima derivada,  $x^{(\ell)}(t)$ , es decir,  $g = g(x^{(\ell)})$ .

[R3] La aproximación de primer orden de:

$$g(x) = \left[ \frac{d^\ell x(t)}{dt^\ell} \right]^k, \text{ para } k > 1 \quad (\text{A.20})$$

en torno al punto de operación  $x = x_Q$ , puede obtenerse de manera similar al caso anterior. Usando (A.18), tenemos que:

$$g = [x^{(\ell)}]^k \Rightarrow \hat{g}_1 = [x_Q^{(\ell)}]^k + \left. \frac{dg}{dx^{(\ell)}} \right|_Q (x^{(\ell)} - x_Q^{(\ell)}) \quad (\text{A.21})$$

$$= [x_Q^{(\ell)}]^k + k [x_Q^{(\ell)}]^{k-1} (x^{(\ell)} - x_Q^{(\ell)}) \quad (\text{A.22})$$

$$= (1 - k) [x_Q^{(\ell)}]^k + k [x_Q^{(\ell)}]^{k-1} x^{(\ell)} \quad (\text{A.23})$$

En este caso, nuevamente hemos cometido cierto abuso de notación, pues  $g(x)$  no depende de  $x(t)$  sino que de su  $\ell$ -ésima derivada,  $x^{(\ell)}(t)$ , es decir,  $g = g(x^{(\ell)})$ .

El lector debe tener presente que en este breve Apéndice hemos analizado la expansión en serie de Taylor de funciones de una o más variables en torno a un punto arbitrario  $Q$ . Sin embargo, para el caso de sistemas dinámicos, que involucran variables que dependen del tiempo y sus derivadas, usualmente lo que nos interesa es una expansión **lineal** en torno a un **punto de equilibrio**, es decir, aquél donde las derivadas temporales se hacen cero.

Esta distinción tiene directa consecuencia en los casos **[R2]** y **[R3]** precedentes, pues en el punto de equilibrio tenemos que  $x_Q^{(\ell)} = 0$ .

## Apéndice B

# Bases matemáticas para las Series de Fourier

El objetivo fundamental de este apéndice es analizar la representación de funciones mediante series de Fourier desde un punto de vista más formal, en el marco de los espacios vectoriales que poseen producto interno y norma. En particular, en la Sección §B.2 analizamos la convergencia de la representación en serie de Fourier de una función. El lector debe tener presente que un estudio más riguroso sobre representación de funciones mediante series de Fourier requiere matemáticas más avanzadas, en particular, teoría de los espacios de Hilbert [15].

### B.1. Espacios vectoriales y bases ortogonales

A continuación revisamos los conceptos básicos de los espacios vectoriales, incluyendo definiciones y propiedades. Se introducen además las ideas de ortogonalidad y bases, ideas matemáticas abstractas de mucha utilidad para fundamentar el análisis mediante series de Fourier y otros tópicos dentro de la teoría de sistemas como es, por ejemplo, la construcción de modelos y la estimación de señales utilizando el enfoque de mínimos cuadrados (ver Capítulo 12).

**Definición B.1.** Un *espacio vectorial*  $\mathcal{V}$  es un conjunto de objetos  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ , llamados *vectores*, donde se definen dos operaciones: **suma** de dos vectores, y **multiplicación por un escalar** y que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$  y  $\vec{v}_j \in \mathcal{V}$ , entonces  $\vec{v}_i + \vec{v}_j \in \mathcal{V}$
2. Si  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$  y  $\vec{v}_j \in \mathcal{V}$ , entonces  $\vec{v}_i + \vec{v}_j = \vec{v}_j + \vec{v}_i$
3. Si  $\vec{v}_i, \vec{v}_j, \vec{v}_k$  son vectores cualesquiera de  $\mathcal{V}$ , entonces  $\vec{v}_i + (\vec{v}_j + \vec{v}_k) = (\vec{v}_i + \vec{v}_j) + \vec{v}_k$
4. Existe un vector  $\vec{0} \in \mathcal{V}$ , tal que para todo  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$  se cumple  $\vec{v}_i + \vec{0} = \vec{v}_i$

5. Para cada  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$  existe un vector  $-\vec{v}_i \in \mathcal{V}$ , tal que  $\vec{v}_i + (-\vec{v}_i) = \vec{0}$
6. Si  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$  y  $\alpha$  es un escalar, entonces  $\alpha\vec{v}_i \in \mathcal{V}$
7. Si  $\vec{v}_i$  y  $\vec{v}_j$  están en  $\mathcal{V}$  y  $\alpha$  es un escalar, entonces  $\alpha(\vec{v}_i + \vec{v}_j) = \alpha\vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j$
8. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares y  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$ , entonces  $(\alpha + \beta)\vec{v}_i = \alpha\vec{v}_i + \beta\vec{v}_i$
9. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares y  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$ , entonces  $\alpha(\beta\vec{v}_i) = (\alpha\beta)\vec{v}_i$
10. Existe el escalar 1 tal que  $1\vec{v}_i = \vec{v}_i$ , para todo  $\vec{v}_i \in \mathcal{V}$

□□□

Los escalares son usualmente el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , o el de los complejos  $\mathbb{C}$ .

Existe un sinnúmero de ejemplos de espacios vectoriales, entre los cuales se deja al lector verificar que los siguientes cumplen las propiedades recién enumeradas:

- El espacio  $\mathbb{R}^n$ , con los números reales como escalares,
- El espacio  $\mathbb{C}^n$ , con escalares pertenecientes a  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,
- El conjunto de funciones reales seccionalmente continuas<sup>1</sup> en un intervalo  $[a, b]$ , en que los escalares son números reales.

**Definición B.2.** Dado un conjunto de vectores  $\mathcal{G} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq \mathcal{V}$ , diremos que el **espacio generado por  $\mathcal{G}$** , es el conjunto de todos los vectores de la forma:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n \quad (\text{B.1})$$

Es decir,  $\vec{v}$  es una **combinación lineal** de  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ .

□□□

Se deja al lector probar que el subespacio generado por el subconjunto de vectores  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$  también cumple las propiedades de un espacio vectorial.

**Definición B.3.** Un conjunto de vectores  $\mathcal{G} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  se dice **linealmente independiente**, si la ecuación:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad (\text{B.2})$$

se cumple sólo para los escalares  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . En caso contrario se dice que los vectores son **linealmente dependientes**.

□□□

La independencia lineal en un conjunto de vectores es una propiedad muy importante pues nos permite afirmar que:

<sup>1</sup>Es decir, que poseen a lo más un número finito de puntos de discontinuidad.

- Ninguno de los vectores del conjunto  $\mathcal{G}$  puede expresarse como una combinación lineal de los demás, y
- La representación de un vector perteneciente al espacio generado por  $\mathcal{G}$  es única.

Invitamos al lector a demostrar las dos propiedades enunciadas.

**Definición B.4.** Dado un espacio vectorial  $\mathcal{V}$ , diremos que un conjunto de vectores  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  es **base de  $\mathcal{V}$**  si:

1.  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  es linealmente independiente, y
2.  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  genera todo el espacio  $\mathcal{V}$ .

□□□

En este caso diremos que el espacio vectorial  $\mathcal{V}$  tiene **dimensión** igual a  $n$ . Por ejemplo, el espacio de vectores en el plano  $\mathbb{R}^2$  tiene dimensión  $n = 2$ , mientras que para el espacio  $\mathbb{R}^3, n = 3$ . Sin embargo, existen otros espacios vectoriales, tales como los de funciones que pueden tener dimensión infinita.

**Definición B.5.** Dados dos vectores cualesquiera  $\vec{v}_i$  y  $\vec{v}_j$  en un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  con escalares en  $\mathbb{C}$ , entonces diremos que  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$  es un **producto interno**, **producto escalar** o **producto punto** si cumple las siguientes propiedades:

1.  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$  es un escalar
2.  $\langle \vec{v}_i, \alpha \vec{v}_j + \beta \vec{v}_k \rangle = \alpha \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle + \beta \langle \vec{v}_i, \vec{v}_k \rangle$
3.  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle > 0$  si  $\vec{v}_i \neq \vec{0}$
4.  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle^*$ , en que  $(\cdot)^*$  denota el complejo conjugado de  $(\cdot)$

□□□

Dado un producto interno en el espacio vectorial  $\mathcal{V}$ , éste induce una **norma** en el espacio vectorial:

$$\|\vec{v}_i\| = \sqrt{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} \quad (\text{B.3})$$

Recordamos que una norma se define como sigue:

**Definición B.6.** Una **norma**  $\|\cdot\|$  es una función que va de un espacio  $\mathcal{V}$  (no necesariamente un espacio vectorial) a los reales  $\mathbb{R}$ , tal que:

1.  $\|\vec{v}_i\| \geq 0$  y  $\|\vec{v}_i\| = 0$  si y sólo si  $\vec{v}_i = \vec{0}$
2.  $\|\alpha \vec{v}_i\| = |\alpha| \|\vec{v}_i\|$  en que  $|\alpha|$  es el valor absoluto o módulo del escalar  $\alpha$
3.  $\|\vec{v}_i + \vec{v}_j\| \leq \|\vec{v}_i\| + \|\vec{v}_j\|$ , conocida como **desigualdad triangular**.

□□□

A partir del producto interno, hemos dotado al espacio vectorial  $\mathcal{V}$  de una norma, y utilizando ésta podemos introducir ahora la idea de **distancia** entre dos vectores:

$$d(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \|\vec{v}_i - \vec{v}_j\| \quad (\text{B.4})$$

**Definición B.7.** *Un espacio vectorial donde se ha definido una norma, es decir, se tiene una medida de distancia y longitud se denomina **espacio euclideo***

Además puede definirse el **coseno del ángulo entre dos vectores** como:

$$\cos \angle(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \frac{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle}{\|\vec{v}_i\| \|\vec{v}_j\|} \quad (\text{B.5})$$

**Definición B.8.** *De la definición del ángulo entre dos vectores es claro que podemos decir que dos vectores son **ortogonales** bajo el producto interno  $\langle \circ, \circ \rangle$ , si este producto es igual a cero. Es decir:*

$$\vec{v}_i \perp \vec{v}_j \Leftrightarrow \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \quad (\text{B.6})$$

□□□

El siguiente lema establece como obtener la representación de un vector arbitrario en términos de los elementos de una base ortogonal del espacio vectorial.

**Lema B.1.** *Supongamos un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n$ , en que se tiene una base de vectores:*

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \quad (\text{B.7})$$

*Si los vectores de la base  $\mathcal{B}$  son **ortogonales** entre si bajo un producto interno  $\langle \circ, \circ \rangle$ , es decir:*

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; \text{si } i \neq j \\ > 0 & ; \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

*Entonces, un vector arbitrario  $\vec{u} \in \mathcal{V}$  se representa como una combinación lineal de los vectores de la base  $\mathcal{B}$  de la forma:*

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \quad (\text{B.9})$$

*en que cada coeficiente está dado por:*

$$\alpha_i = \frac{\langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle} \quad (\text{B.10})$$

### **Demostración**

*La representación (B.9) se deduce de inmediato del hecho de tener un conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes en un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n$ . Lo central que nos atañe en este caso es el cálculo de los coeficientes (B.10).*

Tomemos la ecuación (B.9), y apliquémosle producto interno con alguno de los vectores de la base (B.7):

$$\langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}_i, \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \rangle \quad (\text{B.11})$$

Si aplicamos la linealidad del producto interno:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{u} \rangle = \alpha_1 \langle \vec{v}_i, \vec{v}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \vec{v}_i, \vec{v}_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle \vec{v}_i, \vec{v}_n \rangle \quad (\text{B.12})$$

Dada la ortogonalidad del conjunto  $\mathcal{B}$ , los productos de la derecha son cero, excepto en el que coinciden los subíndices:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle = \alpha_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle \quad (\text{B.13})$$

De donde se obtiene el resultado (B.10). □□□

**Lema B.2.** Si consideramos los mismos supuestos del lema anterior, y la representación del vector  $\vec{u}$  en (B.9), entonces la norma de  $\vec{u}$  satisface:

$$\|\vec{u}\|^2 = |\alpha_1|^2 \|\vec{v}_1\|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 \|\vec{v}_n\|^2 \quad (\text{B.14})$$

### **Demostración**

Es directa de la representación (B.9) y de la ortogonalidad de los vectores de la base  $\mathcal{B}$  definida en (B.7)-(B.8), por esto la dejamos de ejercicio al lector. □□□

### **Lema B.3. Desigualdad de Cauchy-Schwartz**

Dados dos vectores arbitrarios  $\vec{v}_i$  y  $\vec{v}_j \in \mathcal{V}$ , un espacio vectorial con producto interno, entonces:

$$|\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle| \leq \|\vec{v}_i\| \cdot \|\vec{v}_j\| \quad (\text{B.15})$$

en que la norma  $\|\cdot\|$  es la inducida por el producto interno.

### **Demostración**

Primero se observa que esta desigualdad es inmediata si cualquiera de los vectores,  $\vec{v}_i$  o  $\vec{v}_j$ , es el vector cero. Así, es suficiente considerar el caso en ambos son no nulos.

Consideremos un vector  $(\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j)$ , cuya norma (la inducida por el producto interno) es no negativa:

$$\|\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j\|^2 = \langle (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j), (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j) \rangle \geq 0 \quad (\text{B.16})$$

Sin embargo, utilizando propiedades del producto interno:

$$\langle (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j), (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j) \rangle = \alpha \langle (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j), \vec{v}_i \rangle - \beta \langle (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j), \vec{v}_j \rangle \quad (\text{B.17})$$

$$= \alpha \langle \vec{v}_i, (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j) \rangle^* - \beta \langle \vec{v}_j, (\alpha \vec{v}_i - \beta \vec{v}_j) \rangle^* \quad (\text{B.18})$$

$$= \alpha \alpha^* \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle^* - \alpha \beta^* \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle^* - \beta \alpha^* \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle^* + \beta \beta^* \langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle^* \quad (\text{B.19})$$

De donde, reemplazando en (B.16), se obtiene:

$$|\alpha|^2 \|\vec{v}_i\|^2 + |\beta|^2 \|\vec{v}_j\|^2 \geq 2\Re\{\alpha^* \beta \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle\} \quad (\text{B.20})$$

Ahora, si escribimos el producto interno de los vectores como:

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = |\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle| e^{j\theta} \quad (\text{B.21})$$

podemos considerar en (B.20) el caso particular:

$$\alpha = \|\vec{v}_j\| \quad \beta = \|\vec{v}_i\| e^{-j\theta} \quad (\text{B.22})$$

con lo que se obtiene:

$$\|\vec{v}_j\|^2 \|\vec{v}_i\|^2 + \|\vec{v}_i\|^2 e^{-j\theta} \|\vec{v}_j\|^2 \geq 2\Re\{\|\vec{v}_j\| \|\vec{v}_i\| e^{-j\theta} |\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle| e^{j\theta}\} \quad (\text{B.23})$$

$$\|\vec{v}_j\|^2 \|\vec{v}_i\|^2 \geq \|\vec{v}_j\| \|\vec{v}_i\| |\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle| \quad (\text{B.24})$$

El resultado es directo de dividir la última desigualdad por  $\|\vec{v}_j\| \|\vec{v}_i\| \neq 0$ .

□□□

## B.2. Convergencia de las Series de Fourier

En esta sección revisamos en primer lugar algunas definiciones y propiedades referidas a la convergencia de sucesiones y series, para luego analizar el caso particular de las series de Fourier. El lector interesado puede consultar otras fuentes más técnicas como, por ejemplo, [15] o [26]. Esta última constituye la principal fuente consultada para esta sección.

### B.2.1. Sucesiones y series

A continuación se hace un breve repaso sobre convergencia de sucesiones y series de funciones.

**Definición B.9.** Una sucesión de funciones  $\{f_k(x)\}$  **converge** (puntualmente) en  $x_0$  si, y sólo si:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0) = f(x_0) \quad (\text{B.25})$$

existe, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad k > N \Rightarrow |f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (\text{B.26})$$

Si cada  $f_k(x)$  está bien definida en un intervalo  $I = [a, b]$ , entonces diremos que la sucesión  $\{f_k(x)\}$  converge (puntualmente) a una función  $f(x)$  en  $I$  si, y solo si:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in I \quad (\text{B.27})$$

□□□

**Definición B.10.** Una sucesión de funciones  $\{f_k(x)\}$ , cada una bien definida en un intervalo  $I = [a, b]$ , **converge uniformemente** a una función  $f(x)$  en el intervalo  $I$  si, y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad k > N \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I \quad (\text{B.28})$$

□□□

Una sutil diferencia entre ambas definiciones es que en (B.26) es posible que  $\varepsilon = \varepsilon(x_0)$ , mientras que en (B.28) se requiere que sea independiente de  $x_0$  en el intervalo.

Estas definiciones de convergencia de sucesiones son aplicables de igual forma a series de funciones, ya que una serie no es más que una *sucesión de sumas parciales*. Es decir, dada una serie de funciones de la forma:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (\text{B.29})$$

entonces diremos que esta serie converge, puntual o uniformemente, si y sólo si converge la sucesión  $\{S_k(x)\}$ , que es la suma parcial  $k$ -ésima:

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x) \quad (\text{B.30})$$

**Definición B.11.** Se dice que una serie de funciones:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (\text{B.31})$$

**converge absolutamente** si y sólo si la serie de los valores absolutos de su término general converge, es decir, si la serie:

$$S_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad (\text{B.32})$$

converge (en el sentido de la Definición B.9).

□□□

Note que por comparación de los términos generales, si una serie converge absolutamente, entonces también converge en el sentido usual, es decir, en el sentido de la Definición B.9.

**Lema B.4. M-test de Weierstrass**

Dada una serie de números reales positivos:

$$S_M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \quad (\text{B.33})$$

y una serie de funciones en un intervalo  $[a, b]$ :

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (\text{B.34})$$

tales que los términos generales respectivos satisfacen:

$$|f_k(x)| \leq M_k \quad \begin{cases} \forall k = 1, 2, \dots \\ \forall x \in [a, b] \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

entonces, si la serie  $S_M$  converge, la serie de funciones  $S(x)$  converge uniforme y absolutamente en el intervalo  $[a, b]$ .

#### **Demostración**

Por comparación entre el término general de la serie numérica y la de funciones, tenemos que para cada  $x_0$  en el intervalo  $[a, b]$ , la serie converge absolutamente. Así la serie converge puntualmente a una función límite  $f(x)$ , para todo punto  $x \in [a, b]$ .

Ahora, usando la desigualdad triangular:

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \quad (\text{B.36})$$

Pero, usando (B.35), tenemos que:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^n M_k \quad (\text{B.37})$$

Donde podemos observar que el lado derecho de la desigualdad converge a cero a medida que  $n$  crece, **independiente** del  $x \in [a, b]$  escogido, por tanto la convergencia es también uniforme.

□□□

### B.2.2. Series de Fourier

Para estudiar la convergencia de la serie de Fourier de una función, a continuación derivamos algunos resultados preliminares, que permiten determinar la convergencia a cero (en norma) del vector de error  $e_n(t) = y(t) - y_n(t)$ , cuando  $n$  tiende a infinito.

#### **Lema B.5. Desigualdad de Parseval**

Dada una función  $y(t)$  periódica de período  $T$ , y los coeficientes  $A_0$ ,  $\{A_k\}$  y  $\{B_k\}$  de su representación en serie de Fourier trigonométrica, definidos según (5.27) en la página 91, entonces:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t) dt \geq A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) \quad (\text{B.38})$$

**Demostración**

Consideremos  $y_n(t)$ , definida como la serie de Fourier de  $y(t)$  truncada hasta el término  $n$ -ésimo, es decir:

$$y_n(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \sen(k\omega_0 t)) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{B.39})$$

De esta forma, tenemos que:

$$y(t) = y_n(t) + e_n(t) \quad (\text{B.40})$$

Nos interesa caracterizar la norma del error de aproximación  $e_n(t) = y(t) - y_n(t)$ , que se representa a la derecha de la Figura 5.8 en la página 97. Si calculamos la norma a ambos lados de la ecuación (B.40):

$$\|y(t)\|^2 = \|y_n(t) + e_n(t)\|^2 = \|y_n(t)\|^2 + \|e_n(t)\|^2 \quad (\text{B.41})$$

Es posible separar la norma pues la aproximación  $n$ -ésima  $y_n(t)$ , definida en (B.39), es ortogonal al error  $e_n(t)$ , pues los términos  $\cos(k\omega_0 t)$  y  $\sen(k\omega_0 t)$  contenidos en  $y_n(t)$  son ortogonales a los contenidos en  $e_n(t)$ . Este resultado ya fue obtenido en la ecuación (5.37) en la página 96

La norma del error  $e_n(t)$  al cuadrado puede expresarse como:

$$\|e_n(t)\|^2 = \|y(t)\|^2 - \|y_n(t)\|^2 \quad (\text{B.42})$$

Si recordamos que en el caso de las funciones periódicas el producto interno corresponde a la integral en un período, y si resolvemos estas integrales para la representación (B.39) de  $y_n(t)$ , tenemos que:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e_n^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t) dt - \left[ A_0^2 \cdot T + \sum_{k=1}^n \left( A_k^2 \cdot \frac{T}{2} + B_k^2 \cdot \frac{T}{2} \right) \right] \quad (\text{B.43})$$

Finalmente, dado que la norma (del error  $e_n(t)$ , en este caso) es mayor o igual que cero, se obtiene la desigualdad de Parseval dada en (B.38).

□□□

**Corolario B.1.** De la ecuación (B.38), se deduce además que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \cos(k\omega_0 t) dt = 0 \quad (\text{B.44})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sen(k\omega_0 t) dt = 0 \quad (\text{B.45})$$

**Demostración**

Es consecuencia directa de la desigualdad de Parseval (B.38): la integral del lado izquierdo existe, entonces la serie del lado derecho, cuyo término general es no negativo, está acotada superiormente y, por tanto, converge. Esto a su vez implica que el término general tiende a cero, a medida que  $k$  crece, es decir, los coeficientes  $A_k$  y  $B_k$  se hacen cero.

□□□

**Lema B.6.**

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\omega_0 s) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 s\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_0 s\right)} \quad (\text{B.46})$$

**Demostración**

A partir de la siguiente identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\omega_0 s\right) - \operatorname{sen}\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega_0 s\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 s}{2}\right) \cos(k\omega_0 s) \quad (\text{B.47})$$

tenemos que, si se hace la suma desde 1 hasta  $n$ , entonces:

$$\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 s\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 s}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 s}{2}\right) \sum_{k=1}^n \cos(k\omega_0 s) \quad (\text{B.48})$$

que puede reescribirse como en (B.46). □□□

La expresión a la derecha de la identidad trigonométrica (B.46) se denomina a menudo *kernel* o *núcleo de Dirichlet*, y permite reescribir la aproximación  $n$ -ésima de una serie Fourier como vemos en el siguiente lema.

**Lema B.7.** La aproximación o serie de Fourier truncada  $y_n(t)$  de una función periódica  $y(t)$  de período  $T$ , que se definió en (B.39), puede escribirse como:

$$y_n(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t+s) \frac{\operatorname{sen}\left(\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0}{2}s\right)} ds \quad (\text{B.49})$$

**Demostración**

La aproximación  $n$ -ésima (B.39) puede expandirse utilizando la definición de los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica dados en (5.27) en la página 91:

$$y_n(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(k\omega_0 t) + B_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)) \quad (\text{B.50})$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^n \left[ \cos(k\omega_0 t) \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(\tau) \cos(k\omega_0 \tau) d\tau + \operatorname{sen}(k\omega_0 t) \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(\tau) \operatorname{sen}(k\omega_0 \tau) d\tau \right] \quad (\text{B.51})$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \{ \cos(k\omega_0 t) \cos(k\omega_0 \tau) + \operatorname{sen}(k\omega_0 t) \operatorname{sen}(k\omega_0 \tau) \} \right] d\tau \quad (\text{B.52})$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\omega_0(\tau - t)) \right] d\tau \quad (\text{B.53})$$

Utilizando (B.46), dentro de la integral se obtiene:

$$y_n(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(\tau) \frac{\text{sen} \left( (n + \frac{1}{2}) \omega_0 (\tau - t) \right)}{2 \text{sen} \left( \frac{\omega_0}{2} (\tau - t) \right)} d\tau \quad (\text{B.54})$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}-t}^{\frac{T}{2}-t} y(t + \nu) \frac{\text{sen} \left( (n + \frac{1}{2}) \omega_0 \nu \right)}{2 \text{sen} \left( \frac{\omega_0}{2} \nu \right)} d\nu \quad (\text{B.55})$$

donde, considerando  $t$  fijo, hemos hecho el cambio de variables  $\nu = \tau - t$ .

En esta última expresión, si la función  $y(t)$  tiene período  $T$ , entonces puede probarse que el integrando también es periódico en  $\nu$ , y con el mismo período  $T$ . Esto se deja como ejercicio al lector. Por lo tanto la integral puede calcularse en cualquier intervalo de longitud  $T$ , en particular, en  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

□□□

### Lema B.8. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Supongamos que  $y(t)$  es una función periódica en  $(-\infty, \infty)$ , de período  $T$ , entonces para cada  $t_0$  se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t_0) = \frac{y(t_0^+) + y(t_0^-)}{2} \quad (\text{B.56})$$

en que  $y_n(t)$  es la serie de Fourier de  $y(t)$  truncada al  $n$ -ésimo término, mientras que  $y(t_0^+)$  e  $y(t_0^-)$  son los límites laterales de  $y(t)$  en  $t_0$ .

#### Demostración

Como resultado previo, observemos que si integramos a ambos lados de la ecuación (B.46), obtenemos:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\text{sen} \left( (n + \frac{1}{2}) \omega_0 \nu \right)}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} \omega_0 \nu \right)} d\nu = \frac{T}{2} \quad (\text{B.57})$$

Ahora definamos la función:

$$g(t) = \frac{y(t^+) + y(t^-)}{2} \quad (\text{B.58})$$

Ésta coincide con  $y(t)$  sólo en los puntos en que es continua, y además hereda su periodicidad. Podemos observar también que si  $t_0$  es una discontinuidad de  $y(t)$ , lo es también de  $g(t)$  y:

$$g(t_0) = \frac{y(t_0^+) + y(t_0^-)}{2} = \frac{g(t_0^+) + g(t_0^-)}{2} \quad (\text{B.59})$$

Consideremos lo que sucede con el error  $e_n(t_0)$ , entre  $g(t)$  y su representación en serie de Fourier, a medida que  $n$  tiende a infinito. Si usamos la igualdad (B.57) recién obtenida y la expresión (B.49) para la  $n$ -ésima suma parcial, el

error puede escribirse como:

$$e_n(t_0) = g(t_0) - g_n(t_0) \quad (\text{B.60})$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t_0) \frac{\text{sen}(\omega_0(n + \frac{1}{2})\nu)}{2 \text{sen}(\frac{\omega_0}{2}\nu)} d\nu - \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t_0 + \nu) \frac{\text{sen}(\omega_0(n + \frac{1}{2})\nu)}{2 \text{sen}(\frac{\omega_0}{2}\nu)} d\nu \quad (\text{B.61})$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [g(t_0) - g(t_0 + \nu)] \frac{\text{sen}(\omega_0(n + \frac{1}{2})\nu)}{2 \text{sen}(\frac{\omega_0}{2}\nu)} d\nu \quad (\text{B.62})$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \frac{g(t_0) - g(t_0 + \nu)}{\frac{1}{2}\omega_0\nu} \frac{\frac{1}{2}\omega_0\nu}{\text{sen}(\frac{1}{2}\omega_0\nu)} \right] \text{sen}(\omega_0(n + \frac{1}{2})\nu) d\nu \quad (\text{B.63})$$

La expresión entre corchetes dentro de la integral es seccionalmente continua en el intervalo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , siempre y cuando  $t_0$  sea un punto de continuidad de  $g(t)$ , lo que permite afirmar que el primer cociente de la expresión entre corchetes se transforma en la derivada cuando  $\nu$  tiende a cero. En estos puntos, usando la ecuación (B.45), se deduce que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(t_0) = 0 \quad (\text{B.64})$$

O, equivalentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t_0) = g(t_0) = \frac{g(t_0^+) + g(t_0^-)}{2} \quad (\text{B.65})$$

Ya que, en este caso  $t_0$  se ha supuesto un punto de continuidad, es decir,  $g(t_0^+) = g(t_0^-) = g(t_0)$ .

En aquellos puntos (finitos) de discontinuidad de  $g(t)$ , podemos definir la función:

$$G(t) = g(t + t_0) - g(t_0) \quad (\text{B.66})$$

Si separamos esta función en sus partes par e impar:

$$G_{par}(t) = \frac{G(t) + G(-t)}{2} = \frac{g(t + t_0) + g(-t + t_0) - 2g(t_0)}{2} \quad (\text{B.67})$$

$$G_{impar}(t) = \frac{G(t) - G(-t)}{2} = \frac{g(t + t_0) - g(-t + t_0)}{2} \quad (\text{B.68})$$

La serie de Fourier de  $G_{impar}(t)$  converge a cero en  $t = 0$ , pues es una serie senoidal. Mientras que  $G_{par}(t)$  es continua en  $t = 0$  (cuya prueba se deja al lector), por tanto su serie de Fourier converge a  $G_{par}(0) = G(0)$ . Con esto podemos afirmar que la serie de Fourier de  $G(t)$  converge a cero en  $t = 0$ , y en consecuencia, la serie truncada  $G_n(t)$  satisface:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t_0) = g(t_0) \quad (\text{B.69})$$

Es decir, la serie de Fourier de  $g(t)$  en  $t = t_0$  converge a  $g(t_0)$ , también en el caso de los puntos de discontinuidad.

Ahora dada la definición de  $g(t)$  en (B.58), su expresión en serie de Fourier coincide con la de  $y(t)$ , por lo tanto convergen puntualmente a la misma función, y el lema queda así demostrado. □□□

Para que la representación en serie de Fourier de una función periódica converja uniformemente a la función original, es necesario imponer algunas condiciones adicionales, tal como vemos en el siguiente lema.

**Lema B.9. Convergencia uniforme de la serie de Fourier**

Supongamos que  $y(t)$  es una función continua en  $(-\infty, \infty)$ , de período  $T$ , cuya primera derivada  $y'(t)$  es seccionalmente continua. Entonces, su serie de Fourier converge uniformemente a  $y(t)$  en cualquier intervalo  $[a, b]$ . Es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \quad : \quad n > N \Rightarrow |y(t) - y_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b] \quad (\text{B.70})$$

**Demostración**

Sean:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \quad (\text{B.71})$$

$$A'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \cos(n\omega_0 t) + B'_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \quad (\text{B.72})$$

las series de Fourier de  $y(t)$  e  $y'(t)$ , respectivamente. Entonces, dada la periodicidad de  $y(t)$ , tenemos que:

$$A'_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y'(t) dt = \frac{1}{T} [y(\frac{T}{2}) - y(-\frac{T}{2})] = 0 \quad (\text{B.73})$$

Mientras que para  $n > 0$  tenemos:

$$A'_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y'(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (\text{B.74})$$

$$= \frac{2}{T} \left[ y(t) \cos(n\omega_0 t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + n\omega_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt \right] \quad (\text{B.75})$$

$$= n\omega_0 \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = n\omega_0 B_n \quad (\text{B.76})$$

Análogamente, se obtiene:

$$B'_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y'(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = -n\omega_0 A_n \quad (\text{B.77})$$

Utilizando la desigualdad de Parseval (B.38), podemos afirmar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n'^2 + B_n'^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n\omega_0 \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \right]^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y'(t)^2 dt < \infty \quad (\text{B.78})$$

Si se observa el término general  $\{n\omega_0 \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\}$  de la segunda serie, se aprecia que pertenece al conjunto de todas las sucesiones cuadrado sumables (o pertenecientes al espacio  $\ell_2$ ), al igual que la sucesión  $\{1/(n\omega_0)\}$ . Es posible demostrar que el producto de estas sucesiones también es cuadrado sumable (o pertenece a  $\ell_2$ ) y, por tanto, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n\omega_0} \cdot n\omega_0 \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (\text{B.79})$$

también converge.

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz (B.15), tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)| &\leq \|(A_n, B_n)\| \cdot \|(\cos(n\omega_0 t), \operatorname{sen}(n\omega_0 t))\| \quad (\text{B.80}) \\ &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sqrt{\cos^2(n\omega_0 t) + \operatorname{sen}^2(n\omega_0 t)} \\ &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

$$= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (\text{B.82})$$

Con este resultado, podemos comparar la serie:

$$|A_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)| \quad (\text{B.83})$$

con la serie convergente de constantes positivas:

$$|A_0| + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (\text{B.84})$$

Es así como, en virtud del *M-test* de Weierstrass en el Lema B.4, podemos afirmar que la serie de Fourier:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)] \quad (\text{B.85})$$

converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado, pero el Lema B.8 asegura que esta serie converge puntualmente a  $y(t)$ .

□□□

Hasta el momento hemos revisado las condiciones bajo las cuales la serie de Fourier satisface propiedades de convergencia puntual y uniforme, sin embargo, el siguiente resultado establece la *convergencia en norma* de la representación. Este resultado puede extenderse en general a todo espacio de Hilbert.

**Lema B.10. Convergencia en norma de la serie de Fourier**

Sea  $y(t)$  una función periódica, de periodo  $T$ , seccionalmente continua, y sea  $y_n(t)$  la  $n$ -ésima suma parcial de su representación en serie de Fourier, entonces la norma del error converge a cero cuando  $n$  tiende a infinito, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n(t)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y(t) - y_n(t)\| = 0 \quad (\text{B.86})$$

**Demostración**

En primer lugar, si denotamos por  $\{t_1, t_1, \dots, t_m\}$  los puntos de discontinuidad de la función  $y(t)$ , y consideramos su representación en serie de Fourier:

$$S_y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) \quad (\text{B.87})$$

sabemos, por el Lema B.8 de convergencia puntual, que:

$$S_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y(t^-) + y(t^+)) & t \in \{t_1, t_1, \dots, t_m\} \\ y(t) & t \notin \{t_1, t_1, \dots, t_m\} \end{cases} \quad (\text{B.88})$$

Ahora si consideramos el cuadrado de la norma del error  $e_n(t)$  (en el intervalo  $[0, T]$ ) tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n(t)\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |y(t) - y_n(t)|^2 dt \quad (\text{B.89})$$

$$= \int_0^T |y(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)|^2 dt \quad (\text{B.90})$$

$$= \int_0^T |y(t) - S_y(t)|^2 dt = 0 \quad (\text{B.91})$$

pues el integrando es cero excepto en los puntos de discontinuidad de  $y(t)$ .

□□□

Note que el lema anterior nos permite entender en mayor profundidad la igualdad:

$$y(t) = S_y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \quad (\text{B.92})$$

pues resulta ser un igualdad *en norma*, y no necesariamente para cada valor de  $t \in [0, T]$ . A continuación establecemos esta afirmación más formalmente.

**Corolario B.2. Identidad de Parseval**

Sea  $y(t)$  una función periódica, de período  $T$ , y  $A_0$ ,  $\{A_n\}$  y  $\{B_n\}$  los coeficientes de su representación en serie de Fourier trigonométrica definidos en (5.27) en la página 91, entonces:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t) dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (A_k^2 + B_k^2) \quad (\text{B.93})$$

**Demostración**

Es directa de la ecuación (B.43) en la página 377 y el Lema B.10, que establece que la norma del error  $e_n(t)$  se hace cero cuando  $n$  tiende a infinito.

□□□

La serie de Fourier es sólo una representación de la función  $y(t)$ , en el sentido que converge al mismo valor que  $y(t)$  en los puntos que esta función es continua, y en aquellos en que hay discontinuidades o *saltos*, la serie converge al *promedio* de los límites laterales. Note que estas diferencias entre la señal y su representación en serie de Fourier no son detectadas por la función de error, que (en norma) converge de todos modos a cero.

## Apéndice C

# La transformada de Fourier

En este apéndice se define y estudian las propiedades de la transformada de Fourier de una función arbitraria, tanto para el caso de tiempo continuo como en tiempo discreto. Además, se incluye una sección sobre la transformada rápida de Fourier, que constituye, en la práctica, la herramienta fundamental para el análisis espectral de señales.

### C.1. Transformada de Fourier en tiempo continuo

En esta sección consideramos el caso de las funciones de tiempo continuo, definidas en toda la recta real, es decir, en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

#### C.1.1. Definición de la transformada

Dada una función  $y(t)$ , su transformada de Fourier  $Y(j\omega)$  y su transformada de Fourier inversa quedan definidas por las ecuaciones:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{C.2})$$

Para que la transformada exista es suficiente que la función  $y(t)$  sea *absolutamente integrable*, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt < \infty \quad (\text{C.3})$$

Existen funciones que a pesar de no cumplir con esta condición, es posible calcular su transformada de Fourier, utilizando *funciones generalizadas* o *distribuciones*.

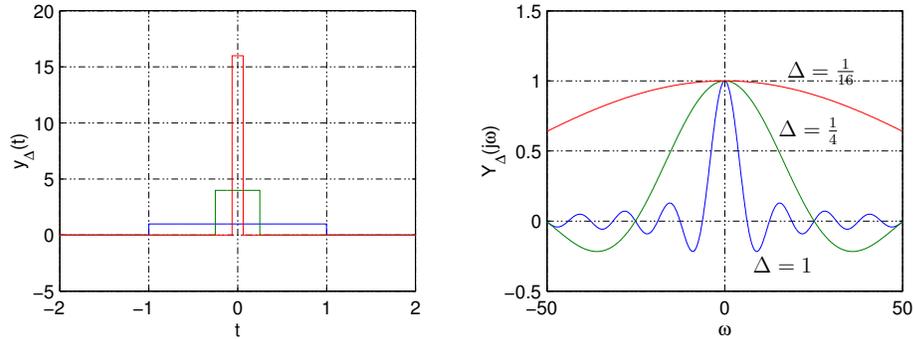


Figura C.1: Pulso  $y_{\Delta}(t)$  y su transformada  $Y_{\Delta}(j\omega)$  para  $\Delta$  igual a 1,  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{16}$  (Ejemplo C.1).

Veamos a manera de ejemplo cómo se puede obtener la transformada de Fourier del delta de Dirac, a partir de la transformada de un pulso como en el Ejemplo 6.1 en la página 119.

**Ejemplo C.1.** Consideremos un pulso centrado en el cero, de ancho  $\Delta$  y altura  $1/\Delta$ , es decir, una función:

$$y_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & ; |t| \leq \Delta/2 \\ 0 & ; |t| > \Delta/2 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Esta función está bien definida  $\forall t \in (-\infty, \infty)$ , y el área del pulso es unitaria  $\forall \Delta > 0$ . Su transformada de Fourier por tanto puede obtenerse, en base al Ejemplo 6.1 ya mencionado, o usando la definición (C.1):

$$Y_{\Delta}(j\omega) = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega\Delta} \left( e^{-j\omega\frac{\Delta}{2}} - e^{j\omega\frac{\Delta}{2}} \right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)}{\frac{\omega\Delta}{2}} \quad (\text{C.5})$$

Puede apreciarse que a medida que  $\Delta$  tiende a cero, la función se transforma en un pulso cada vez más alto y angosto, siendo esta una de las funciones que usualmente se utiliza para aproximar asintóticamente el delta de Dirac: en el límite la función es igual a cero, excepto  $t = 0$ , mientras que su integral se mantiene siempre igual a uno. Por su parte, la transformada de Fourier de este pulso se hace cada vez más plana a medida que  $\Delta$  tiende a cero, siendo igual a uno para todo  $\omega$  en el límite. Estas ideas se pueden apreciar en la Figura C.1.

De esta forma podemos establecer el siguiente diagrama conmutativo, en que de izquierda a derecha aplicamos el límite cuando  $\Delta \rightarrow 0$ , y de arriba a abajo aplicamos la transformada de Fourier y su inversa:

$$\begin{array}{ccc}
y_{\Delta}(t) & \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} & \delta(t) \\
\mathcal{F} \downarrow \uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow \uparrow \mathcal{F}^{-1} \\
Y_{\Delta}(j\omega) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)}{\frac{\omega\Delta}{2}} & \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} & Y(j\omega) = 1
\end{array} \quad (\text{C.6})$$

### C.1.2. Propiedades

Existen diversas propiedades de la transformada de Fourier que resultan de mucha utilidad en el análisis frecuencial de señales y su relación con los sistemas lineales. Además, estas mismas propiedades permiten obtener la transformada de Fourier de una función dada a partir de transformadas de señales más simples.

#### Lema C.1. Linealidad

La transformada de Fourier y su transformada de Fourier inversa son operadores lineales, es decir, dadas las funciones  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , y sus respectivas transformadas:

$$\mathcal{F}\{y_1(t)\} = Y_1(j\omega) \iff \mathcal{F}^{-1}\{Y_1(j\omega)\} = y_1(t) \quad (\text{C.7})$$

$$\mathcal{F}\{y_2(t)\} = Y_2(j\omega) \iff \mathcal{F}^{-1}\{Y_2(j\omega)\} = y_2(t) \quad (\text{C.8})$$

entonces, para cualquier par de escalares  $\alpha$  y  $\beta$  tenemos que:

$$\mathcal{F}\{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\} = \alpha Y_1(j\omega) + \beta Y_2(j\omega) \quad (\text{C.9})$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\alpha Y_1(j\omega) + \beta Y_2(j\omega)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (\text{C.10})$$

#### Demostración

Se deja como ejercicio al lector, pues es consecuencia directa de la linealidad de las integrales en la definición de las transformadas (C.1) y (C.2).

□□□

#### Lema C.2. Simetría

Sea  $y(t)$  una función definida  $\forall t$ , cuya transformada de Fourier es  $Y(j\omega)$ . Entonces, si consideramos la función  $Y(t)$ , en el dominio del tiempo ahora, su transformada de Fourier es:

$$\mathcal{F}\{Y(t)\} = 2\pi y(-j\omega) \quad (\text{C.11})$$

#### Demostración

Es directa al reemplazar  $Y(t)$  en la definición de la transformada (C.1) y utilizar la ecuación (C.2) que define a  $y(t)$  como transformada inversa de  $Y(j\omega)$ :

$$\mathcal{F}\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-j\omega t} dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{jt(-\omega)} dt = 2\pi y(-j\omega) \quad (\text{C.12})$$

□□□

**Ejemplo C.2.** Consideremos una función constante  $y(t) = C$ . Esta función no es absolutamente integrable, es decir, no satisface la condición (C.3). Sin embargo, su transformada de Fourier puede obtenerse en base a la transformada del Delta de Dirac y al Lema C.2 de simetría:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{C\} = C \cdot \mathcal{F}\{1\} = C \cdot 2\pi\delta(-\omega) = C \cdot 2\pi\delta(\omega) \quad (\text{C.13})$$

□□□

Veamos ahora cómo se ve afectada la transformada de Fourier de una señal cuando esta es desplazada en el tiempo, que puede ser el caso en que existe, por ejemplo, retardo.

**Lema C.3. Desplazamiento en el tiempo.**

Sea  $y(t)$  una función definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , cuya transformada de Fourier es  $Y(j\omega)$ , entonces la transformada de Fourier de  $y(t - t_0)$  es:

$$\mathcal{F}\{y(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} Y(j\omega) \quad (\text{C.14})$$

**Demostración**

Aplicando la definición de la Transformada de Fourier (C.1) a la función desplazada en el tiempo, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} y(t - t_0) e^{-j\omega(t - t_0)} dt \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} y(t^*) e^{-j\omega t^*} dt^* = e^{-j\omega t_0} Y(j\omega) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

□□□

**Ejemplo C.3.** La señal del Ejemplo 6.1 en la página 119, es un pulso  $p_0(t)$  de amplitud  $A$  y ancho  $\tau$  centrado en  $t = \tau/2$ , entonces su transformada de Fourier se puede obtener usando el Lema C.3 y el resultado (C.5). Así, se llega a:

$$\mathcal{F}\{p_{\frac{\tau}{2}}(t)\} = e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} A\tau \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \quad (\text{C.16})$$

□□□

Si analizamos el ejemplo anterior, podemos apreciar que sólo es el ángulo de la transformada de Fourier del pulso el que se ve afectado al desplazarlo en el tiempo, pues su módulo permanece invariante. Esto es consistente con la intuición ya que la ubicación del instante  $t = 0$ , cuando consideramos una función definida para  $-\infty < t < \infty$ , es arbitraria afectando sólo la fase del espectro.

A continuación vemos la contraparte del Lema C.3. Esta vez el desplazamiento ocurre en el dominio de la frecuencia  $\omega$ .

**Lema C.4. Desplazamiento en frecuencia**

Sea  $y(t)$  una función definida en toda la recta real, es decir, para  $-\infty < t < \infty$ , cuya transformada de Fourier es  $Y(j\omega)$ , entonces:

$$\mathcal{F}\{e^{at}y(t)\} = Y(j\omega - a) \quad ; a \in \mathbb{C} \quad (\text{C.17})$$

**Demostración**

Aplicando la definición de la transformada (C.1) a la función  $e^{at}y(t)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{at}y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-(j\omega - a)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega^* t} dt = Y(j\omega^*) = Y(j\omega - a) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

en que hemos usado la variable auxiliar  $\omega^* = \omega + ja$ .

□□□

**Ejemplo C.4.** Con el lema anterior, es posible obtener la transformada de Fourier de una exponencial periódica, considerando en la ecuación (C.17) el caso particular  $a = j\omega_0$ :

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} \cdot 1\} = 2\pi\delta(j\omega - j\omega_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{C.19})$$

donde se ha usado la propiedad del delta de Dirac, descrita en la ecuación (2.6) en la página 23.

A partir la transformada de la exponencial compleja o periódica, y utilizando la ecuación de Euler, se puede obtener la transformada del coseno:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}] \\ &= \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

y del seno:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} = \frac{-j}{2} [-\mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

□□□

El Lema C.4 tiene importantes aplicaciones en el análisis de señales que se modulan en frecuencia, de particular interés en sistemas de comunicación, y aquellas que son periódicas, como puede apreciarse en los siguientes corolarios.

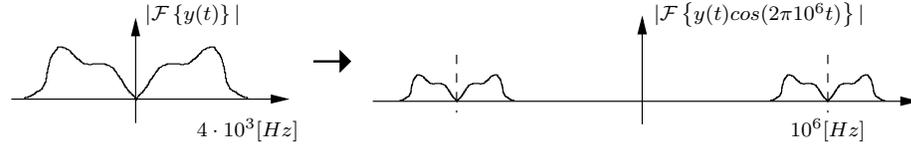


Figura C.2: Espectro de una señal de frecuencias audibles y espectro de la señal modulada.

### Corolario C.1. Modulación

Sea  $y(t)$  una señal (función) definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , cuyo espectro (transformada de Fourier) es  $Y(j\omega)$ , entonces:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)y(t)\} = \frac{1}{2}(Y(j\omega - j\omega_0) + Y(j\omega + j\omega_0)) \quad (\text{C.22})$$

### Demostración

Es directa del Lema C.4 y la ecuación de Euler, es decir, escribiendo  $\cos(\omega_0 t)$  con exponenciales periódicas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)y(t)\} &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})y(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}y(t)\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}y(t)\}) \\ &= \frac{1}{2}(Y(j\omega - j\omega_0) + Y(j\omega + j\omega_0)) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

□□□

Se deja al lector probar el resultado que se obtiene al utilizar  $\sin(\omega_0 t)$  en lugar de  $\cos(\omega_0 t)$  para la modulación de la señal  $y(t)$ , y que aparece en la Tabla C.1 en la página 398.

**Ejemplo C.5.** En ambos casos de modulación planteados, cosenoidal y senooidal, al hacer el producto de una señal con una senoide se logra desplazar el espectro, o contenido de frecuencias de la señal. Esto permite llevar, por ejemplo, señales de contenido de baja frecuencia (como la voz humana, en la banda hasta 4[kHz]), a bandas de frecuencia para transmisión radial (por ejemplo 1[MHz]). Esta idea se muestra en la Figura C.2

□□□

Otra aplicación importante del Lema C.4 se refiere a las funciones periódicas. Si consideramos una señal  $y_T(t)$  periódica de período  $T$ , claramente no satisface la condición (C.3) (no es absolutamente integrable) y, por tanto, no es posible obtener su transformada de Fourier a través de la definición (C.1). Sin embargo, una señal periódica podemos representarla (en el dominio del tiempo) mediante

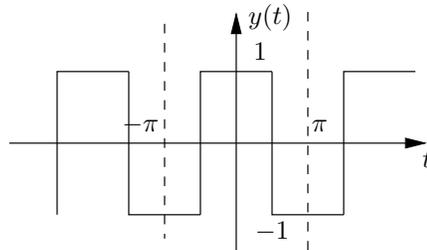


Figura C.3: Tren de pulsos (Ejemplo C.6).

su *Serie de Fourier*, trigonométrica o exponencial. En los desarrollos previos hemos determinado las expresiones para la transformada de Fourier de una constante, del coseno, del seno y de una exponencial periódica, y por tanto podemos obtener de esta forma la transformada de una señal periódica, tal como establece el siguiente corolario.

**Corolario C.2. Funciones Periódicas**

Sea  $y_T(t)$  una señal periódica de periodo  $T$ , tal que su representación en serie de Fourier (exponencial) es:

$$y_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-j\omega_n t} \quad ; \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (\text{C.24})$$

La transformada de Fourier de  $y_T(t)$  es entonces igual a la transformada de su serie de Fourier:

$$\mathcal{F}\{y_T(t)\} = Y_T(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega + \omega_n) \quad (\text{C.25})$$

**Demostración**

Queda como ejercicio al lector.

□□□

**Ejemplo C.6.** Consideremos el tren de pulsos de la Figura C.3 definido por:

$$y(t) = \begin{cases} +1 & ; 0 \leq |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & ; \frac{\pi}{2} < |t| \leq \pi \\ y(t + 2\pi) & ; |t| > \pi \end{cases}$$

La integral del valor absoluto de la función claramente diverge, y si intentamos obtener la transformada de Fourier de esta función utilizando la definición (C.1), llegamos a una expresión difícil de simplificar. En cambio, la función

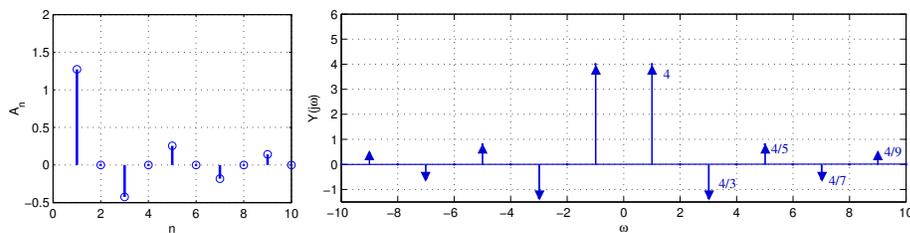


Figura C.4: Amplitud de los coeficientes  $A_n$  y espectro  $Y(j\omega)$

$y(t)$  puede expresarse mediante su serie cosenoidal de Fourier, pues  $y(t)$  es una función par:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) \quad (\text{C.26})$$

en que:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(nt) dt = \frac{4}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{C.27})$$

De esta forma, usando al transformada del coseno en (C.20), tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) [\delta(\omega + n) + \delta(\omega - n)] \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{4}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta(\omega + n) \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Es decir, los coeficientes  $A_n$  se transforman en el peso de cada delta de Dirac en el espectro  $Y(j\omega)$ . En la Figura C.4, sólo por razones didácticas, hemos representado estos pesos como la altura de cada impulso. Sin embargo, no se debe olvidar que la amplitud de cada delta de Dirac tiende a  $\infty$ , mientras que el peso corresponde a su área.

□□□

### Lema C.5. Escalamiento

Sea  $y(t)$  una función definida para  $t \in (-\infty, \infty)$ , cuya transformada de Fourier es  $Y(j\omega)$ , y sea  $\alpha$  una constante real distinta de cero, entonces:

$$\mathcal{F}\{y(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} Y\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (\text{C.29})$$

### Demostración

Si reemplazamos la función escalada  $y(\alpha t)$  en la definición de la transformada (C.1), podemos hacer el cambio de variables  $t^* = \alpha t$ , teniendo en cuenta



que el signo de  $a$  determina si los límites de la integral se mantienen o se deben intercambiar:

$$\mathcal{F}\{y(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(\alpha t)e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} y(t^*)e^{-j\omega \frac{t^*}{\alpha}} \frac{dt^*}{\alpha} & ; \text{ si } \alpha > 0 \\ \int_{\infty}^{-\infty} y(t^*)e^{-j\omega \frac{t^*}{\alpha}} \frac{dt^*}{\alpha} & ; \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{C.30})$$

Dado que el cambio de orden en los límites de la integral equivale a un cambio de signo, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{y(\alpha t)\} = \frac{\text{signo}(\alpha)}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} y(t^*)e^{-j\omega \frac{t^*}{\alpha}} dt^* = \frac{1}{|\alpha|} Y\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (\text{C.31})$$

□□□

A partir del lema anterior puede verificarse directamente que:

$$\mathcal{F}\{y(-t)\} = Y(-j\omega) \quad (\text{C.32})$$

A continuación revisamos algunas propiedades de la transformada de Fourier de utilidad en la solución de ecuaciones diferenciales y el análisis de sistemas. En particular, se examinan las propiedades referidas a la transformada de la derivada, de la integral y de la convolución de funciones.

#### Lema C.6. Derivación en $t$

Sea  $y(t)$  una función definida en toda la recta real tal que  $y(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , y cuya transformada de Fourier es  $Y(j\omega)$ . Entonces, la transformada de Fourier de la derivada de  $y(t)$  con respecto al tiempo es:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = j\omega Y(j\omega) \quad (\text{C.33})$$

#### Demostración

Si se aplica la definición de la transformada de Fourier (C.1) a la derivada  $\frac{dy(t)}{dt}$ , y se aplica la regla de integración por partes, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt \\ &= [y(t)e^{-j\omega t}] \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

donde, dada la condición asintótica sobre  $y(t)$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , sólo sobrevive el segundo término:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega Y(j\omega) \quad (\text{C.35})$$

□□□

Si  $y(t)$  no cumple la condición  $y(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , el lema aún se puede aplicar, con precaución, en algunos casos. Por ejemplo, si  $y(t) = \cos(\omega_0 t)$ , la transformada de  $\sin(\omega_0 t)$  se puede calcular usando este lema, aunque la condición señalada no se cumple. Es también importante notar que el lema anterior *no garantiza la existencia de la transformada de la derivada temporal de  $y(t)$* , sino que, en caso de existir, su expresión puede obtenerse utilizando (C.33).

Para las derivadas de orden superior en tanto, tenemos el siguiente corolario, que se debe utilizar con la misma precaución antes mencionada.

**Corolario C.3. Derivadas de orden superior**

Sea  $y(t)$  una función definida en toda la recta real, cuya transformada de Fourier es  $Y(j\omega)$ , tal que  $y(t)$  y todas sus derivadas hasta de orden  $n-1$  tienden a cero cuando  $|t|$  tiende a infinito. Entonces tenemos que:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = (j\omega)^n Y(j\omega) \quad (\text{C.36})$$

**Demostración**

Directa, aplicando recursivamente el lema anterior.

□□□

**Lema C.7. Transformada de la integral**

Sea  $y(t)$  una función definida en toda la recta real, cuya transformada de Fourier es  $Y(j\omega)$ . Entonces, la transformada de su integral definida es:

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} Y(j\omega) + \pi Y(0) \delta(\omega) \quad (\text{C.37})$$

**Demostración**

Para demostrar esta propiedad debemos en primer lugar observar que si definimos  $\phi_1(t)$  como la integral de  $y(t)$  que aparece en (C.37), entonces, por el Teorema Fundamental del Cálculo [25]:

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \right) = y(t) \quad (\text{C.38})$$

Es más, para cualquier constante  $k$  tenemos que:

$$\frac{d}{dt} (\phi_1(t) + k) = y(t) \quad (\text{C.39})$$

Si aplicamos transformada de Fourier a ambos lados, usando el Lema C.6:

$$j\omega (\Phi_1(j\omega) + 2\pi k \delta(\omega)) = Y(j\omega) \quad (\text{C.40})$$

donde  $\Phi_1(j\omega) = \mathcal{F} \{ \phi_1(t) \}$  es la transformada que nos interesa despejar:

$$\Phi_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} Y(j\omega) - 2\pi k \delta(\omega) \quad (\text{C.41})$$

Nos resta ahora sólo encontrar el valor de  $k$ .

Si definimos:

$$\phi_2(t) = \int_{-\infty}^t y(-x)dx \quad \Rightarrow \quad \Phi_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(-j\omega) - 2\pi k\delta(\omega) \quad (\text{C.42})$$

es su transformada de Fourier, obtenida de manera análoga a la ecuación (C.41).

Ahora bien, usando  $\phi_2(t)$ , podemos reescribir la función  $\phi_1(t)$  de la forma:

$$\phi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)d\tau - \phi_2(-t) \quad (\text{C.43})$$

y, tras aplicar transformada de Fourier a ambos lados, se llega a:

$$\Phi_1(j\omega) = 2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)d\tau \right) \delta(\omega) - \Phi_2(-j\omega) \quad (\text{C.44})$$

$$\frac{1}{j\omega}Y(j\omega) - 2\pi k\delta(\omega) = 2\pi \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)d\tau \right) \delta(\omega) - \left( \frac{1}{-j\omega}Y(j\omega) - 2\pi k\delta(-\omega) \right) \quad (\text{C.45})$$

donde, observando que  $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$ , se puede despejar la constante  $k$ :

$$k = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)d\tau = -\frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right) \Big|_{\omega=0} = -\frac{1}{2}Y(0) \quad (\text{C.46})$$

Finalmente, reemplazando en (C.41), se obtiene el resultado (C.37).  $\square\square\square$

**Ejemplo C.7.** El lema anterior permite obtener fácilmente la transformada del escalón unitario  $\mu(t)$  o función de Heaviside, a partir de la transformada del delta de Dirac.

Dada la definición del delta Dirac y de la función de Heaviside, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \mu(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ 1 & ; t > 0 \end{cases} \quad (\text{C.47})$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mu(t)\} &= \mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}\{\delta(t)\} + \pi\delta(\omega) \mathcal{F}\{\delta(t)\} \Big|_{\omega=0} \\ &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

$\square\square\square$

### Lema C.8. Convolución en el tiempo

Sean  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , dos funciones definidas para  $-\infty < t < \infty$ , cuyas transformadas de Fourier son  $Y_1(j\omega)$  e  $Y_2(j\omega)$ , respectivamente. Entonces, la transformada de Fourier de la convolución entre ellas es:

$$\mathcal{F}\{y_1(t) * y_2(t)\} = Y_1(j\omega)Y_2(j\omega) \quad (\text{C.49})$$

en que la convolución se define como:

$$y_1(t) * y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) y_2(t - \tau) d\tau \quad (\text{C.50})$$

### **Demostración**

Aplicando la definición de la transformada (C.1) a la convolución se obtiene:

$$\mathcal{F}\{y_1(t) * y_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) y_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{C.51})$$

Intercambiando el orden de integración se obtiene:

$$\mathcal{F}\{y_1(t) * y_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau \quad (\text{C.52})$$

expresión que, usando la ecuación (C.14), se puede escribir como:

$$\mathcal{F}\{y_1(t) * y_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) (e^{-j\omega\tau} Y_2(j\omega)) d\tau \quad (\text{C.53})$$

$$= Y_2(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = Y_2(j\omega) Y_1(j\omega) \quad (\text{C.54})$$

□□□

El lema siguiente establece la expresión general para la transformada de Fourier de un producto de funciones que puede resultar útil para el cálculo de la transformada de Fourier de una funciones más complicadas.

### **Lema C.9. Producto de funciones**

Sean  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  funciones definidas para  $-\infty < t < \infty$ , cuyas transformadas de Fourier son  $Y_1(j\omega)$  e  $Y_2(j\omega)$ , respectivamente. Entonces, la transformada de Fourier del producto entre ellas es:

$$\mathcal{F}\{y_1(t)y_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} Y_1(j\omega) * Y_2(j\omega) \quad (\text{C.55})$$

### **Demostración**

Consideremos la transformada de Fourier inversa de la convolución de funciones en  $\omega$ :

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y_1(j\omega) * Y_2(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\omega) * Y_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{C.56})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\zeta) Y_2(j\omega - j\zeta) d\zeta \right) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{C.57})$$

desde donde, intercambiando el orden de integración, se llega a:

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y_1(j\omega) * Y_2(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\zeta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(j\omega - j\zeta) e^{j\omega t} d\omega \right) d\zeta \quad (\text{C.58})$$

Luego, si se define  $j\omega - j\zeta = j\omega^*$ , se obtiene:

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y_1(j\omega) * Y_2(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\zeta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(j\omega^*) e^{(j\omega^* + j\zeta)t} d\omega^* \right) d\zeta \quad (\text{C.59})$$

$$= 2\pi \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\zeta) e^{j\zeta t} d\zeta \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(j\omega^*) e^{j\omega^* t} d\omega^* \right) \quad (\text{C.60})$$

$$= 2\pi y_1(t) y_2(t) \quad (\text{C.61})$$

Finalmente, aplicando transformada de Fourier a ambos lados, se obtiene el resultado (C.55). □□□

### Teorema C.1. Teorema de Parseval. El caso de tiempo continuo

Sean  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  funciones reales, definidas  $\forall t \in (-\infty, \infty)$ , cuyas transformadas de Fourier son  $Y_1(j\omega)$  y  $Y_2(j\omega)$ , respectivamente. Entonces tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(t) y_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\omega) Y_2(-j\omega) d\omega \quad (\text{C.62})$$

#### Demostración

Esto se demuestra con ayuda del Lema C.8 (convolución en el tiempo):

$$y_1(t) * y_2(-t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y_1(j\omega) Y_2(-j\omega)\} \quad (\text{C.63})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) y_2(-t + \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\omega) Y_2(-j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{C.64})$$

donde hemos usado el resultado en (C.32) que establece que  $\mathcal{F}\{y_2(-t)\} = Y_2(-j\omega)$ . Si evaluamos ahora para  $t = 0$ , obtenemos el resultado (C.62) □□□

**Corolario C.4.** Si consideramos los mismos supuestos del teorema anterior, para el caso particular  $y_1(t) = y_2(t) = y(t)$ , la ecuación (C.62) se reduce a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{y(t)\}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega \quad (\text{C.65})$$

#### Demostración

Ejercicio para el lector. □□□

La Tabla C.1, en la página 398, resume las propiedades hasta aquí revisadas, mientras que en la Tabla C.2 en la página 399 aparecen algunas transformadas simples de uso común.

$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\}$	Descripción
$\sum_{i=1}^l a_i y_i(t)$	$\sum_{i=1}^l a_i Y_i(j\omega)$	Linealidad
$\frac{dy(t)}{dt}$	$j\omega Y(j\omega)$	Derivación
$\frac{d^k y(t)}{dt^k}$	$(j\omega)^k Y(j\omega)$	Derivadas de orden superior
$\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} Y(j\omega) + \pi Y(0) \delta(\omega)$	Integración
$y(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau} Y(j\omega)$	Retardo
$y(at)$	$\frac{1}{ a } Y\left(j\frac{\omega}{a}\right)$	Escalamiento temporal
$y(-t)$	$Y(-j\omega)$	Inversión temporal
$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) y_2(t - \tau) d\tau$	$Y_1(j\omega) Y_2(j\omega)$	Convolución
$e^{at} y_1(t)$	$Y_1(j\omega - a)$	Desplazamiento en frecuencia
$y(t) \cos(\omega_o t)$	$\frac{Y(j\omega - j\omega_o) + Y(j\omega + j\omega_o)}{2}$	Modulación cosenoidal
$y(t) \text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{Y(j\omega - j\omega_o) - Y(j\omega + j\omega_o)}{j2}$	Modulación senoidal
$Y(t)$	$2\pi y(-j\omega)$	Simetría
$y_1(t) y_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(j\zeta) Y_2(j\omega - j\zeta) d\zeta$	Producto temporal

Tabla C.1: Propiedades de la transformada de Fourier.

$f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$	$\mathcal{F}\{f(t)\}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\mu(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\mu(t) - \mu(t - t_o)$	$\frac{1 - e^{-j\omega t_o}}{j\omega}$
$e^{-\alpha t}\mu(t) \quad \Re\{\alpha\} \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{j\omega + \alpha}$
$te^{-\alpha t}\mu(t) \quad \Re\{\alpha\} \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{(j\omega + \alpha)^2}$
$e^{-\alpha t } \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$	$\frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$
$\cos(\omega_o t)$	$\pi(\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o))$
$\text{sen}(\omega_o t)$	$j\pi(\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o))$
$\cos(\omega_o t)\mu(t)$	$\frac{\pi}{2}(\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)) + \frac{j\omega}{-\omega^2 + \omega_o^2}$
$\text{sen}(\omega_o t)\mu(t)$	$\frac{j\pi}{2}(\delta(\omega + \omega_o) - \delta(\omega - \omega_o)) + \frac{\omega_o}{-\omega^2 + \omega_o^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega_o t)\mu(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$	$\frac{j\omega + \alpha}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_o^2}$
$e^{-\alpha t}\text{sen}(\omega_o t)\mu(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$	$\frac{\omega_o}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_o^2}$

Tabla C.2: Tabla de transformadas de Fourier

## C.2. Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD)

En esta sección consideramos el caso de las funciones de tiempo discreto, definidas para todos los números enteros, es decir, las secuencias de la forma  $y[t]$ , en que  $t \in \mathbb{Z}$ .

### C.2.1. Definición de la transformada

Dada una función definida en tiempo discreto  $y[t]$ , en que  $t \in \mathbb{Z}$ , su transformada de Fourier de tiempo discreto  $Y[e^{j\theta}]$  y su transformada de Fourier discreta inversa quedan definidas por las ecuaciones:

$$\mathcal{F}_d \{y[t]\} = Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[t] e^{-j\theta t} \quad (\text{C.66})$$

$$\mathcal{F}_d^{-1} \{Y[e^{j\theta}]\} = y[t] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y[e^{j\theta}] e^{j\theta t} d\theta \quad (\text{C.67})$$

La transformada  $Y[e^{j\theta}]$  definida en (C.66) resulta ser periódica, de período  $2\pi$ , por tanto la integral que define la transformada inversa (C.67), puede calcular en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ . En este texto también se usa el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Para que la transformada exista es suficiente que la función  $y[t]$  sea *absolutamente sumable*, es decir:

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |y[t]| < \infty \quad (\text{C.68})$$

Si bien existen funciones que no cumplen con esta condición, a pesar de ello es posible obtener su transformada de Fourier de tiempo discreto utilizando *funciones generalizadas* o *distribuciones*.

A continuación vemos algunos ejemplos en que se obtiene la TFTD para el delta de Kronecker, una secuencia constante y para una exponencial decreciente.

**Ejemplo C.8.** *Consideremos la secuencia:*

$$y[t] = \delta[t] = \begin{cases} 1 & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.69})$$

*Esta secuencia corresponde a un **delta de Kronecker**, y claramente satisface la condición (C.68), es decir, es absolutamente sumable, lo que asegura la existencia de la transformada (C.66):*

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta[t] e^{-j\theta t} = \delta[0] e^{-j\theta 0} = 1 \quad (\text{C.70})$$

es decir, su transformada de Fourier de tiempo discreto es constante.  $\square\square\square$

El resultado en el ejemplo anterior puede interpretarse de manera análoga al delta de Dirac en tiempo continuo (Ejemplo C.1 en la página 386), cuya transformada también es constante y representa un *espectro plano*, o con igual contenido frecuencial para todas las frecuencias.

**Ejemplo C.9.** Consideremos ahora el caso opuesto al ejemplo anterior, en que tenemos una secuencia constante que se escoge de amplitud unitaria por simplicidad. Es decir, la secuencia que nos interesa es:

$$y[t] = 1 \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.71})$$

Esta secuencia claramente **no** satisface la condición (C.68), y por tanto la existencia de su transformada de tiempo discreto no está garantizada. Sin embargo, si usamos la definición de la transformada (C.66) tenemos que:

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\theta t} \quad (\text{C.72})$$

en que la serie al lado derecho puede interpretarse como la serie exponencial de Fourier de la función  $Y[e^{j\theta}]$ , periódica en  $\theta$ , en que los coeficientes son  $C_t = 1$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ .

De acuerdo a lo estudiado en la Sección §5.3.2, la serie de Fourier exponencial para una función  $f(\theta)$  está dada por:

$$f(\theta) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} C_t \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}t\theta} \iff C_t = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\theta) e^{j\frac{2\pi}{T}t\theta} \quad (\text{C.73})$$

Comparando con (C.72), podemos observar que el período de la función en cuestión debe ser  $T = 2\pi$ , que es justamente el período de  $Y(e^{j\theta})$ . Además, para que los coeficientes  $C_t$  sean todos iguales a 1, es suficiente que  $f(\theta)$  sea un delta Dirac centrado en la frecuencia  $\theta = 0$  de amplitud  $2\pi$ . Tenemos por lo tanto que la transformada de Fourier de tiempo discreto de la secuencia constante  $y[t] = 1$  es igual a:

$$Y[e^{j\theta}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n) \quad (\text{C.74})$$

El resultado obtenido se puede verificar calculando la TFTD inversa (C.67), que puede calcularse en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} y[t] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y[e^{j\theta}] e^{j\theta t} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n) e^{j\theta t} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta) e^{j\theta t} d\theta = 1 \quad \forall t \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

$\square\square\square$

**Ejemplo C.10.** Consideremos ahora la función:

$$y[t] = \alpha^t \mu[t] \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{C.76})$$

Su transformada de Fourier de tiempo discreto es:

$$Y[e^{j\theta}] = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t e^{-j\theta t} = \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\theta})^t \quad (\text{C.77})$$

la cual resulta ser una serie geométrica convergente ya que  $|\alpha e^{-j\theta}| < 1$ , por lo tanto:

$$Y[e^{j\theta}] = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\theta}} \quad (\text{C.78})$$

□□□

En la Figura C.5 se ilustran los resultados obtenidos en los ejemplos precedentes. En particular, para el Ejemplo C.10 se representa sólo el módulo de la transformada de Fourier, para  $\alpha = 0,7$ .

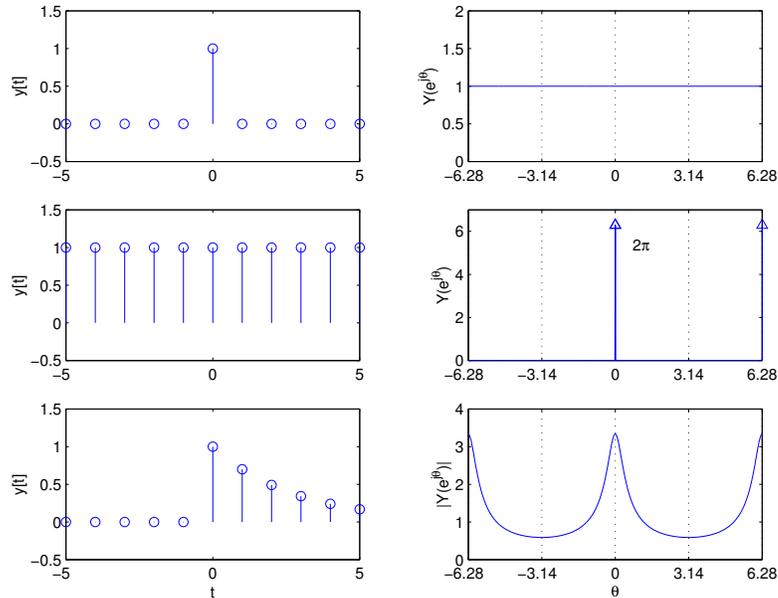


Figura C.5: Funciones y sus respectivas transformadas de Fourier de tiempo discreto (Ejemplos C.8, C.9 y C.10).

## C.2.2. Propiedades

A continuación se detallan una serie de propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto que resultan útiles para el análisis de señales y siste-

mas, y para la obtención de algunas transformadas a partir de otras de señales más simples.

**Lema C.10. Linealidad**

La transformada de Fourier de tiempo discreto es una transformación lineal, es decir, si  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  son dos secuencias definidas  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , cuyas transformadas de Fourier son  $Y_1[e^{j\theta}]$  e  $Y_2[e^{j\theta}]$  respectivamente, entonces:

$$\mathcal{F}_d \{ \alpha y_1[k] + \beta y_2[k] \} = \alpha Y_1[e^{j\theta}] + \beta Y_2[e^{j\theta}] \quad (\text{C.79})$$

**Demostración**

Es directa de la definición de la transformada y de su inversa en (C.66)–(C.67), por tanto la dejamos de ejercicio al lector.

□□□

**Lema C.11. Desplazamiento en el tiempo.**

Sea  $y[t]$  una secuencia de tiempo discreto definida  $\forall t \in \mathbb{Z}$ , cuya transformada de Fourier de tiempo discreto es  $Y[e^{j\theta}]$ , y sea  $t_0$  un número entero, entonces:

$$\mathcal{F}_d \{ y[t - t_0] \} = e^{-j\theta t_0} Y[e^{j\theta}] \quad t_0 \in \mathbb{Z} \quad (\text{C.80})$$

**Demostración**

Consideremos la definición de la transformada (C.66), entonces, para cualquier  $t_0 \in \mathbb{Z}$ , se cumple que:

$$\mathcal{F}_d \{ y[t - t_0] \} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[t - t_0] e^{-j\theta t} \quad (\text{C.81})$$

Sea  $t - t_0 = l$ , entonces  $t = l + t_0$  y reemplazando en la sumatoria:

$$\mathcal{F}_d \{ y[t - t_0] \} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l] e^{-j\theta(l+t_0)} = e^{-j\theta t_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l] e^{-j\theta l} = e^{-j\theta t_0} Y[e^{j\theta}] \quad (\text{C.82})$$

□□□

**Lema C.12. Desplazamiento en la frecuencia**

Sea  $y[t]$  una secuencia de tiempo discreto definida  $\forall t \in \mathbb{Z}$ , con transformada de Fourier de tiempo discreto  $Y[e^{j\theta}]$ , y una constante  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ , entonces:

$$\mathcal{F}_d \{ e^{j\theta_0 k} y[t] \} = Y[e^{j(\theta - \theta_0)}] \quad (\text{C.83})$$

**Demostración**

Si consideramos la definición de la transformada (C.66), tenemos que:

$$\mathcal{F}_d \{e^{j\theta_0 t} y[t]\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{j\theta_0 t} y[t] e^{-j\theta t} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[t] e^{-j(\theta - \theta_0)t} \quad (\text{C.84})$$

Si cambiamos variable  $\zeta = \theta - \theta_0$ , entonces:

$$\mathcal{F}_d \{e^{j\theta_0 k} y[t]\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[t] e^{-j\zeta t} = Y[e^{j\zeta}] = Y[e^{j(\theta - \theta_0)}] \quad (\text{C.85})$$

Es importante notar que si la frecuencia  $\theta_0 \notin [0, 2\pi)$ , es decir, si se encuentra fuera de la banda que hemos considerado hasta ahora, siempre puede escribirse de la forma:

$$\theta_0 = \vartheta_0 + 2\pi n \quad (\text{C.86})$$

en que  $\vartheta_0 \in [0, 2\pi)$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , con lo que:

$$e^{j\theta_0} = e^{j(\vartheta_0 + 2\pi n)} = e^{j\vartheta_0} e^{j2\pi n} = e^{j\vartheta_0} \quad (\text{C.87})$$

□□□

**Ejemplo C.11.** Considere la secuencia de tiempo discreto:

$$y[t] = \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \quad (\text{C.88})$$

Su transformada de Fourier de tiempo discreto se puede obtener directamente utilizando el Lema (C.12), ya que el coseno puede escribirse en términos de exponenciales complejas:

$$y[t] = \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{10}t} + e^{-j\frac{2\pi}{10}t}}{2} \quad (\text{C.89})$$

Cada exponencial corresponde a la constante  $y_0[t] = 1$  multiplicada por la respectiva exponencial periódica, por lo tanto la transformada de Fourier discreta se puede obtener fácilmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right) \right\} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}_d \left\{ e^{j\frac{2\pi}{10}t} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}_d \left\{ e^{-j\frac{2\pi}{10}t} \right\} \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{10} + 2\pi n\right) + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta + \frac{2\pi}{10} + 2\pi n\right) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \delta\left(\theta - \frac{2\pi}{10} + 2\pi n\right) + \delta\left(\theta + \frac{2\pi}{10} + 2\pi n\right) \right) \quad (\text{C.90}) \end{aligned}$$

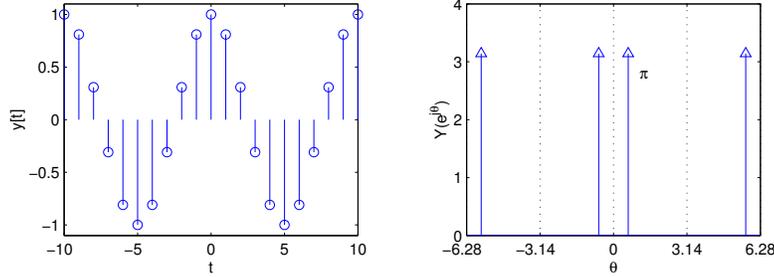


Figura C.6: Señal cosenoidal y su transformada de Fourier de tiempo discreto (Ejemplo C.11).

Si consideramos ahora sólo las componentes de frecuencia en la banda  $\theta \in (-\pi, \pi)$ , podemos apreciar que sólo existen dos deltas de Dirac en frecuencia:

$$\mathcal{F}_d \left\{ \cos \left( \frac{2\pi}{10} t \right) \right\} \Big|_{-\pi < \theta < \pi} = \pi \left( \delta \left( \theta - \frac{2\pi}{10} \right) + \delta \left( \theta + \frac{2\pi}{10} \right) \right) \quad (\text{C.91})$$

En la Figura C.6, se muestra la secuencia periódica discreta y su espectro, es decir, su transformada de Fourier de tiempo discreto formada, en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ , sólo por dos deltas de Dirac correspondientes a la única frecuencia en la secuencia (C.88).

□□□

Como consecuencia también del Lema C.12, que expresa el desplazamiento en frecuencia que sufre el espectro de una señal discreta al ser multiplicado por una exponencial compleja, tenemos el siguiente corolario referido a la **modulación** de señales mediante sinusoidales.

#### Corolario C.5. Modulación

Sea  $y[t]$  una secuencia discreta definida para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , cuya transformada de Fourier de tiempo discreto es  $Y[e^{j\theta}]$ , y una constante  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ . Entonces:

$$\mathcal{F}_d \{ \cos(\theta_0 t) y[t] \} = \frac{1}{2} \left( Y[e^{j(\theta+\theta_0)}] + Y[e^{j(\theta-\theta_0)}] \right) \quad (\text{C.92})$$

$$\mathcal{F}_d \{ \sin(\theta_0 t) y[t] \} = \frac{j}{2} \left( Y[e^{j(\theta+\theta_0)}] - Y[e^{j(\theta-\theta_0)}] \right) \quad (\text{C.93})$$

#### Demostración

Es consecuencia del Lema C.12, pues tanto  $\cos(\theta_0 k)$  como  $\sin(\theta_0 k)$  pueden escribirse en términos de exponenciales periódicas.

Consideremos la ecuación (C.92):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d \{ \cos(\theta_0 t) y[t] \} &= \mathcal{F}_d \left\{ \left( \frac{e^{j\theta_0 t} + e^{-j\theta_0 t}}{2} \right) y[t] \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}_d \{ e^{j\theta_0 t} y[t] \} + \mathcal{F}_d \{ e^{-j\theta_0 t} y[t] \}) = \frac{1}{2} (Y[e^{j(\theta-\theta_0)}] + Y[e^{j(\theta+\theta_0)}])\end{aligned}\quad (\text{C.94})$$

La demostración de (C.93) es similar y queda como ejercicio para el lector.  $\square\square\square$

### Lema C.13. Inversión temporal

Sea  $y[t]$  una secuencia de tiempo discreto definida  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , cuya transformada es  $Y[e^{j\theta}]$ . Consideremos la transformada de la secuencia original invertida en el tiempo, es decir:

$$\mathcal{F}_d \{ y[-t] \} = Y[e^{-j\theta}] \quad (\text{C.95})$$

#### Demostración

Usando la definición de la transformada en (C.66), tenemos que:

$$\mathcal{F}_d \{ y[-t] \} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y[-t] e^{-j\theta t} \quad (\text{C.96})$$

donde, haciendo el cambio  $l = -t$ :

$$\mathcal{F}_d \{ y[-t] \} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l] e^{-j\theta(-l)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y[l] e^{-j(-\theta)l} = Y[e^{-j\theta}] \quad (\text{C.97})$$

$\square\square\square$

**Corolario C.6.** Note que si  $y[t]$  es una secuencia compuesta sólo por valores reales, entonces:

$$\mathcal{F}_d \{ y[-t] \} = Y^*[e^{j\theta}] \quad (\text{C.98})$$

En que  $(\cdot)^*$  denota al complejo conjugado de  $(\cdot)$ .

#### Demostración

Se deja como ejercicio al lector.  $\square\square\square$

En base a las propiedades ya analizadas estamos en condiciones de ver un ejemplo, en el que se calcula la TFTD de un escalón unitario.

**Ejemplo C.12.** Consideremos un escalón unitario de tiempo discreto, es decir, la secuencia:

$$y[t] = \mu[t] = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ 1 & ; t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.99})$$



A pesar que esta secuencia no satisface la condición (C.68), nos interesa obtener su transformada de Fourier de tiempo discreto. Para esto podemos apreciar que, si consideramos la diferencia entre el escalón y su versión desplazada:

$$\mu[t] - \mu[t-1] = \begin{cases} 1 & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.100})$$

es decir, resulta ser el delta de Kronecker  $\delta[t]$ . El mismo resultado se obtiene si consideramos el escalón  $\mu[t]$  más una constante arbitraria  $C$ , es decir:

$$x[k] = \mu[k] + C \quad \Rightarrow \quad x[k] - x[k-1] = \delta[k] \quad (\text{C.101})$$

Si aplicamos transformada de Fourier discreta a ambas ecuaciones, usando el Lema C.11 (desplazamiento en  $t$ ) y la transformada de una constante, obtenemos:

$$X[e^{j\theta}] = \mathcal{F}_d\{\mu[k]\} + C2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n) \quad (\text{C.102})$$

$$X[e^{j\theta}] - e^{-j\theta}X[e^{j\theta}] = 1 \quad (\text{C.103})$$

donde, eliminando  $X[e^{j\theta}]$  obtenemos la forma de la transformada del escalón unitario:

$$\mathcal{F}_d\{\mu[t]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} - C2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n) \quad (\text{C.104})$$

Para obtener el valor de la constante  $C$ , podemos escribir el mismo escalón como:

$$\mu[t] = 1 - \mu[-t] + \delta[t] \quad (\text{C.105})$$

donde, utilizando la forma de la transformada de  $\mathcal{F}_d\{\mu[t]\}$  ya obtenida, la propiedad de simetría temporal, y las transformadas del delta de Kronecker y la constante, tenemos que:

$$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} - C \cdot S(\theta) = S(\theta) - \left( \frac{1}{1 - e^{j\theta}} - C \cdot S(-\theta) \right) + 1 \quad (\text{C.106})$$

en que:

$$S(\theta) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n) \quad (\text{C.107})$$

Si observamos la expresión  $S(\theta)$ , podemos apreciar que es simétrica respecto a  $\theta = 0$ , y por lo tanto podemos simplificar aún mas la ecuación (C.106):

$$-C \cdot 2S(\theta) = S(\theta) + \underbrace{\frac{-1}{1 - e^{j\theta}} + \frac{-1}{1 - e^{-j\theta}}}_{0} + 1 \quad (\text{C.108})$$

de donde obtenemos  $C = -1/2$ , y finalmente la transformada de Fourier de tiempo discreto del escalón  $\mu[t]$ :

$$\mathcal{F}_d \{\mu[t]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n) \quad (\text{C.109})$$

□□□

#### Lema C.14. Derivación en $\theta$

Sea  $y[t]$  una secuencia de tiempo discreto definida  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , cuya transformada de Fourier de tiempo discreto es  $Y[e^{j\theta}]$ . Si consideramos ahora la secuencia  $t \cdot y[t]$ , entonces su transformada, si existe, está dada por:

$$\mathcal{F}_d \{t \cdot y[t]\} = j \frac{dY[e^{j\theta}]}{d\theta} \quad (\text{C.110})$$

#### Demostración

En primer lugar, es importante tener presente que el lema **no garantiza la existencia** de la transformada de la secuencia  $t \cdot y[t]$ , sin embargo, suponiendo que ésta existe, podemos usar la transformada de Fourier inversa en (C.67), e integrar por partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d^{-1} \left\{ j \frac{dY[e^{j\theta}]}{d\theta} \right\} &= \frac{j}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j\theta t} \frac{dY[e^{j\theta}]}{d\theta} d\theta \\ &= \frac{j}{2\pi} \left( e^{j\theta t} Y[e^{j\theta}] \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} Y[e^{j\theta}] j t e^{j\theta t} d\theta \right) \end{aligned} \quad (\text{C.111})$$

donde, por periodicidad, el primer término es cero. Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d^{-1} \left\{ j \frac{dY[e^{j\theta}]}{d\theta} \right\} &= \frac{-j^2}{2\pi} t \int_0^{2\pi} Y[e^{j\theta}] e^{j\theta t} d\theta \\ &= t \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y[e^{j\theta}] e^{j\theta t} d\theta = y[t] \end{aligned} \quad (\text{C.112})$$

□□□

**Ejemplo C.13.** Considere la función de tiempo discreto:

$$y[t] = t\alpha^t \mu[t] \quad |\alpha| < 1 \quad (\text{C.113})$$

Podemos calcular la TFTD aplicando el Lema C.14 a la transformada de  $\alpha^t \mu[t]$  calculada en el Ejemplo C.10:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d \{t\alpha^t \mu[t]\} &= j \frac{d\mathcal{F}_d \{\alpha^t \mu[t]\}}{d\theta} = j \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\theta}} \right) \\ &= j \cdot \frac{-1}{(1 - \alpha e^{-j\theta})^2} \cdot (j\alpha e^{-j\theta}) = \frac{\alpha e^{-j\theta}}{(1 - \alpha e^{-j\theta})^2} \end{aligned} \quad (\text{C.114})$$

En la Figura C.7 se ilustra la secuencia discreta y la magnitud de su TFTD, para el caso particular en que  $\alpha = 0,8$ .

□□□

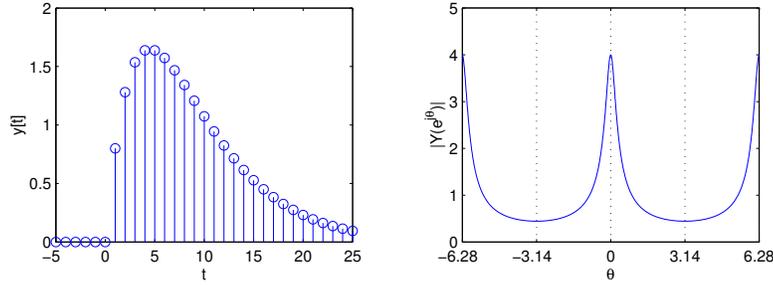


Figura C.7: Secuencia  $y[t] = t(0,8)^t \mu[t]$  y la magnitud de su transformada de Fourier (Ejemplo C.13).

### Lema C.15. Convolución en tiempo discreto

Sean  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  dos secuencias definidas para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , cuyas transformadas de Fourier son  $Y_1[e^{j\theta}]$  e  $Y_2[e^{j\theta}]$  respectivamente. Entonces la transformada de Fourier discreta de la convolución entre ellas está dada por:

$$\mathcal{F}_d \{y_1[t] * y_2[t]\} = Y_1[e^{j\theta}]Y_2[e^{j\theta}] \quad (\text{C.115})$$

#### Demostración

En primer lugar, la convolución entre las dos secuencias de tiempo discreto está dada por:

$$y_1[t] * y_2[t] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l]y_2[t-l] \quad (\text{C.116})$$

Usando esta expresión en la definición de la transformada (C.66):

$$\mathcal{F}_d \{y_1[t] * y_2[t]\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l]y_2[t-l] \right) e^{-j\theta t} \quad (\text{C.117})$$

donde podemos intercambiar las sumatorias y usar el Lema C.11 de corrimiento en el tiempo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d \{y_1[t] * y_2[t]\} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l] \left( \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_2[t-l] e^{-j\theta t} \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l] e^{-j\theta l} Y_2[e^{j\theta}] \\ &= Y_2[e^{j\theta}] \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l] e^{-j\theta l} = Y_2[e^{j\theta}] Y_1[e^{j\theta}] \quad (\text{C.118}) \end{aligned}$$

□□□

**Lema C.16. Producto en el tiempo discreto**

Sean  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  dos secuencias definidas  $\forall t \in \mathbb{Z}$ , cuyas transformadas de Fourier son  $Y_1[e^{j\theta}]$  e  $Y_2[e^{j\theta}]$  respectivamente, entonces TFTD de su producto está dada por:

$$\mathcal{F}_d \{y_1[t]y_2[t]\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\zeta}]Y_2[e^{j(\theta-\zeta)}]d\zeta \quad (\text{C.119})$$

**Demostración**

Reemplazando el producto de las secuencias en la definición de la transformada (C.66) tenemos que:

$$\mathcal{F}_d \{y_1[t]y_2[t]\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_1[t]y_2[t]e^{-j\theta t} \quad (\text{C.120})$$

Si reescribimos una de las secuencias, usando la ecuación (C.67), como la inversa de su transformada de Fourier, y luego intercambiamos sumatoria e integral, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d \{y_1[t]y_2[t]\} &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\zeta}]e^{j\zeta t}d\zeta \right) y_2[t]e^{-j\theta t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\zeta}] \left( \sum_{t=-\infty}^{\infty} (e^{j\zeta t}y_2[t])e^{-j\theta t} \right) d\zeta \end{aligned} \quad (\text{C.121})$$

donde, aplicando el Lema C.12 de corrimiento en frecuencia, llegamos a:

$$\mathcal{F}_d \{y_1[t]y_2[t]\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\zeta}]Y_2[e^{j(\theta-\zeta)}]d\zeta \quad (\text{C.122})$$

□□□

**Teorema C.2. Teorema de Parseval. El caso de tiempo discreto**

Sean  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  dos secuencias reales definidas  $\forall t \in \mathbb{Z}$ , cuyas transformadas de Fourier son  $Y_1[e^{j\theta}]$  e  $Y_2[e^{j\theta}]$  respectivamente, entonces tenemos que:

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} y_1[t]y_2[t] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\theta}]Y_2^*[e^{j\theta}]d\theta \quad (\text{C.123})$$

en que  $(\cdot)^*$  denota el complejo conjugado de  $(\cdot)$ .

**Demostración**

En el lado izquierdo de la ecuación (C.123) podemos expresar  $y_1[t]$  como la inversa de su transformada de Fourier, usando (C.67):

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} y_1[t]y_2[t] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\theta}]e^{j\theta t}d\theta \right) y_2[t] \quad (\text{C.124})$$

donde podemos ahora intercambiar el orden entre integral y sumatoria, para luego formar la transformada de  $y_2[t]$ :

$$\begin{aligned} \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_1[t]y_2^*[t] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\theta}] \left( \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_2^*[t]e^{j\theta t} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\theta}] \left( \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_2[t]e^{-j\theta t} \right)^* d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\theta}]Y_2^*[e^{j\theta}]d\theta \quad (\text{C.125}) \end{aligned}$$

□□□

**Corolario C.7.** *Bajo los mismos supuestos del teorema anterior, para el caso particular  $y_1[t] = y_2[t] = y[t]$ , cuya transformada es  $Y[e^{j\theta}]$ , se cumple que:*

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |y[t]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Y[e^{j\theta}]|^2 d\theta \quad (\text{C.126})$$

#### **Demostración**

Es directa a partir de la ecuación (C.123), pues:

$$y[t]y^*[t] = |y[t]|^2 \quad (\text{C.127})$$

$$Y[e^{j\theta}]Y^*[e^{j\theta}] = |Y[e^{j\theta}]|^2 \quad (\text{C.128})$$

□□□

La Tabla C.3 resume las propiedades hasta aquí revisadas, mientras que en la Tabla C.4 en la página 413 aparecen algunas transformadas de uso común.

$y[t], t \in \mathbb{Z}$	$\mathcal{F}_d \{y[t]\} = Y[e^{j\theta}]$	Descripción
$\sum_{i=1}^l \alpha_i y_i[t]$	$\sum_{i=1}^l \alpha_i Y_i[e^{j\theta}]$	Linealidad
$y[-t]$	$Y(e^{-j\theta})$	Inversión temporal
$y[t - t_0], t_0 \in \mathbb{Z}$	$e^{-j\theta t_0} Y[e^{j\theta}]$	Desplazamiento en el tiempo
$e^{j\theta_0 t} y[t]$	$Y[e^{j(\theta - \theta_0)}]$	Desplazamiento en frecuencia
$\cos(\theta_0 t) y[t]$	$\frac{1}{2} [Y[e^{j(\theta + \theta_0)}] + Y[e^{j(\theta - \theta_0)}]]$	Modulación cosenoidal
$\text{sen}(\theta_0 t) y[t]$	$\frac{j}{2} [Y[e^{j(\theta + \theta_0)}] - Y[e^{j(\theta - \theta_0)}]]$	Modulación senoidal
$t y[t]$	$j \frac{dY[e^{j\theta}]}{d\theta}$	Derivación en $\theta$
$\sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l] y_2[t - l]$	$Y_1[e^{j\theta}] Y_2[e^{j\theta}]$	Convolución
$y_1[t] y_2[t]$	$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\zeta}] Y_2[e^{j(\theta - \zeta)}] d\zeta$	Producto en el tiempo
$\sum_{t=-\infty}^{\infty} y_1[t] y_2^*[t]$	$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_1[e^{j\theta}] Y_2^*[e^{j\theta}] d\theta$	Teorema de Parseval
$\sum_{t=-\infty}^{\infty}  y[t] ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}  Y[e^{j\theta}] ^2 d\theta$	Teorema de Parseval

Tabla C.3: Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo discreto.

$y[t] \quad \forall t \in \mathbb{R}$	$\mathcal{F}_d \{y[t]\} = Y[e^{j\theta}]$
$\delta[t]$	1
$\delta[t - t_0]$	$e^{-j\theta t_0}$
1 ( $\forall t \in \mathbb{Z}$ )	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n)$
$\mu[t]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n)$
$\alpha^t \mu[t] \quad ( \alpha  < 1)$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\theta}}$
$(t+1)\alpha^t \mu[t] \quad ( \alpha  < 1)$	$\frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\theta})^2}$
$e^{j\theta_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \theta_0 + 2\pi n)$
$\cos(\theta_0 t)$	$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(\theta + \theta_0 + 2\pi n) + \delta(\theta - \theta_0 + 2\pi n)]$
$\text{sen}(\theta_0 t)$	$j\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(\theta + \theta_0 + 2\pi n) - \delta(\theta - \theta_0 + 2\pi n)]$
$\cos(\theta_0 t + \phi)$	$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} [e^{-j\phi} \delta(\theta + \theta_0 + 2\pi n) + e^{j\phi} \delta(\theta - \theta_0 + 2\pi n)]$
$\frac{\text{sen}(\theta_c t)}{\pi t}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_0(e^{j(\theta+2\pi n)})$
$y[t] = \begin{cases} 0 & ;  t  \leq N \\ 1 & ;  t  > N \end{cases}$	$Y_0[e^{j\theta}] = \begin{cases} 1 & ;  \theta  < \theta_c \\ 0 & ; \theta_c <  \theta  \leq \pi \end{cases}$
$t\alpha^t \mu[t] \quad ( \alpha  < 1)$	$\frac{\text{sen}(\frac{2N+1}{2}\theta)}{\text{sen}(\frac{1}{2}\theta)}$
	$\frac{\alpha e^{-j\theta}}{(1 - \alpha e^{-j\theta})^2}$

Tabla C.4: Tabla de transformadas de Fourier de tiempo discreto.

### C.3. La transformada rápida de Fourier

En aplicaciones reales como, por ejemplo, procesamiento digital de señales, no se conocen la señales en forma analítica, sino que como una secuencia finita de valores numéricos. Lo mismo ocurre en otras áreas, tales como procesamiento de imágenes, en donde la variable independiente puede ser una (o más) coordenada(s) espacial(es).

Dado que la información es una **secuencia finita**, la descripción de la señal en el dominio de la frecuencia (*espectro*) sólo puede ser lograda a través de una serie de Fourier de tiempo discreto (SFD) que, como vimos en la Sección §5.5, es usualmente conocida como la **transformada de Fourier discreta** (TFD). El análisis de la subsección §6.4.2 muestra que la TFD corresponde, salvo una constante de proporcionalidad, a la TTFD muestreada en frecuencia.

Naturalmente, mientras mayor sea la cantidad de datos disponibles, mejor y más preciso será el análisis en frecuencia de las señales o sistemas involucrados (ver Capítulo 11 y referencia [12]). Desde el punto de vista práctico, la cantidad de cálculos involucrada en el cálculo de la TFD juega un rol fundamental en las aplicaciones reales.

La **transformada rápida de Fourier**, conocida por su sigla inglesa **FFT**, *Fast Fourier Transform*, es un algoritmo (o familia de algoritmos) que permite reducir drásticamente la cantidad de cálculos y, por ende, el tiempo involucrado en la obtención de la transformada de Fourier discreta de una secuencia finita de datos  $y[t]$ ,  $t = 0, \dots, N - 1$ .

#### C.3.1. La transformada de Fourier discreta

Recordemos que según lo visto en el Capítulo 5, dada una secuencia  $y[t]$  de largo  $N$ , podemos representarla en serie de Fourier como una suma de  $N$  exponenciales periódicas o complejas, cuyas *frecuencias* están en el intervalo  $[0, 2\pi)$ :

$$y[t] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j\theta_o n t}; \quad \text{donde } \theta_o = \frac{2\pi}{N} \quad (\text{C.129})$$

donde, los coeficientes se obtienen según:

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y[t] e^{-j\theta_o n t} \quad (\text{C.130})$$

La representación a lado derecho de la ecuación (C.129) resulta ser periódica, de período  $N$ , independientemente si la secuencia original  $y[t]$  lo es o no.

Si, dado el largo de la secuencia  $N$ , definimos la constante:

$$W_N = e^{j\theta_o} = e^{j\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{C.131})$$

y los coeficientes modificados:

$$H_n = N C_n = \sum_{t=0}^{N-1} y[t] W_N^{-nt} \quad (\text{C.132})$$

entonces la representación (C.129) puede reescribirse como:

$$y[t] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n W_N^{nt} \quad (\text{C.133})$$

Si consideramos los coeficientes  $H_n$  definidos en (C.132) como los elementos de un vector, este puede escribirse como un producto matricial:

$$\begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \dots & W_N^{-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-(N-2)} & \dots & W_N^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} \quad (\text{C.134})$$

Note que esta representación es análoga a la ecuación (5.91) en la página 106, sin embargo, en (C.134) hemos expresado precisamente la matriz inversa.

El producto matricial a la derecha de la ecuación (C.134) implica  $N^2$  multiplicaciones complejas, además de las sumas respectivas para el cálculo de cada  $H_n$ , y el cálculo previo de las potencias de  $W_N$ . Es decir:

El cálculo de la transformada de Fourier discreta de una secuencia de largo  $N$  requiere del orden de  $N^2$  operaciones.

Esto implica que, por ejemplo, al considerar una secuencia con el doble de datos, *¡el número de cálculos se cuadruplica!*

Sin embargo, la matriz en (C.134) está formada por potencias de  $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$  y por tanto sus elementos son las raíces  $N$ -ésimas de la unidad. estas raíces se distribuyen simétricamente en la circunferencia unitaria, como se aprecia en la Figura C.8.

### C.3.2. El algoritmo de la FFT

La simetría de las raíces de la unidad es la clave para reducir, de manera drástica, el número de cálculos para obtener la transformada de Fourier discreta, dando lugar al algoritmo conocido como transformada rápida de Fourier [7], [10].

Para aprovechar al máximo la simetría es conveniente elegir secuencias  $y[t]$  cuyo largo se una potencia de 2, es decir:

$$N = 2^v \quad \text{para algún } v \in \mathbb{Z}^+ \quad (\text{C.135})$$

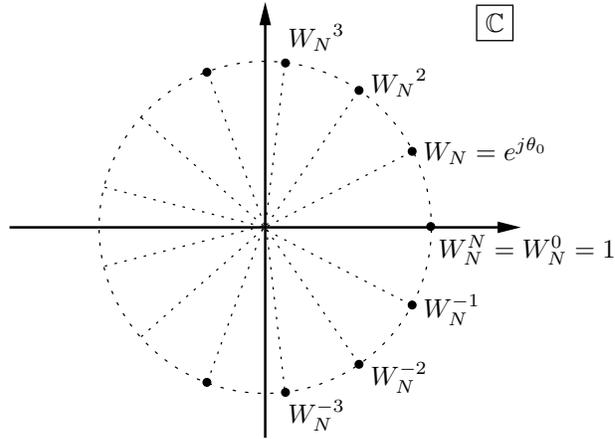


Figura C.8: Raíces  $N$ -ésimas de la unidad distribuidas sobre la circunferencia unitaria.

Por supuesto a partir de una secuencia de largo arbitrario, siempre es posible obtener una de largo igual a la potencia de 2 más cercana, ya sea truncándola o completando con ceros.

Consideremos nuevamente la ecuación (C.132), que permite calcular los coeficientes  $H_n$ . Podemos separar la secuencia de largo  $N = 2^v$  en dos subsecuencias: una formada por  $y[t]$ , para  $t$  par, y la otra para  $t$  impar. Es decir:

$$H_n = \sum_{t=0}^{N-1} y[t]W_N^{-nt} = \sum_{r=0}^{N/2-1} y[2r]W_N^{-n(2r)} + \sum_{r=0}^{N/2-1} y[2r+1]W_N^{-n(2r+1)} \quad (\text{C.136})$$

Ahora podemos apreciar que *ambas subsecuencias*,  $y[2r]$  e  $y[2r+1]$ , son de largo  $N/2 = 2^{v-1}$ , por ende podríamos escribir las sumatorias como series de Fourier discreta. Justamente, esto sucede en forma natural al observar que:

$$W_N^{-n(2r)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n(2r)} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}nr} = W_{N/2}^{-nr} \quad (\text{C.137})$$

es decir, cada coeficiente definido en (C.136) puede expresarse en términos de los coeficientes de las series de Fourier de las subsecuencias par e impar:

$$H_n = \sum_{r=0}^{N/2-1} y[2r]W_{N/2}^{-nr} + W_N^{-n} \sum_{r=0}^{N/2-1} y[2r+1]W_{N/2}^{-nr} \quad (\text{C.138})$$

$$= H_n^{par} + W_N^{-n} H_n^{impar} \quad (\text{C.139})$$

Si calculamos cada uno de los coeficientes de las subsecuencias de largo  $N/2$  por el método usual, entonces requerimos del orden de  $(N/2)^2$  multiplicaciones complejas, como vimos en la sección previa. Además para, poder formar cada uno de los  $N$  términos  $H_n$  en (C.139) requerimos una única multiplicación

compleja adicional. Por lo tanto, ya hemos reducido el número de operaciones necesarias a:

$$N + 2 \left( \frac{N}{2} \right)^2 \leq N^2 \quad \forall N \geq 2 \quad (\text{C.140})$$

Sin embargo, dado que hemos considerado una secuencia  $y[t]$  de largo  $N = 2^v$ , las subsecuencias  $y[2r]$  e  $y[2r + 1]$  tienen largo  $N/2 = 2^{v-1}$ , y por tanto separarlas en sus subsecuencias par e impar, y aplicar el mismo procedimiento anterior para reducir el número de cálculos necesarios. De esta forma, procediendo inductivamente, el número de cálculos necesarios es del orden de:

$$N + 2 \left( \frac{N}{2} + 2 \left( \frac{N}{4} \right)^2 \right) = N + N + 4 \left( \frac{N}{4} \right)^2 \quad (\text{C.141})$$

Ahora bien, las secuencias de largo  $N/4 = 2^{v-2}$  pueden subdividirse en subsecuencias de largo  $N/8 = 2^{v-3}$ , y así podemos proceder sucesivamente. En general, si tenemos una secuencia de largo  $N = 2^v$ , podremos subdividirlas  $v = \log_2 N$  veces en subsecuencias de longitud menor, y en cada etapa requeriremos sólo  $N$  multiplicaciones complejas. Por tanto podemos afirmar que:

El algoritmo denominado transformada rápida de Fourier, o FFT, requiere del orden de  $N \log_2 N = Nv$  operaciones para calcular la transformada de Fourier discreta de una secuencia de largo  $N = 2^v$ .

En la Figura C.9 se ilustra la diferencia entre el número de cálculos para la transformada de Fourier discreta, por método *usual* y usando la transformada rápida de Fourier o FFT. Por ejemplo, para una secuencia sólo de largo  $N = 128 = 2^7$ , la diferencia entre ambos métodos es:

$$\frac{N^2}{N \log_2 N} \Big|_{N=128} = \frac{16384}{896} \approx 20 \quad (\text{C.142})$$

**Ejemplo C.14.** Consideremos una secuencia discreta de longitud  $N = 8$ , cuyos valores denominaremos  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$  e  $y_7$ . Entonces usando la ecuación (C.139) tenemos que:

$$H_n = H_n^p + W_8^{-n} H_n^i \quad (\text{C.143})$$

en que  $H_n^p$  y  $H_n^i$  son los coeficientes de Fourier de las subsecuencias pares e impares.

En la Figura C.10 se representa la relación entre los coeficientes, donde las líneas de flujo van acompañadas del factor necesario. En dicha figura además, hemos hecho uso de la periodicidad de  $H_n^p$  y  $H_n^i$  ya que, por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} H_4^p = H_0^p \\ H_4^i = H_0^i \end{array} \right\} \Rightarrow H_4 = H_4^i + W_8^{-4} H_4^p = H_0^i + W_8^{-4} H_0^p \quad (\text{C.144})$$

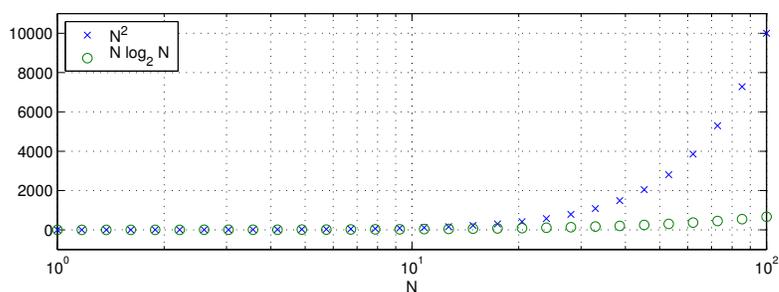


Figura C.9: Número de cálculos para la transformada de Fourier discreta ( $N^2$ ) y la transformada rápida de Fourier ( $N \log_2 N$ ).

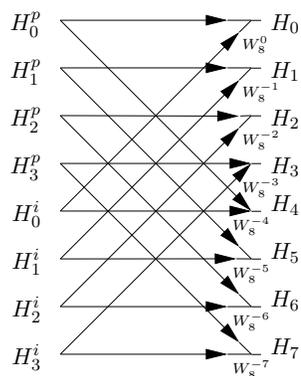


Figura C.10: Primera etapa de la FFT para  $N = 8$

Análogamente, para calcular los términos de  $H_n^p$  y  $H_n^i$  podemos aplicar la misma idea:

$$H_n^p = H_n^{pp} + W_8^{-2n} H_n^{pi} \quad (\text{C.145})$$

$$H_n^i = H_n^{ip} + W_8^{-2n} H_n^{ii} \quad (\text{C.146})$$

donde ahora los coeficientes  $H_n^{pp}$ ,  $H_n^{pi}$ ,  $H_n^{ip}$  y  $H_n^{ii}$  corresponden a las subsecuencias de largo 2, como se aprecia en la Figura C.11.

Finalmente, al subdividir nuevamente las secuencias obtenemos los 8 térmi-

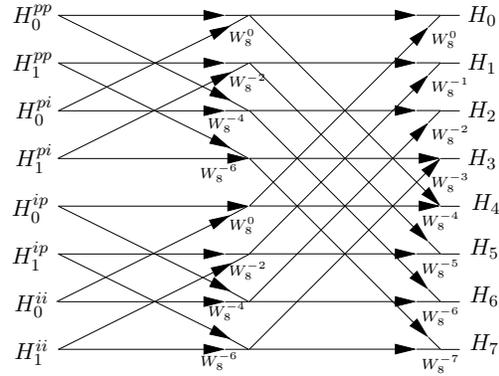


Figura C.11: Primera y segunda etapa de la FFT para  $N = 8$

nos de la secuencia original considerada:

$$H_n^{pp} = H_n^{ppp} + W_8^{-4n} H_n^{ppi} = y_0 + W_8^{-4n} y_4 \tag{C.147}$$

$$H_n^{pi} = H_n^{pip} + W_8^{-4n} H_n^{pii} = y_2 + W_8^{-4n} y_6 \tag{C.148}$$

$$H_n^{ip} = H_n^{ipp} + W_8^{-4n} H_n^{ipi} = y_1 + W_8^{-4n} y_5 \tag{C.149}$$

$$H_n^{ii} = H_n^{iip} + W_8^{-4n} H_n^{iii} = y_3 + W_8^{-4n} y_7 \tag{C.150}$$

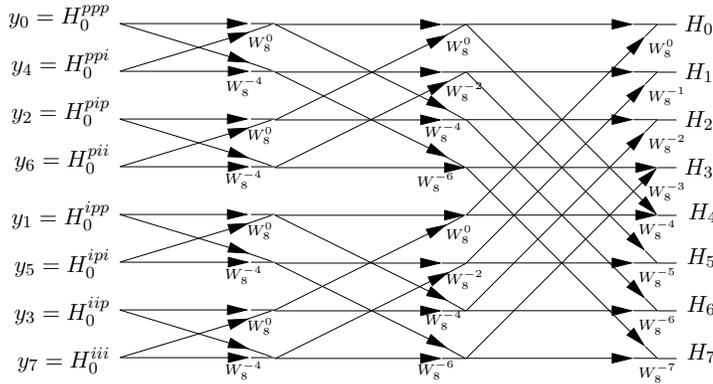


Figura C.12: Las tres etapas de la FFT para  $N = 8$

Estas expresiones se agregan al esquema anterior, tal como se muestra en la Figura C.12, donde podemos apreciar claramente que en cada etapa se realizan 8 multiplicaciones complejas, totalizando un total de 24. Note que el cálculo de los coeficientes de manera directa, sin aplicar al algoritmo de la FFT, implica realizar  $8^2 = 64$  multiplicaciones. □□□



## Apéndice D

# La transformada de Laplace

En este apéndice se define y estudian las propiedades de la transformada de Laplace, aplicable a funciones arbitrarias definidas en tiempo continuo. También hemos incluido una sección relativa a descomposición en fracciones parciales de funciones racionales, debido a su utilidad para obtener la transformada inversa de diversas funciones. Recomendamos las referencias [42], [8], [30].

### D.1. Definición de la transformada

Dada una función de tiempo continuo  $y(t)$ , definida para  $0 \leq t < \infty$ , entonces su transformada de Laplace  $Y(s)$ , y su transformada de Laplace inversa están definidas por las ecuaciones:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} y(t) dt \quad (\text{D.1})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} Y(s) ds \quad (\text{D.2})$$

Note que en la definición de la transformada *directa* (D.1), el límite inferior de la integral es  $0^-$ , es decir, es el límite por la izquierda:

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} y(t) dt = \lim_{|h| \rightarrow 0} \int_{-|h|}^{\infty} e^{-st} y(t) dt \quad (\text{D.3})$$

El par formado por la transformada de Laplace (D.1) y su inversa (D.2) están bien definidas, es decir, ambas integrales convergen, si existe  $\sigma \in \mathbb{R}$  y una constante positiva  $k < \infty$  tales que:

$$|y(t)| < ke^{\sigma t} \quad ; \forall t \geq 0 \quad (\text{D.4})$$

es decir, es suficiente que  $y(t)$  sea de *orden exponencial*.

La condición (D.4) define la región  $\Re\{s\} > \sigma$ , conocida como **región de convergencia** de la transformada (ver Figura D.1). Dentro de ésta, tenemos que:

$$|y(t)e^{-st}| = |y(t)| |e^{-st}| \leq ke^{\sigma t} \left| e^{-\Re\{s\}t} \right| \left| e^{-j\Im\{s\}t} \right| = ke^{(\sigma - \Re\{s\})t} \quad (\text{D.5})$$

que converge a cero cuando  $t$  tiende a  $\infty$ , por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)e^{-st} = 0 \quad (\text{D.6})$$

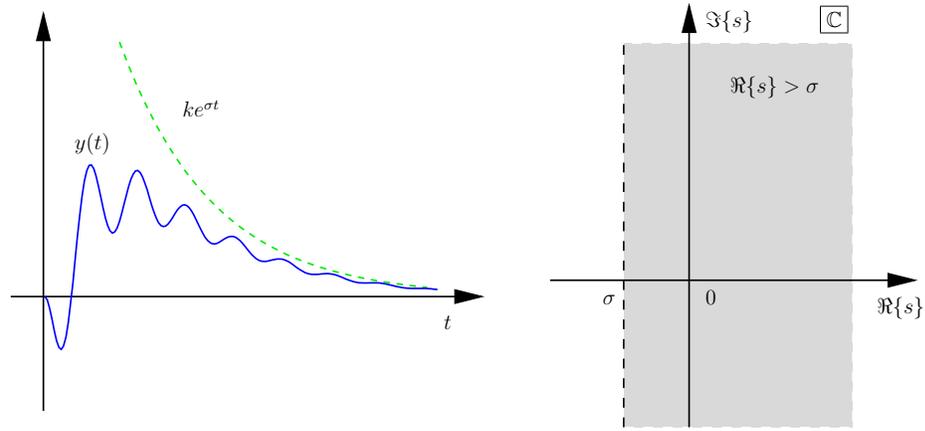


Figura D.1: Función  $y(t)$  de orden exponencial y región de convergencia de su transformada de Laplace.

En general, el siguiente lema se refiere al rol de la región de convergencia de la transformada.

**Lema D.1.** Sea  $h(t)$  una función temporal y  $H(s)$  su transformada de Laplace, cuya región de convergencia está dada por todos los valores de  $s \in \mathbb{C}$ , tal que  $\Re\{s\} > \sigma$ . Entonces, para cualquier  $z_0$  en la región de convergencia, es decir,  $\Re\{z_0\} > \sigma$ , tenemos que:

$$\int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-z_0 t} dt = \lim_{s \rightarrow z_0} H(s) \quad (\text{D.7})$$

### Demostración

De la definición de la transformada de Laplace (D.1) tenemos que, para todo  $s$  en la región de convergencia:

$$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (\text{D.8})$$

Por lo tanto, el resultado es directo de asumir que  $z_0$  está en la región de convergencia de la transformada  $\Re\{s\} > \sigma$ .

□□□

**Ejemplo D.1.** Considere la función:

$$y(t) = e^{2t} \quad t \geq 0 \quad (\text{D.9})$$

La transformada de Laplace de  $y(t)$  puede calcularse resolviendo la integral (D.1) o usando MAPLE, con ayuda del paquete `inttrans` que define la transformada de Laplace, su inversa, y otras transformaciones integrales.

```
MAPLE
> y(t):=exp(2*t);
> with(inttrans):
Y(s) := laplace(y(t),t,s);
```

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} \quad (\text{D.10})$$

cuya región de convergencia es  $\Re\{s\} > 2$ . Ahora si consideramos la integral:

$$I(z_0) = \int_0^{\infty} e^{-z_0 t} y(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-z_0 t} e^{2t} dt \quad (\text{D.11})$$

tenemos que claramente para  $z_0 = 3$ :

$$I(3) = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{2t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (\text{D.12})$$

que, tal como establece el Lema D.1, coincide con el valor de la transformada en ese punto:

$$\lim_{s \rightarrow 3} Y(s) = Y(3) = \frac{1}{3-2} = 1 \quad (\text{D.13})$$

Sin embargo, si consideramos un punto fuera de la región de convergencia de la transformada de Laplace, por ejemplo  $z_0 = 1$ , entonces claramente la integral en (D.11) diverge, mientras que  $Y(1) = -1$ .

□□□

En la sección siguiente, la demostración rigurosa de varias de las propiedades de la transformada de Laplace requiere asegurar la *convergencia uniforme* de las integrales en (D.1)–(D.2), para poder intercambiar, por ejemplo, el orden entre límites e integrales. El lector interesado puede consultar fuentes especializadas (por ejemplo, [30]) donde se establece que, dada la condición (D.4), la transformada de Laplace converge uniformemente en la región  $\Re\{s\} \geq \sigma_u > \sigma$ .

## D.2. Propiedades

La transformada de Laplace posee una serie de propiedades, que resultan muy útiles en el análisis de señales y respuesta de sistemas a excitaciones. Además, estas mismas propiedades permiten obtener la transformada de ciertas funciones en base las transformadas de otras señales más simples.

A continuación revisamos las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, que se resumen en la Tabla D.1 en la página 437. Además, en la Tabla D.2 en la página 438, aparecen algunas funciones comunes y sus respectivas transformadas de Laplace.

### Lema D.2. Linealidad

La transformada de Laplace es un **operador lineal**, es decir, dadas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  funciones definidas en  $[0, \infty)$ , cuyas transformadas de Laplace son  $Y_1(s)$  e  $Y_2(s)$ , respectivamente, entonces:

$$\mathcal{L}\{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\} = \alpha Y_1(s) + \beta Y_2(s) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{D.14})$$

#### Demostración

Esta propiedad surge directamente de la definición de la transformada de Laplace mediante la integral (D.1), y por tanto se deja como ejercicio al lector.

□□□

### Lema D.3. Escalamiento en $t$

Sea  $y(t)$  una función definida en  $[0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , y sea  $\alpha$  una constante positiva, entonces:

$$\mathcal{L}\{y(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} Y\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad ; a > 0 \quad (\text{D.15})$$

#### Demostración

Es directa de reemplazar en la definición de la transformada de Laplace (D.1), donde hacemos el cambio de variables  $\eta = at$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(\alpha t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} y(\alpha t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} y(\eta) e^{-s \frac{\eta}{\alpha}} \frac{d\eta}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{0^-}^{\infty} y(\eta) e^{-\frac{s}{\alpha} \eta} d\eta = \frac{1}{\alpha} Y\left(\frac{s}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

□□□

El siguiente corolario es directa consecuencia del lema anterior, por lo que su demostración se deja como ejercicio al lector.

### Corolario D.1. Escalamiento en $s$

Sea  $y(t)$  una función definida en  $[0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , y sea  $\alpha$  una constante positiva, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} y\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = Y(as) \quad ; a > 0 \quad (\text{D.17})$$

□□□

**Lema D.4. Derivada en  $t$** 

Sea  $y(t)$  una función continua en  $(0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , y tal que su derivada es seccionalmente continua, entonces:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = sY(s) - y(0^-) \quad (\text{D.18})$$

**Demostración**

Reemplazando la derivada de  $y(t)$  en la definición de la transformada (D.1), e integrando por partes tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = e^{-st} y(t) \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} y(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st} y(t)) - y(0^-) + s \mathcal{L} \{y(t)\} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

La ecuación (D.6) asegura que el primer término en el lado derecho converge a cero, con lo que se obtiene el resultado (D.18). □□□

MAPLE

```
> with(inttrans):
  laplace(diff(y(t),t),t,s);
```

La ejecución de este código entrega como resultado:

$$s \text{ laplace}(y(t), t, s) - y(0) \quad (\text{D.20})$$

El Lema D.4 puede aplicarse repetidamente a la  $n$ -ésima derivada de  $y(t)$  con lo que se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario D.2. Derivadas en  $t$  de orden superior**

Sean  $y(t)$  y sus primeras  $n - 1$  derivadas, funciones de orden exponencial (condición (D.4)) y continuas en  $(0, \infty)$ , y sea  $Y(s) = \mathcal{L} \{y(t)\}$  su transformada de Laplace. Entonces tenemos que:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - \dots - \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0^-} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{D.21})$$

**Demostración**

Como hemos mencionado, resulta de aplicar recursivamente el Lema D.4. Por ejemplo, al aplicar dicho resultado a la  $n$ -ésima derivada tenemos que:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right) \right\} = s \mathcal{L} \left\{ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right\} - \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0^-} \quad (\text{D.22})$$

□□□

Este resultado anterior es clave pues podemos afirmar que:

La transformada de Laplace permite convertir ecuaciones diferenciales, con derivadas en el tiempo  $t$ , en ecuaciones algebraicas, en que aparecen polinomios en la variable  $s$ , incluyendo las condiciones iniciales de la función  $y(t)$  y de sus derivadas.

En el siguiente ejemplo, hemos ilustrado la aplicación de los resultados anteriores junto al uso de los comandos apropiado en MAPLE .

**Ejemplo D.2.** *Considere la ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt} = v_a(t) \quad (\text{D.23})$$

*Podemos definir esta ecuación en MAPLE y aplicarle transformada de Laplace a ambos lados, utilizando el resultado [D.21](#):*

```
MAPLE
> with(inttrans):
edo := diff(theta(t),t,t)+2*diff(theta(t),t)=v_a(t):
EDO := laplace(edo,t,s);
```

*La ejecución de este código entrega como resultado:*

$$\begin{aligned} s^2 \text{laplace}(\theta(t), t, s) - D(\theta)(0) - s\theta(0) + 2s \text{laplace}(\theta(t), t, s) - 2\theta(0) \\ = \text{laplace}(v_a(t), t, s) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

*Si ahora definimos las condiciones iniciales  $\theta(0^-) = 0$  y  $\dot{\theta}(0^-) = 0$ , y la entrada como un escalón unitario (función de Heaviside) en  $t = 0$ ,  $\mu(t)$ , entonces tenemos que:*

```
MAPLE
> theta(0):=0 : D(theta)(0):=0 : v_a(t):=Heaviside(t) :
Theta(s):=solve(EDO,laplace(theta(t),t,s));
```

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 + 2s} V_a(s) = \frac{1}{s(s+2)} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s^2(s+2)} \quad (\text{D.25})$$

*donde podemos ahora descomponer en fracciones parciales (ver Sección [§D.3](#)) y aplicar transformada de Laplace inversa, con ayuda de la [Tabla D.2](#) en la [página 438](#):*

MAPLE

```
> Theta(s) := convert(Theta(s), parfrac, s);
theta(t) := invlaplace(Theta(s), s, t);
```

$$\Theta(s) = -\frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{2s^2} \quad (\text{D.26})$$

$$\theta(t) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t\right)\mu(t) \quad (\text{D.27})$$

Note que MAPLE no genera el escalón unitario en la solución, sin embargo, lo hemos incluido como forma de enfatizar que la solución es válida **sólo para**  $t > 0$ .

□□□

#### Lema D.5. Integral en $t$

Sea  $y(t)$  una función seccionalmente continua en el intervalo  $[0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , entonces:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{0^-}^t y(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} Y(s) \quad (\text{D.28})$$

#### Demostración

Si definimos la integral definida de  $y(t)$  como otra función:

$$f(t) = \int_{0^-}^t y(\tau) d\tau \quad (\text{D.29})$$

entonces, podemos aplicar por el teorema fundamental del Cálculo [25], y luego la transformada de Laplace usando el Lema D.4:

$$\frac{d f(t)}{dt} = y(t) \quad / \mathcal{L} \{ \} \quad (\text{D.30})$$

$$s \mathcal{L} \{ f(t) \} - f(0^-) = Y(s) \quad (\text{D.31})$$

donde el resultado (D.28) se obtiene notando que de la definición (D.29) se deduce que  $f(0^-) = 0$ .

□□□

#### Lema D.6. Derivada en $s$

Sea  $y(t)$  una función seccionalmente continua definida en  $[0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $\mathcal{L} \{ y(t) \} = Y(s)$ , entonces:

$$\mathcal{L} \{ t y(t) \} = -\frac{dY(s)}{ds} \quad (\text{D.32})$$

#### Demostración

Si reemplazamos  $ty(t)$  en la definición (D.1), podemos reescribir la transformada como:

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} ty(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} -\frac{d}{ds} (y(t)e^{-st}) dt \quad (\text{D.33})$$

donde podemos intercambiar el orden entre derivada e integral para obtener:

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = -\frac{d}{ds} \left( \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st} dt \right) = -\frac{dY(s)}{ds} \quad (\text{D.34})$$

□□□

Al igual que en el caso del Lema D.4 en la página 425, para el caso de funciones de la forma  $t^n y(t)$  es posible aplicar repetidamente el resultado anterior, lo que da lugar al siguiente corolario.

**Corolario D.3. Derivadas en  $s$  de orden superior**

Sea  $y(t)$  una función seccionalmente continua definida en  $[0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , entonces:

$$\mathcal{L}\{t^n y(t)\} = (-1)^n \frac{d^n Y(s)}{ds^n} \quad (\text{D.35})$$

**Demostración**

Resulta de aplicar repetidamente el Lema D.6, y dejamos los detalles como ejercicio para el lector.

□□□

**Ejemplo D.3.** Consideremos el caso en que nos interesa obtener la transformada de Laplace de la función  $y(t) = t^2$ . Según la definición (D.1):

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \int_{0^-}^{\infty} t^2 e^{-st} dt \quad (\text{D.36})$$

Esta integral puede resolver sin problema usando alguna tabla de antiderivadas [25] o aplicando integración por partes dos veces. Sin embargo, si se aplica el Corolario D.3 tenemos:

$$\mathcal{L}\{t^2 \cdot 1\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} (\mathcal{L}\{1\}) = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{2}{s^3} \quad (\text{D.37})$$

□□□

En base al Corolario D.3 y siguiendo las líneas del ejemplo es fácil demostrar (por ejemplo, usando el método de inducción) la expresión no recursiva para  $\mathcal{L}\{t^n\}$  que aparece en la Tabla D.2 en la página 438.

**Lema D.7. Desplazamiento en  $t$**



Sea  $y(t-a)$ , en que  $a > 0$ , la versión desplazada de una función  $y(t)$ , seccionalmente continua, cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , y  $\mu(t-a)$  la función escalón unitario también desplazada a la derecha. Entonces:

$$\mathcal{L}\{y(t-a)\mu(t-a)\} = e^{-sa}Y(s) \quad (\text{D.38})$$

### Demostración

El resultado se obtiene reemplazando en la definición (D.1):

$$\mathcal{L}\{\mu(t-a)y(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} \mu(t-a)y(t-a)e^{-st} dt = \int_{a^-}^{\infty} y(t-a)e^{-st} dt \quad (\text{D.39})$$

y, haciendo el cambio de variable  $\eta = t - a$ , tenemos que:

$$\mathcal{L}\{\mu(t-a)y(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} y(\eta)e^{-s(\eta+a)} d\eta = e^{-sa} \underbrace{\int_{0^-}^{\infty} y(\eta)e^{-s\eta} d\eta}_{Y(s)} \quad (\text{D.40})$$

□□□

Una distinción muy importante que se debe tener presente al utilizar el lema anterior es:

$$\mathcal{L}\{y(t-a)\mu(t-a)\} \neq \mathcal{L}\{y(t-a)\mu(t)\} \quad (\text{D.41})$$

Note que la transformada de Laplace del lado derecho **no puede obtenerse** a partir de la expresión (D.38), sino que debe recurrirse a la definición de la transformada u otra de sus propiedades.

**Ejemplo D.4.** Para ver una aplicación del Lema D.7 consideremos la transformada de Laplace de un pulso  $p(t)$ .

$$p(t) = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } 0 \leq t < a \\ 0 & ; \text{ si } t \geq a \end{cases} \quad (\text{D.42})$$

Esta señal puede reescribirse usando la función de Heaviside o escalón unitario  $\mu(t)$ , en lugar de definirla por tramos. En base a esa descripción se puede calcular la transformada de Laplace de  $p(t)$ :

MAPLE

```
> assume(a>0); interface(showassumed=0);
  p(t):=piecewise(t<0,0,t<a,1,0);
  p(t):=convert(p(t),Heaviside);
  P(s):=laplace(p(t),t,s);
```

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{D.43})$$

$$p(t) = \text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - a) = \mu(t) - \mu(t - a) \quad (\text{D.44})$$

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-as} = \frac{1 - e^{-sa}}{s} \quad (\text{D.45})$$

□□□

A continuación se presenta otro resultado relacionado con el desplazamiento temporal de una función.

**Lema D.8. Función periódica**

Consideremos la función periódica:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_T(t - nT) \quad (\text{D.46})$$

en que  $y_T(t)$  es igual a una función  $f(t)$  dentro del intervalo  $[0, T]$  e igual a cero fuera de él, es decir:

$$y_T(t) = (\mu(t) - \mu(t - T))f(t) \quad (\text{D.47})$$

y su transformada de Laplace es  $Y_T(s) = \mathcal{L}\{y_T(t)\}$ . Entonces la transformada de Laplace de  $y(t)$  está dada por:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} Y_T(s) \quad (\text{D.48})$$

**Demostración**

Para calcular la transformada de Laplace de (D.46) podemos utilizar la linealidad de la transformada y el Lema D.7 sobre desplazamiento temporal:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} Y_T(s) = Y_T(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} \quad (\text{D.49})$$

la cual se puede reescribir, recordando la suma de una serie geométrica:

$$Y(s) = Y_T(s) \frac{1 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nTs}\right)}{1 - e^{-sT}} \quad (\text{D.50})$$

Para determinar la región de convergencia de la transformada  $Y(s)$ , recurramos a la condición (D.4) en la página D.4, donde tenemos que:

$$|y(t)| \leq k e^{\sigma t} \quad \text{si, y sólo si} \quad \begin{cases} k \geq \max_{0 \leq t \leq T} |y_T(t)| \\ \sigma \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.51})$$

La región de convergencia de la transformada es entonces  $\Re\{s\} > 0$ , y de esta forma podemos afirmar que en la expresión (D.50):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nTs} = 0 \quad (\text{D.52})$$

y por lo tanto, despejando, se obtiene el resultado (D.48). □□□

**Lema D.9. Desplazamiento en  $s$**

Sea  $y(t)$  una función seccionalmente continua en el intervalo  $[0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ . Entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}y(t)\} = Y(s - a) \quad (\text{D.53})$$

**Demostración**

De la definición de la transformada (D.1), tenemos que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}y(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{at}y(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-(s-a)t}dt = Y(s - a) \quad (\text{D.54})$$

□□□

**Lema D.10. Convolución**

Sean  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  funciones causales, seccionalmente continuas y cuyas transformadas de Laplace son  $Y_1(s)$  e  $Y_2(s)$ , respectivamente. Entonces la transformada de la convolución entre ellas está dada por:

$$\mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} = Y_1(s)Y_2(s) \quad (\text{D.55})$$

en que:

$$y_1(t) * y_2(t) = \int_{0^-}^t y_1(\tau)y_2(t - \tau)d\tau \quad (\text{D.56})$$

**Demostración**

Dado que las funciones son causales, es decir, iguales a cero para  $t < 0$ , podemos reescribirlas como:

$$y_1(t) = \mu(t)y_1(t) \quad (\text{D.57})$$

$$y_2(t) = \mu(t)y_2(t) \quad (\text{D.58})$$

en que los escalones unitarios pueden parecer redundantes, sin embargo, de esta forma la convolución (D.56) puede reescribirse ahora como:

$$y_1(t) * y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)\mu(\tau)y_2(t - \tau)\mu(t - \tau)d\tau \quad (\text{D.59})$$

Si reemplazamos ahora en la definición de la transformada (D.1), podemos intercambiar el orden de las integrales:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)\mu(\tau)y_2(t - \tau)\mu(t - \tau)d\tau \right) e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau)\mu(\tau) \left( \int_{0^-}^{\infty} [y_2(t - \tau)\mu(t - \tau)] e^{-st}dt \right) d\tau \quad (\text{D.60}) \end{aligned}$$

donde, aplicando ahora el Lema D.7 de desplazamiento temporal, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_1(t) * y_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(\tau) \mu(\tau) e^{-s\tau} Y_2(s) d\tau \\ &= Y_2(s) \int_{0^-}^{\infty} y_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau = Y_2(s) Y_1(s)\end{aligned}\quad (\text{D.61})$$

□□□

### Lema D.11. Producto en el tiempo

Sean  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  funciones seccionalmente continuas definidas en  $[0, \infty)$ , cuyas transformadas de Laplace son  $Y_1(s)$  e  $Y_2(s)$ , respectivamente. Entonces la transformada del producto entre  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  está dada por:

$$\mathcal{L}\{y_1(t)y_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) Y_2(s-\zeta) d\zeta \quad (\text{D.62})$$

### Demostración

Si reemplazamos el producto  $y_1(t)y_2(t)$  en la definición de la transformada (D.1), y expresamos una de ellas como la transformada inversa de su transformada de Laplace, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_1(t)y_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} y_1(t)y_2(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) e^{\zeta t} d\zeta \right) y_2(t) e^{-st} dt\end{aligned}\quad (\text{D.63})$$

donde, tras intercambiar el orden de las integrales y tras aplicar el Lema D.9 de desplazamiento en  $s$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_1(t)y_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) \left( \int_{0^-}^{\infty} e^{\zeta t} y_2(t) e^{-st} dt \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) Y_2(s-\zeta) d\zeta\end{aligned}\quad (\text{D.64})$$

El lector puede verificar que, si  $\Re\{s\} > \sigma_1$  y  $\Re\{s\} > \sigma_2$  son las regiones de convergencia de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , entonces la región de convergencia de la transformada (D.62) es  $\Re\{s\} > \sigma_1 + \sigma_2$ .

□□□

Finalmente, a continuación se presentan dos importantes resultados que relacionan los comportamientos asintóticos de la función  $y(t)$ , y su transformada  $Y(s)$ . Estos se conocen como el teorema del Valor Inicial y teorema del Valor Final.

**Teorema D.1. Teorema del Valor Inicial**

Sea  $y(t)$  una función continua en  $(0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , y tal que su derivada es seccionalmente continua. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) \quad (\text{D.65})$$

**Demostración**

Consideremos primero el caso en que  $y(t)$  es continua en  $t = 0$ , es decir,  $y(0^-) = y(0^+) = y(0)$ . Si usamos la ecuación (D.18), tenemos que:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt = sY(s) - y(0^-) = sY(s) - y(0^+) \quad (\text{D.66})$$

Sin embargo, usando la condición (D.4), la integral del lado izquierdo se puede acotar:

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt \leq \int_{0^-}^{\infty} \left| \frac{dy}{dt} \right| e^{-st} dt \leq \int_{0^-}^{\infty} k e^{\sigma t} e^{-st} dt = k \frac{e^{-(s-\sigma)t}}{-s+\sigma} \Big|_{0^-}^{\infty} \quad (\text{D.67})$$

donde es claro que dentro de la región de convergencia  $\Re\{s\} > \sigma$  la integral está bien definida, es decir, podemos evaluar en los límites de integración y establecer que:

$$sY(s) - y(0^+) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt \leq \frac{k}{s-\sigma} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{D.68})$$

de donde se obtiene (D.65).

En el caso en que  $y(t)$  no es continua en  $t = 0$ , podemos definir la función:

$$\tilde{y}(t) = y(t) - (y(0^+) - y(0^-)) \mu(t) \quad (\text{D.69})$$

la cual sí es continua en  $t = 0$ , pues  $\tilde{y}(0^-) = y(0^-) = \tilde{y}(0^+)$ .

Ahora, si obtenemos la transformada de Laplace de la derivada de  $\tilde{y}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \right\} &= s\tilde{Y}(s) - \tilde{y}(0^-) = s \left( Y(s) - \frac{y(0^+) - y(0^-)}{s} \right) - y(0^-) \\ &= sY(s) - y(0^+) \quad (\text{D.70}) \end{aligned}$$

Finalmente, de manera idéntica al caso de la derivada de  $y(t)$ , se demuestra que la transformada de la derivada de  $\tilde{y}(t)$ :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} e^{-st} dt \leq \frac{\tilde{k}}{s-\sigma} \quad (\text{D.71})$$

para algún  $\tilde{k}$ , y por lo tanto converge a cero cuando  $s$  tiende a infinito, con lo que se obtiene (D.65).

□□□

**Teorema D.2. Teorema del Valor Final**

Sea  $y(t)$  una función definida en  $(0, \infty)$ , cuya transformada de Laplace es  $Y(s)$ , y tal que  $y(\infty)$  está bien definida. Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (\text{D.72})$$

**Demostración**

Según el Lema D.4, la transformada de la derivada está dada por la ecuación (D.18):

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = sY(s) - y(0^-) \quad (\text{D.73})$$

Si consideramos ahora límite cuando  $s$  tiende a cero, en el lado derecho de la igualdad podemos intercambiar el orden con la integral:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \left( \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt \right) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} \left( \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \right) dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} dt = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \right) - y(0^-) \end{aligned} \quad (\text{D.74})$$

Mientras que al lado izquierdo:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sY(s) - y(0^-)) = \left( \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \right) - y(0^-) \quad (\text{D.75})$$

Igualando y cancelando los términos  $y(0^-)$  se obtiene el resultado en (D.72).  
□□□

Es importante tener presente que los resultados asintóticos en ambos Teoremas D.1 y D.2 son **válidos sólo si los límites involucrados existen**, tanto en el dominio del tiempo como en el de la variable compleja  $s$ . Veamos a continuación un ejemplo que ilustra una aplicación errónea del teorema del valor final.

**Ejemplo D.5.** La transformada de Laplace de  $\cos(\omega_0 t)$  está dada por:

$$\mathcal{L} \{ \cos(\omega_0 t) \} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (\text{D.76})$$

De acuerdo al teorema del valor final, utilizando la ecuación (D.72), tenemos que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \right) = 0 \quad (\text{D.77})$$

Sin embargo, es claro que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos(\omega_0 t)$  no existe, lo cual deja en evidencia la incorrecta aplicación del teorema del valor final.

□□□

Otra observación relevante es que, para el caso de un sistema afectado por excitaciones externas o condiciones iniciales, es posible que su respuesta sea discontinua en  $t = 0$ . El teorema del valor inicial [D.1](#) permite calcular el valor de la señal en  $t = 0^+$  a partir de su transformada de Laplace. Este valor puede ser distinto a la condición inicial dada en  $t = 0^-$ . Veamos a continuación un ejemplo que ilustra esta situación.

**Ejemplo D.6.** Consideremos un circuito como el de la [Figura D.2](#), en que se conecta una fuente de  $1[V]$  en  $t = 0$ , y todas las condiciones iniciales son cero.

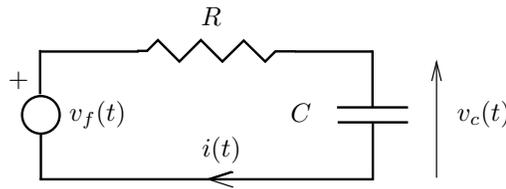


Figura D.2: Circuito RC

Usando la ley de voltajes de Kirchoff tenemos que:

$$v_f(t) = v_R(t) + v_C(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (\text{D.78})$$

Si derivamos a ambos lados, y notamos que la fuente de voltaje equivale a un escalón unitario, tenemos que:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) \quad (\text{D.79})$$

donde, aplicando transformada de Laplace, con condiciones iniciales iguales a cero, obtenemos:

$$s \left( \frac{1}{s} \right) = R[sI(s) - i(0^-)] + \frac{1}{C} I(s) \Rightarrow I(s) = \frac{1}{sR + \frac{1}{C}} \quad (\text{D.80})$$

Si ahora aplicamos el teorema del valor inicial:

$$i(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sI(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{sR + \frac{1}{C}} = \frac{1}{R} \quad (\text{D.81})$$

que evidentemente es diferente a la corriente inicial  $t = 0^-$ , que se supuso igual a cero. Ahora, si obtenemos la transformada inversa de  $I(s)$ , podemos confirmar que ésta es una función discontinua en  $t = 0$ :

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} \{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1/R}{s + 1/RC} \right\} = \frac{1}{R} e^{-t/RC}; \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{D.82})$$

□□□

Finalmente, las propiedades de la transformada de Laplace se resumen en la Tabla [D.1 en la página siguiente](#), mientras que la Tabla [D.2 en la página 438](#) muestra algunas funciones comunes y sus respectivas transformadas.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Descripción
$\sum_{i=1}^l a_i y_i(t)$	$\sum_{i=1}^l a_i Y_i(s)$	Linealidad
$y(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} Y\left(\frac{s}{a}\right)$	Escalamiento
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s) - y(0^-)$	Derivada en $t$
$\frac{d^k y(t)}{dt^k} \quad (k \in \mathbb{N})$	$s^k Y(s) - \sum_{\ell=1}^k s^{k-\ell} \left. \frac{d^{\ell-1} y}{dt^{\ell-1}} \right _{t=0^-}$	Derivada en $t$ de orden superior
$\int_{0^-}^t y(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} Y(s)$	Integral definida
$t y(t)$	$-\frac{dY(s)}{ds}$	Derivada en $s$
$t^k y(t) \quad (k \in \mathbb{N})$	$(-1)^k \frac{d^k Y(s)}{ds^k}$	Derivada en $s$ de orden superior
$y(t - \tau) \mu(t - \tau)$	$e^{-s\tau} Y(s)$	Desplazamiento en el tiempo $t$
$e^{at} y(t)$	$Y(s - a)$	Desplazamiento en la variable $s$
$\int_{0^-}^t y_1(\tau) y_2(t - \tau) d\tau$	$Y_1(s) Y_2(s)$	Convolución de funciones causales
$y_1(t) y_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y_1(\zeta) Y_2(s - \zeta) d\zeta$	Producto en el tiempo
$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$	Teorema del Valor Final
$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$	Teorema del Valor Inicial

Tabla D.1: Propiedades de la transformada de Laplace

$f(t) \quad (t \geq 0)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	Región de convergencia
$\delta(t)$	1	$\forall s \in \mathbb{C}$
1 (= $\mu(t)$ )	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$\mu(t - \tau) \quad (\tau > 0)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{\alpha t} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{s - \alpha}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$t e^{\alpha t} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$\cos(\omega_o t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{\alpha t} \cos(\omega_o t)$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$e^{\alpha t} \text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{\omega_o}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$	$\Re\{s\} > \Re\{\alpha\}$
$t \text{sen}(\omega_o t)$	$\frac{2\omega_o s}{(s^2 + \omega_o^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t \cos(\omega_o t)$	$\frac{s^2 - \omega_o^2}{(s^2 + \omega_o^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\mu(t) - \mu(t - \tau)$	$\frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$	$\forall s \in \mathbb{C}$

Tabla D.2: Transformadas de Laplace de algunas funciones simples

### D.3. Descomposición en fracciones parciales

La transformada de Laplace y su inversa están definidas en las ecuaciones (D.1) y (D.2), respectivamente. Sin embargo, la ecuación (D.2) pocas veces se usa en la práctica para obtener la transformada de Laplace inversa de una función, pues involucra la solución de una integral en el plano complejo, cuyo estudio va más allá del foco de este texto. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, [6] y [30].

La transformada de Laplace a invertir, en la mayoría de los casos que nos interesan, toma la forma:

$$H(s) = \left( \frac{\tilde{b}_n s^n + \tilde{b}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \tilde{b}_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \right) e^{-sT} \quad ; T \geq 0 \quad (\text{D.83})$$

Para encontrar la función temporal  $h(t)$  que corresponde a esta función de  $s$ , descompondremos (D.83) en una suma de términos más simples. La idea principal es que esos términos correspondan a transformadas de funciones temporales conocidas. Antes de proseguir, podemos hacer dos observaciones sobre la expresión (D.83):

- Según el Lema D.7 en la página 428, la exponencial en  $s$  corresponde a un corrimiento en el tiempo.
- Las transformadas *conocidas* que aparecen en la Tabla D.2, con excepción del delta Dirac  $\delta(t)$ , son estrictamente propias, es decir, el orden del polinomio denominador es mayor que el del numerador.

Por lo tanto, si reescribimos  $H(s)$  en la forma:

$$H(s) = \left( \tilde{b}_n + G(s) \right) e^{-sT} \quad (\text{D.84})$$

donde:

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (\text{D.85})$$

entonces, la transformada de Laplace inversa es:

$$h(t) = \delta(t - T) + g(t - T)\mu(t - T) \quad (\text{D.86})$$

En esta expresión,  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ . Así, hemos reducido el problema de invertir  $H(s)$ , a uno que exige obtener la transformada de Laplace inversa de una *función racional estrictamente propia*, para lo cual usaremos la descomposición (o expansión) en *fracciones parciales*.

#### Lema D.12. *Expansión en Fracciones Parciales*

Si factorizamos el polinomio denominador de la función racional (D.85), tenemos que:

$$G(s) = \frac{B(s)}{(s - p_1)^{k_1} \dots (s - p_N)^{k_N}} \quad (\text{D.87})$$

en que  $\{p_i \in \mathbb{C}\}$  son los **polos** de  $G(s)$ , cada uno con multiplicidad  $k_i$ , tal que  $k_1 + \dots + k_N = n$  es el orden del sistema. Entonces, la descomposición (o expansión) en fracciones parciales de  $G(s)$ , está dada por:

$$\begin{aligned} G(s) &= \left[ \frac{K_{11}}{(s-p_1)} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1k_1}}{(s-p_1)^{k_1}} \right] + \\ &\quad \dots + \left[ \frac{K_{N1}}{(s-p_N)} + \frac{K_{N2}}{(s-p_N)^2} + \dots + \frac{K_{Nk_N}}{(s-p_N)^{k_N}} \right] \\ &= \sum_{r=1}^N \sum_{\ell=1}^{k_r} \frac{K_{r\ell}}{(s-p_r)^\ell} \end{aligned} \quad (\text{D.88})$$

donde:

$$K_{r\ell} = \frac{1}{(k_r - \ell)!} \left( \frac{d^{k_r - \ell}}{ds^{k_r - \ell}} (s - p_r)^{k_r} G(s) \right) \Big|_{s=p_r} \quad (\text{D.89})$$

**Demostración:** Involucra teoría de funciones de variable compleja, en particular, el teorema del residuo, por lo que recomendamos al lector interesado consultar, por ejemplo, las referencias antes mencionadas, [6], [30] y [42].

□□□

En algunos casos, para obtener los coeficientes de la expansión en (D.88), en lugar de usar la ecuación (D.89), puede resultar más simple hacer la suma al lado derecho e igualar los coeficientes del polinomio numerador obtenido con los de  $B(s)$  en (D.87). De esta forma, como se ilustra en el Ejemplo D.10 en la página 447, los coeficientes se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones lineal en esos coeficientes.

En la expresión (D.88) aparecen funciones racionales muy simples, cuya transformada de Laplace inversa es fácil de obtener, como establecemos a continuación.

**Lema D.13.** La transformada de Laplace inversa de la expresión (D.88) está dada por:

$$\begin{aligned} g(t) &= \left( \left[ K_{11}e^{p_1 t} + K_{12}te^{p_1 t} + \dots + K_{1k_1} \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} e^{p_1 t} \right] + \right. \\ &\quad \left. \dots + \left[ K_{N1}e^{p_N t} + K_{N2}te^{p_N t} + \dots + K_{Nk_N} \frac{t^{k_N-1}}{(k_N-1)!} e^{p_N t} \right] \right) \mu(t) \\ &= \sum_{r=1}^N \sum_{\ell=1}^{k_r} K_{r\ell} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_r t} \mu(t) \end{aligned} \quad (\text{D.90})$$

**Demostración**

Es directa al considerar el término general de doble sumatoria en (D.88), pues de la Tabla D.2 en la página 438 se tiene que:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \iff \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!} \mu(t) \quad ; n \in \mathbb{N} \quad (\text{D.91})$$



Por lo tanto, reemplazando  $n+1 = \ell$  y aplicando el Lema D.9 de corrimiento en la variable  $s$ , obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_{r\ell}}{(s-p_r)^\ell} \right\} = K_{r\ell} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_r t} \mu(t) \quad (\text{D.92})$$

y, por linealidad, se obtiene el resultado en (D.90).

□□□

Ambos lemas consideran el caso general. Los ejemplos a continuación ilustran la simplicidad del método de expansión en fracciones parciales para obtener transformadas de Laplace inversas.

### Ejemplo D.7. Polos simples

Nos interesa obtener la transformada de Laplace inversa de la función:

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^3+3s^2-4s} \quad (\text{D.93})$$

Factorizando el polinomio denominador se pueden calcular los polos de la función  $H(s)$ , que se ubican en  $s = 0, -4, 1$ , todos de multiplicidad 1. Por tanto, usando (D.88), nos interesa descomponerla en la forma:

$$H(s) = \frac{2s+1}{s(s+4)(s-1)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{21}}{s+4} + \frac{K_{31}}{s-1} \quad (\text{D.94})$$

Note cuando un polo tiene multiplicidad 1, no es necesario calcular derivadas en la ecuación (D.89), sino que basta simplemente multiplicar  $G(s)$  por el factor  $(s-p_r)$  y luego reemplazar  $s = p_r$ . De esta forma calculamos los coeficientes en (D.94):

$$K_{11} = sH(s)|_{s=0} = \frac{2s+1}{(s+4)(s-1)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{-4} \quad (\text{D.95})$$

$$K_{21} = (s+4)H(s)|_{s=-4} = \frac{2s+1}{s(s-1)} \Big|_{s=-4} = \frac{-7}{-4(-5)} = -\frac{7}{20} \quad (\text{D.96})$$

$$K_{31} = (s-1)H(s)|_{s=1} = \frac{2s+1}{s(s+4)} \Big|_{s=1} = \frac{3}{5} \quad (\text{D.97})$$

Con ayuda de la Tabla D.2 se obtiene finalmente:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{7}{20}}{s+4} + \frac{\frac{3}{5}}{s-1} \right\} = -\frac{1}{4} - \frac{7}{20} e^{-4t} + \frac{3}{5} e^t; \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{D.98})$$

□□□

MAPLE también es muy útil para obtener tanto la descomposición en fracciones parciales, como la transformada de Laplace inversa de  $H(s)$  en el ejemplo anterior.

```

MAPLE
> H(s):=(2*s+1)/(s^3+3*s^2-4*s);
> convert(H(s),parfrac);
> invlaplace(H(s),s,t);

```

A continuación, ilustraremos la expansión en fracciones parciales de una función con polos repetidos.

### Ejemplo D.8. *Polos repetidos*

Consideremos ahora el caso de la función:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad (\text{D.99})$$

Factorizando el denominador, podemos apreciar que posee un único polo en  $s = -1$ , por tanto nos interesa obtener la expansión (D.88) que en este caso toma la forma:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3}{(s + 1)^3} = \frac{K_{11}}{s + 1} + \frac{K_{12}}{(s + 1)^2} + \frac{K_{13}}{(s + 1)^3} \quad (\text{D.100})$$

Los coeficientes deben obtenerse usando la ecuación (D.89) en que, a diferencia del Ejemplo D.7, se deben tomar en cuenta las derivadas antes de evaluar en  $s = -1$ . Comenzamos por el coeficiente del último término en (D.100), que es el más simple de obtener:

$$K_{13} = \frac{1}{0!} [(s + 1)^3 H(s)]_{-1} = [s^2 + 3]_{-1} = 4 \quad (\text{D.101})$$

El siguiente coeficiente se obtiene derivando una vez, y luego evaluando:

$$K_{12} = \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{ds} (s + 1)^3 H(s) \right]_{-1} = \left[ \frac{d}{ds} (s^2 + 3) \right]_{-1} = [2s]_{-1} = -2 \quad (\text{D.102})$$

Mientras que el coeficiente restante se obtiene derivando nuevamente:

$$K_{11} = \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{ds^2} (s + 1)^3 H(s) \right]_{-1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{ds} (2s) \right]_{-1} = 1 \quad (\text{D.103})$$

Por tanto, hemos obtenido:

$$H(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{-2}{(s + 1)^2} + \frac{4}{(s + 1)^3} \quad (\text{D.104})$$

cuya transformada de Laplace inversa es:

$$h(t) = (1 - 2t + 2t^2) e^{-t}; \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{D.105})$$

□□□

La descomposición en fracciones parciales que aparece en el Lema D.12 en la página 439 es aplicable independientemente de la naturaleza de los polos de  $G(s)$ , reales o complejos. Podemos notar sin embargo que, en el caso de polos complejos, los coeficientes obtenidos mediante la ecuación (D.89) también son complejos. A pesar de lo anterior, el siguiente resultado garantiza que las transformadas de Laplace inversas obtenidas en este caso son funciones del tiempo reales.

**Lema D.14.** *Sea  $G(s)$  una función racional estrictamente propia (con coeficientes reales) cuya descomposición en fracciones parciales está dada por el Lema D.12. Entonces:*

- *Los coeficientes correspondientes a polos complejos aparecen en pares complejos conjugados.*
- *La transformada de Laplace inversa de  $G(s)$  siempre es una función real.*

#### **Demostración**

El teorema fundamental del Álgebra [28] asegura que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales (el denominador  $A(s)$ , en este caso) aparecen siempre en pares complejos conjugados, es decir, si  $p = \alpha + j\beta$ ,  $\beta \neq 0$ , es un polo de  $G(s)$  con multiplicidad  $k$ , entonces  $p^* = \alpha - j\beta$  también lo es, y con la misma multiplicidad. Por lo tanto, el(los) coeficiente(s) (D.89) correspondiente(s) a  $p^*$  está(n) dado(s) por:

$$\begin{aligned} K_\ell &= \frac{1}{(k-\ell)!} \left[ \frac{d^{k-\ell}}{ds^{k-\ell}} (s-p^*)^k G(s) \right]_{s=p^*} \\ &= \left( \frac{1}{(k-\ell)!} \left[ \frac{d^{k-\ell}}{ds^{k-\ell}} (s-p)^k G(s) \right]_{s=p} \right)^* = K_\ell^* \quad (\text{D.106}) \end{aligned}$$

Lo que demuestra la primera parte del Lema.

A partir del Lema D.13 en la página 440, es fácil verificar que la transformada de Laplace inversa de los términos correspondientes a los polos reales de  $G(s)$  siempre es una función real. Para el caso de los polos complejos conjugados, sin embargo, aparecerán términos de la forma:

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^k \left( K_\ell \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{pt} + K_\ell^* \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p^*t} \right) \mu(t) \\ &= \sum_{\ell=1}^k \frac{|K_\ell| t^{\ell-1} e^{\alpha t}}{(\ell-1)!} \left( e^{j(\beta t + \angle K_\ell)} + e^{-j(\beta t + \angle K_\ell)} \right) \mu(t) \\ &= \sum_{\ell=1}^k \frac{2|K_\ell| t^{\ell-1} e^{\alpha t}}{(\ell-1)!} \cos(\beta t + \angle K_\ell) \mu(t) \quad (\text{D.107}) \end{aligned}$$

que es una función real del tiempo. □□□

Una forma de re-expresar, en el dominio de la variable  $s$ , la ecuación (D.107) en el lema anterior, para el caso de multiplicidad 1, está dada por:

$$\frac{K}{s-p} + \frac{K^*}{s-p^*} = \frac{2\Re\{K\}s + (-2\Re\{K^*p\})}{s^2 + (-2\Re\{p\})s + |p|^2} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (\text{D.108})$$

donde todos los coeficientes de la función en el extremo derecho de la ecuación anterior son reales. Es decir, podemos evitar coeficientes complejos en la expansión (D.88), agrupando cada polo complejo con su conjugado. El caso de polos complejos con multiplicidad múltiples puede ser entendido de manera análoga.

A continuación presentamos un ejemplo, para ilustrar como se puede obtener la transformada de Laplace inversa a partir de la expresión con coeficientes complejos en el extremo izquierdo de (D.108), o bien, a partir de la que aparece en el extremo derecho, que posee sólo coeficientes reales.

### Ejemplo D.9. Polos complejos

Nos interesa obtener la transformada de Laplace inversa de la función racional:

$$H(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{D.109})$$

en que  $0 \leq \xi < 1$  es el factor de amortiguación, y  $\omega_n > 0$  es la frecuencia de oscilación natural. Los polos de esta función son complejos y se ubican en (ver Figura D.3):

$$s = -\omega_n\xi \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\omega_n e^{\pm j\alpha} \quad ; \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad (\text{D.110})$$

#### Solución 1:

La expansión en fracciones parciales (D.88) toma la forma:

$$H(s) = \frac{b_1s + b_0}{(s + \omega_n e^{j\alpha})(s + \omega_n e^{-j\alpha})} = \frac{K_{11}}{s + \omega_n e^{j\alpha}} + \frac{K_{21}}{s + \omega_n e^{-j\alpha}} \quad (\text{D.111})$$

en que los coeficientes (D.89) resultan complejos:

$$K_{11} = [(s + \omega_n e^{j\alpha}) H(s)]_{s=-\omega_n e^{j\alpha}} = \left[ \frac{b_1s + b_0}{s + \omega_n e^{-j\alpha}} \right]_{s=-\omega_n e^{j\alpha}} = \frac{-b_1\omega_n e^{j\alpha} + b_0}{-\omega_n 2j \sin \alpha} \quad (\text{D.112})$$

y el lector puede comprobar que  $K_{21} = K_{11}^*$ , tal como establece el Lema D.14 en la página anterior.

La descomposición en fracciones parciales es entonces:

$$H(s) = \frac{K_{11}}{s + \omega_n e^{j\alpha}} + \frac{K_{11}^*}{s + \omega_n e^{-j\alpha}} \quad (\text{D.113})$$

y, por tanto, la transformada de Laplace inversa está dada por:

$$\begin{aligned} h(t) &= K_{11} e^{-\omega_n e^{j\alpha} t} + K_{11}^* e^{-\omega_n e^{-j\alpha} t} \\ &= |K_{11}| e^{-\omega_n \cos(\alpha)t} \left[ e^{j(\angle K_{11} - \omega_n \sin(\alpha)t)} + e^{j(-\angle K_{11} + \omega_n \sin(\alpha)t)} \right] \\ &= 2|K_{11}| e^{-\cos(\alpha)\omega_n t} \cos(\sin(\alpha)\omega_n t - \angle K_{11}) \quad (\text{D.114}) \end{aligned}$$

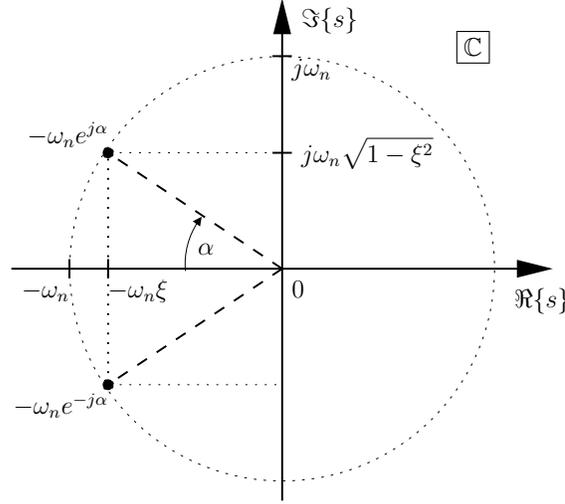


Figura D.3: Polos complejos conjugados, para  $\omega_n > 0$  (Ejemplo D.9).

donde:

$$K_{11} = \frac{-b_1 \omega_n (\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha) + b_0}{-\omega_n 2j \operatorname{sen} \alpha} = \frac{b_1}{2} + j \frac{b_0 - b_1 \omega_n \cos \alpha}{2 \omega_n \operatorname{sen} \alpha} \quad (\text{D.115})$$

y, por tanto:

$$|K_{11}| = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_0 - b_1 \omega_n \cos \alpha}{2 \omega_n \operatorname{sen} \alpha}\right)^2} \quad \angle K_{11} = \arctan\left(\frac{b_0 - b_1 \omega_n \cos \alpha}{b_1 \omega_n \operatorname{sen} \alpha}\right) \quad (\text{D.116})$$

**Solución 2:**

Una forma alternativa de obtener la transformada de Laplace inversa de la función racional en (D.109) es completando el cuadrado en el denominador:

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s + \xi \omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2} \quad (\text{D.117})$$

donde, comparando con las transformadas en la Tabla D.2, vemos que podemos interpretar el denominador, como un corrimiento en  $s$  de la transformada de  $\cos(\cdot)$  o de  $\operatorname{sen}(\cdot)$ . De hecho podemos forzar el numerador a tomar la forma de

dichas transformadas, y separar términos convenientes:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{b_1(s + \xi\omega_n)}{(s + \xi\omega_n)^2 s + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 s + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} \\
 &= b_1\mathcal{L}\left\{e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t)\right\} + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 s + (\omega_n\sqrt{1 - \xi^2})^2} \\
 &= b_1\mathcal{L}\left\{e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t)\right\} + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \mathcal{L}\left\{e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t)\right\}
 \end{aligned} \tag{D.118}$$

de donde se obtiene la transformada de Laplace inversa:

$$h(t) = \left( b_1 \cos(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t) + \frac{b_0 - b_1\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}t) \right) e^{-\xi\omega_n t} \mu(t) \tag{D.119}$$

que el lector puede comprobar que es la misma solución obtenida en (D.114), si notamos en la Figura D.3 que  $\cos \alpha = \xi$  y que, por tanto,  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \xi^2}$ .

□□□

Con estos ejemplos y un poco de práctica no debiera resultar difícil obtener transformadas de Laplace inversa de funciones racionales. Sin embargo, el *software* científico disponible hoy en día permite obtener la expansión en fracciones parciales de una función racional e incluso directamente su transformada de Laplace inversa.

Sugerimos al lector intentar el comando `residue` de MATLAB, mientras que a continuación mostramos el uso de MAPLE, para el caso del Ejemplo D.9.

MAPLE

```

> interface(showassumed=0);
  assume(omega>0); assume(xi>0); additionally(xi<1);
  assume(b0,real); assume(b1,real);
> H(s):=(b1*s+b0)/(s^2+2*xi*omega*s+omega^2);
  h(t):=evalc(invlaplace(H(s),s,t));

```

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \tag{D.120}$$

$$h(t) = b_1 e^{-\xi\omega t} \cos\left(\sqrt{-\xi^2\omega^2 + \omega^2}t\right) + \frac{(-b_1\xi\omega + b_0) e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}\left(-\sqrt{\xi^2\omega^2 + \omega^2}t\right)}{\sqrt{-\xi^2\omega^2 + \omega^2}} \tag{D.121}$$

Es importante notar que hemos usado el comando `evalc` para simplificar la respuesta que MAPLE entrega para  $h(t)$  que, en ocasiones parece contener términos complejos. En este sentido, es importante tener presente que, si bien el uso de *software* ahorra cálculos engorrosos, es fundamental entender e interpretar correctamente los resultados obtenidos.

Como ejemplo final, a continuación ilustramos la descomposición en fracciones parciales de  $H(s)$  planteando un sistema de ecuaciones, en lugar de usar la ecuación (D.89).

**Ejemplo D.10.** Nos interesa obtener la transformada de Laplace inversa de:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} \quad (\text{D.122})$$

Sus polos se ubican en  $p_1 = 0$  (multiplicidad 2) y  $p_{2,3} = -1 \pm j$ , por tanto, a partir del Lema D.12, sabemos que:

$$H(s) = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{s+1-j} + \frac{K_3}{s+1+j} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_4s + K_5}{s^2 + 2s + 2} \quad (\text{D.123})$$

donde, para evitar coeficientes los coeficientes complejos  $K_2$  y  $K_3 = K_2^*$ , hemos agrupado los últimos dos términos.

De todos los coeficientes el más fácil de obtener es:

$$K_{12} = [H(s)s^2]_{s=0} = \left[ \frac{2s^3 + 2s + 2}{s^2 + 2s + 2} \right]_{s=0} = 1 \quad (\text{D.124})$$

mientras que el cálculo de los restantes, usando (D.89), es un tanto engorroso. Por esto, podemos igualar la función original con la que resulta en la suma a la derecha de la ecuación (D.123):

$$\begin{aligned} \frac{2s^3 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} &= \frac{K_{11}}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{K_4s + K_5}{s^2 + 2s + 2} \\ &= \frac{(K_{11} + K_4)s^3 + (1 + 2K_{11} + K_5)s^2 + (2 + 2K_4)s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} \end{aligned} \quad (\text{D.125})$$

donde, igualando los coeficientes de los numeradores a ambos lados, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$K_{11} + K_4 = 2 \quad (\text{D.126})$$

$$1 + 2K_{11} + K_5 = 0 \quad (\text{D.127})$$

$$2 + 2K_4 = 2 \quad (\text{D.128})$$

A partir de este sistema de ecuaciones, se obtiene  $K_{11} = 0$ ,  $K_4 = 2$  y  $K_5 = -1$ , y así se llega a la expansión en fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 2s + 2}{s^4 + 2s^3 + 2s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{2s - 1}{s^2 + 2s + 2} \quad (\text{D.129})$$

cuya transformada de Laplace inversa es:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s - 1}{s^2 + 2s + 2} \right\} \\ &= t\mu(t) + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 1} + \frac{-3}{(s+1)^2 + 1} \right\} \\ &= (t + 2e^{-t} \cos(t) - 3e^{-t} \sin(t)) \mu(t) \end{aligned} \quad (\text{D.130})$$

□□□

Finalmente, hemos incluido la Tabla [D.3 en la página siguiente](#), que contiene las transformadas de Laplace más comunes y sus respectivas inversas. Invitamos al lector, como ejercicio, verificar la validez de las expresiones que allí aparecen.

$Y(s)$	$y(t) ; t \geq 0$
1	$\delta(t)$
$e^{-\tau s} \quad (\tau > 0)$	$\delta(t - \tau)$
$\frac{1}{s}$	1 ( $= \mu(t)$ )
$\frac{1}{s^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{k}{s + \lambda}$	$ke^{-\lambda t}$
$\frac{e^{-\tau s}}{s + \lambda} \quad (\tau > 0)$	$e^{-\lambda(t-\tau)}\mu(t - \tau)$
$\frac{a_1 s + a_0}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}$	$C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$
	en que $C_1 = \frac{\lambda_1 a_1 - a_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$ y $C_2 = \frac{-\lambda_2 a_1 + a_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$
$\frac{a_1 s + a_0}{(s + \lambda)^2}$	$a_1 e^{-\lambda t} + (a_0 - \lambda a_1) t e^{-\lambda t}$
$\frac{a_1 s + a_0}{(s + \lambda)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-\lambda t} [C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \text{sen}(\omega_0 t)]$
	en que $C_1 = a_1$ y $C_2 = \frac{a_0 - a_1 \lambda}{\omega_0}$
$\frac{k}{s(s + \lambda)}$	$\frac{k}{a} (1 - e^{-\lambda t})$
$\frac{a_1 s + a_0}{s((s + \lambda)^2 + \omega_0^2)}$	$\frac{a_0}{\lambda^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\lambda t} (C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \text{sen}(\omega_0 t)) \right]$
	en que $C_1 = a_0$ y $C_2 = \frac{a_0 \lambda - a_1 (\lambda^2 + \omega_0^2)}{\omega_0}$

Tabla D.3: Transformadas de Laplace inversas útiles



## Apéndice E

# La transformada Zeta

En este apéndice se define y estudian las propiedades de la transformada Zeta, aplicable a funciones arbitrarias definidas en tiempo discreto. Para estudios más profundos, encomendamos al lector las referencias [3], [23] y [35].

### E.1. Definición de la transformada

Dada una función de tiempo discreto  $f[t]$ , definida para todo entero no negativo  $t$  ( $t \in \mathbb{Z}_0^+$ ), su transformada Zeta y su transformada Zeta inversa están definidas por las ecuaciones:

$$\mathcal{Z}\{f[t]\} = F[z] = \sum_{t=0}^{\infty} f[t]z^{-t} \quad (\text{E.1})$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F[z]\} = f[t] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F[z]z^{t-1} dz \quad (\text{E.2})$$

El par formado por la transformada Zeta y su inversa están bien definidas, es decir, la sumatoria y la integral convergen si existen  $\rho > 0$  y una constante positiva  $k < \infty$ , tales que:

$$|f[t]| \leq k\rho^t \quad ; \forall t \geq 0 \quad (\text{E.3})$$

es decir, es suficiente que  $f[t]$  sea de *orden exponencial* en tiempo discreto. La condición (E.3) define la región  $|z| > \rho$ , conocida como la *región de convergencia* de la transformada (ver Figura E.1), mientras que  $\rho$  es el *radio de convergencia*.

La condición (E.3) garantiza que, dentro de la región  $|z| > \rho$ , la serie (E.1) que define la transformada converge, pues:

$$\left| \sum_{t=0}^{\infty} f[t]z^{-t} \right| \leq \sum_{t=0}^{\infty} |f[t]z^{-t}| \leq \sum_{t=0}^{\infty} k\rho^t |z|^{-t} = \frac{k}{1 - \frac{\rho}{|z|}} \quad (\text{E.4})$$

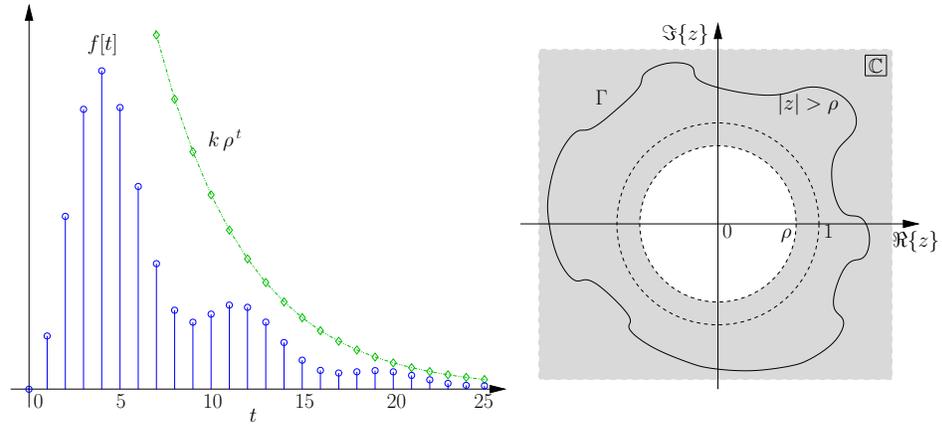


Figura E.1: Función  $f[t]$  de orden exponencial en tiempo discreto y región de convergencia de su transformada Zeta.

Por su parte, la transformada Zeta inversa, definida mediante la integral compleja (E.2), está bien definida si la curva cerrada  $\Gamma$  se elige en el interior de la región de convergencia  $|z| > \rho$ .

A continuación ilustramos el cálculo de la transformada Zeta y su inversa mediante un par de ejemplos.

**Ejemplo E.1.** Consideremos el caso del delta de Kronecker:

$$\delta[t] = \begin{cases} 1 & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

Su transformada Zeta es simple de obtener a partir de la definición (E.1):

$$\mathcal{Z}\{\delta[t]\} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta[t]z^{-t} = 1 \quad (\text{E.6})$$

la cual, según la condición (E.3), converge para cualquier  $\rho > 0$ .

Ahora, si nos interesa obtener la transformada Zeta inversa, elegimos  $\Gamma$  como cualquier curva que encierre al origen  $z = 0$  (ver Figura E.1) y tenemos que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{1\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{t-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^t}{z} dz \quad (\text{E.7})$$

Esta integral compleja puede calcularse mediante el teorema de la Integral de Cauchy [6], evaluando el residuo en el único polo del integrando:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^t}{z} dz = \text{Res}_{z=0} \left( \frac{z^t}{z} \right) = \left( \frac{z^t}{z} \right)_{z=0} = \begin{cases} 1 & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

que corresponde precisamente al delta de Kronecker  $\delta[t]$ .

□□□

**Ejemplo E.2.** Considere la secuencia de tiempo discreto:

$$y[t] = \alpha^t \mu[t] \quad (\text{E.9})$$

Su transformada Zeta está dada por la serie geométrica:

$$\mathcal{Z} \{ \alpha^t \mu[t] \} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - (\alpha z^{-1})^t}{1 - (\alpha z^{-1})} \quad (\text{E.10})$$

donde la expresión al lado derecho converge si, y sólo si:

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \iff |z| > |\alpha| \quad (\text{E.11})$$

por lo tanto, dentro de esta región de convergencia, tenemos que:

$$\mathcal{Z} \{ \alpha^t \mu[t] \} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha} \quad (\text{E.12})$$

Ahora bien, la transformada Zeta inversa en este caso queda definida por:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - \alpha} \right\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z}{z - \alpha} z^{t-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^t}{z - \alpha} dz \quad (\text{E.13})$$

Si la curva cerrada Gamma está contenida en la región de convergencia, esta integral compleja puede calcularse mediante el teorema de la Integral de Cauchy [6], evaluando el residuo en el único polo del integrando, que además está contenido en el interior de la curva  $\Gamma$  (ver Figura E.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - \alpha} \right\} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{z^t}{z - \alpha} dz = \text{Res}_{z=\alpha} \left( \frac{z^t}{z - \alpha} \right) \\ &= \left( (z - \alpha) \frac{z^t}{z - \alpha} \right)_{z=\alpha} = \alpha^t \quad ; t \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

□□□

Si bien hemos ilustrado en estos ejemplos el uso de la integral compleja en (E.2), para el cálculo de la transformada Zeta inversa, en adelante utilizaremos la descomposición en fracciones parciales para identificar transformadas de funciones simples, tal como hicimos en la Sección §D.3 para el caso de la transformada de Laplace.

## E.2. Propiedades

La transformada de Zeta posee una serie de propiedades, que resultan muy útiles en el análisis de señales y respuesta de sistemas a excitaciones en tiempo

discreto. Además, estas mismas propiedades permiten obtener la transformada de ciertas funciones en base a la transformada de señales más simples.

Es posible establecer analogías entre las transformada Zeta, y sus propiedades, con las de la transformada de Laplace de una función de tiempo continuo que aparecen en el Apéndice D. Estas relaciones aparecen en forma natural cuando consideramos la secuencia de tiempo discreto que se obtiene *muestrear* una señal continua (ver Capítulo 11).

A continuación revisamos las propiedades más importantes de la transformada Zeta, las cuales se resumen en la Tabla E.1 en la página 463, mientras que en la Tabla E.2 en la página 464 aparece la transformada de algunas secuencias comunes.

### Lema E.1. Linealidad

La transformada de Zeta es un **operador lineal**, es decir, dadas  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  dos secuencias definidas en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuyas transformadas Zeta son  $Y_1[z]$  e  $Y_2[z]$  respectivamente, entonces:

$$\mathcal{Z} \{ \alpha y_1[t] + \beta y_2[t] \} = \alpha Y_1[z] + \beta Y_2[z] \quad ; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\text{E.15})$$

### Demostración

Esta propiedad es directa de la definición de la transformada mediante la sumatoria (E.1), por tanto, dejamos los detalles como ejercicio al lector. Se debe tener en cuenta que la región de convergencia de la combinación lineal es la **intersección** de las regiones de convergencia correspondientes a las dos transformadas.

□□□

### Lema E.2. Escalamiento en $z$

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , y sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  una constante arbitraria, entonces:

$$\mathcal{Z} \{ \alpha^t y[t] \} = Y \left( \frac{z}{\alpha} \right) \quad (\text{E.16})$$

### Demostración

Según la definición de la transformada Zeta en (E.1), tenemos que:

$$\mathcal{Z} \{ \alpha^t y[t] \} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t y[t] z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} y[t] \left( \frac{z}{\alpha} \right)^{-t} = Y \left( \frac{z}{\alpha} \right) \quad (\text{E.17})$$

En este caso, la región de convergencia de la nueva transformada también resulta escalada, pues:

$$|y[t]| \leq k \rho^t \quad \iff \quad |\alpha^t y[t]| \leq k (|\alpha| \rho)^t \quad (\text{E.18})$$

por tanto, la región en que la transformada converge está dada por  $|z| > |\alpha| \rho$ .

□□□

**Ejemplo E.3.** Consideremos nuevamente la secuencia en el Ejemplo E.2 y su transformada Zeta:

$$y_1[t] = \alpha^t \mu[t] \iff Y_1[z] = \frac{z}{z - \alpha} \quad ; |\alpha| < 1 \quad (\text{E.19})$$

Si ahora consideramos la secuencia:

$$y_2[t] = \alpha^{-t} y_1[t] = \mu[t] \quad (\text{E.20})$$

entonces su transformada Zeta, aplicando el Lema E.2 es:

$$Y_2[z] = Y_1\left(\frac{z}{\alpha^{-1}}\right) = Y_1(\alpha z) = \frac{\alpha z}{\alpha z - \alpha} = \frac{z}{z - 1} \quad (\text{E.21})$$

la cual converge si, y sólo si,  $|z| > 1$ .

□□□

**Ejemplo E.4.** Consideremos ahora la secuencia de tiempo discreto correspondiente a una oscilación, que puede resultar creciente o decreciente dependiendo del parámetro  $r$ :

$$y[t] = r^t \cos(\theta_0 t) \quad (\text{E.22})$$

La transformada Zeta de esta secuencia puede obtenerse reescribiendo el coseno en términos de exponenciales complejas:

$$y[t] = \frac{(re^{j\theta_0})^t + (re^{-j\theta_0})^t}{2} \quad (\text{E.23})$$

desde donde, al aplicar el Lema E.2, se llega a:

$$\begin{aligned} Y[z] &= \frac{\mathcal{Z}\{(re^{j\theta_0})^t \mu[t]\} + \mathcal{Z}\{(re^{-j\theta_0})^t \mu[t]\}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - re^{j\theta_0}} + \frac{z}{z - re^{-j\theta_0}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{z(2z - 2r \cos \theta_0)}{z^2 - z2r \cos \theta_0 + r^2} \right) = \frac{z(z - r \cos \theta_0)}{z^2 - z2r \cos \theta_0 + r^2} \quad (\text{E.24}) \end{aligned}$$

□□□

### Lema E.3. Conjugación

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuya transformada Zeta es  $Y[z]$ . Entonces, la transformada Zeta de la secuencia conjugada está dada por:

$$\mathcal{Z}\{y^*[t]\} = Y^*(z^*) \quad (\text{E.25})$$

#### Demostración

Resulta directa de la definición de la transformada en (E.1):

$$\mathcal{Z}\{y^*[t]\} = \sum_{t=0}^{\infty} y^*[t] z^{-t} = \left( \sum_{t=0}^{\infty} y[t] (z^*)^{-t} \right)^* = \left( Y(z^*) \right)^* \quad (\text{E.26})$$

□□□

**Lema E.4. Desplazamiento en  $t$** 

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuya transformada Zeta es  $Y[z]$ . Entonces, dado un entero  $t_0 > 0$ , tenemos los siguientes resultados para la transformada Zeta de la secuencia  $y[t]$  desplazada:

- **Retardo en  $t_0$ :**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{y[t - t_0]\} &= Y[z]z^{-t_0} + y[-1]z^{-t_0+1} + \dots + y[-t_0 + 1]z^{-1} + y[-t_0] \\ &= z^{-t_0} \left( Y[z] + \sum_{\ell=1}^{t_0} y[-\ell]z^\ell \right) \quad (\text{E.27}) \end{aligned}$$

- **Adelanto en  $t_0$ :**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{y[t + t_0]\} &= Y[z]z^{t_0} - (y[0]z^{t_0} + y[1]z^{t_0-1} + \dots + y[t_0 - 1]z) \\ &= z^{t_0} \left( Y[z] - \sum_{\ell=0}^{t_0-1} y[\ell]z^{-\ell} \right) \quad (\text{E.28}) \end{aligned}$$

**Demostración**

Consideremos primero el caso en que la secuencia ha sido retrasada en  $t_0$ , es decir, la ecuación (E.27). Si usamos la definición de la transformada (E.1), y la escribimos por extensión, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{y[t - t_0]\} &= \sum_{t=0}^{\infty} y[t - t_0]z^{-t} \\ &= y[-t_0] + y[-t_0 + 1]z^{-1} + \dots + y[-1]z^{-t_0+1} + \sum_{t=t_0}^{\infty} y[t - t_0]z^{-t} \quad (\text{E.29}) \end{aligned}$$

donde, si definimos  $l = t - t_0$ , entonces tenemos que  $t = l + t_0$  y, por tanto, reordenando el lado derecho de la última igualdad tendremos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{y[t - t_0]\} &= \sum_{l=0}^{\infty} y[l]z^{-(l+t_0)} + y[-1]z^{-t_0+1} + \dots + y[-t_0 + 1]z^{-1} + y[-t_0] \\ &= z^{-t_0} \left( \sum_{l=0}^{\infty} y[l]z^{-l} \right) + y[-1]z^{-t_0+1} + \dots + y[-t_0 + 1]z^{-1} + y[-t_0] \quad (\text{E.30}) \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado en la ecuación (E.27).

Consideremos ahora el caso de la secuencia  $y[t]$  adelantada en  $t_0$ , es decir, la ecuación (E.28). Reemplazando en la definición de la transformada (E.1),

tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y[t+t_0]\} &= \sum_{t=0}^{\infty} y[t+t_0]z^{-t} = \sum_{l=t_0}^{\infty} y[l]z^{-(l-t_0)} \\ &= z^{t_0} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} y[l]z^{-l} - (y[0] + y[1]z^{-1} + \dots + y[t_0-1]z^{-(t_0+1)}) \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} y[l]z^{-l} - (y[0]z^{t_0} + y[1]z^{t_0-1} + \dots + y[t_0-1]z) \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

lo cual demuestra el resultado en la ecuación (E.28). □□□

Es importante observar que si la secuencia  $y[t]$  es causal, es decir,  $y[t] = 0$  para todo  $t < 0$  (o lo que es lo mismo,  $y[t] = y[t]\mu[t]$ ), entonces tenemos que:

$$\mathcal{Z}\{y[t-t_0]\} = \mathcal{Z}\{y[t-t_0]\mu[t-t_0]\} = Y[z]z^{-t_0} \quad (\text{E.32})$$

pues, en este caso, todas las condiciones iniciales  $\{y[-1], \dots, y[-t_0]\}$  son iguales a cero. Esta observación resulta de particular interés para el cálculo de la transformada Zeta inversa, tal como ilustramos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo E.5.** Nos interesa determinar la transformada Zeta inversa de la función racional:

$$Y[z] = \frac{z^{-t_0}}{z-\alpha} \quad ; \quad t_0 \geq 0 \quad (\text{E.33})$$

Esta transformada se puede reescribir para aplicar el Lema E.4, en particular, la ecuación (E.32):

$$Y[z] = z^{-(t_0+1)} \frac{z}{z-\alpha} \quad \Rightarrow \quad y[t] = \alpha^{t-(t_0+1)} \mu[t-(t_0+1)] \quad (\text{E.34})$$

□□□

El siguiente lema establece cómo calcular la transformada Zeta de la suma acumulada de una secuencia, que es la contraparte discreta de la integral definida de una función en tiempo continuo (ver Lema D.5 en la página 427).

**Lema E.5. Suma acumulada**

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuya transformada Zeta es  $Y[z]$ . Entonces, la transformada Zeta de su suma acumulada está dada por:

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\ell=0}^t y[\ell]\right\} = \frac{z}{z-1} Y[z] \quad (\text{E.35})$$

**Demostración**

Definamos una secuencia  $g[t]$  causal ( $g[t] = 0 \forall t < 0$ ) de la forma

$$g[t] = \sum_{\ell=0}^t y[\ell] \quad (\text{E.36})$$

Entonces, el problema se reduce a calcular  $G[z] = \mathcal{Z}\{g[t]\}$ . Primero, observamos que:

$$g[t] = g[t-1] + y[t] \quad (\text{E.37})$$

Luego, aplicando transformación Zeta a la ecuación (E.37) y usando el Lema E.4, se obtiene:

$$G[z] = z^{-1}G[z] + g[-1] + Y[z] \quad (\text{E.38})$$

Finalmente usando la causalidad de  $g[t]$  (que implica  $g[-1] = 0$ ) se llega a:

$$G[z] = \frac{1}{1-z^{-1}} Y[z] \implies \mathcal{Z}\left\{\sum_{\ell=0}^t y[\ell]\right\} = \frac{z}{z-1} Y[z] \quad (\text{E.39})$$

□□□

**Lema E.6. Derivada en  $z$** 

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuya transformada Zeta es  $Y[z]$ , entonces:

$$\mathcal{Z}\{t y[t]\} = -z \frac{dY[z]}{dz} \quad (\text{E.40})$$

**Demostración**

A partir de la definición de la transformada en (E.1), tenemos que:

$$\mathcal{Z}\{t y[t]\} = \sum_{t=0}^{\infty} t y[t] z^{-t} = -z \sum_{t=0}^{\infty} (-t) y[t] z^{-t-1} = -z \frac{dY[z]}{dz} \quad (\text{E.41})$$

□□□

**Corolario E.1. Segunda derivada en  $z$** 

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuya transformada Zeta es  $Y[z]$ , entonces:

$$\mathcal{Z}\{t^2 y[t]\} = z^2 \frac{d^2 Y[z]}{dz^2} + z \frac{dY[z]}{dz} \quad (\text{E.42})$$

**Demostración**

Resulta de aplicar recursivamente el Lema E.6, por tanto dejamos los detalles como ejercicio para el lector.

□□□

**Ejemplo E.6.** Consideremos el caso en que la secuencia discreta para la cual nos interesa obtener la transformada Zeta es una rampa en tiempo discreto:

$$y[t] = t\mu[t] \quad (\text{E.43})$$

Aplicando el Lema E.6 a la transformada del escalón unitario obtenida en el Ejemplo E.3 en la página 455, tenemos que:

$$\mathcal{Z} \{t\mu[t]\} = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (\text{E.44})$$

□□□

### Lema E.7. Convolución

Sean  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  dos secuencias causales con transformada Zeta  $Y_1[z]$  e  $Y_2[z]$ , respectivamente. Entonces la transformada de la convolución (en tiempo discreto) entre  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  es:

$$\mathcal{Z} \{y_1[t] * y_2[t]\} = Y_1[z]Y_2[z] \quad (\text{E.45})$$

en que:

$$y_1[t] * y_2[t] = \sum_{l=0}^t y_1[l]y_2[t-l] \quad (\text{E.46})$$

### Demostración

Dado que las señales se suponen causales, es decir, iguales a cero para  $t < 0$ , entonces podemos reescribirlas como:

$$y_1[t] = \mu[t]y_1[t] \quad (\text{E.47})$$

$$y_2[t] = \mu[t]y_2[t] \quad (\text{E.48})$$

Así, la convolución (E.46) puede reescribirse de la forma:

$$y_1[t] * y_2[t] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l]\mu[l]y_2[t-l]\mu[t-l] \quad (\text{E.49})$$

Si reemplazamos esta forma en la definición de la transformada (E.1), podemos intercambiar el orden de las sumatorias:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{y_1[t] * y_2[t]\} &= \sum_{t=0}^{\infty} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l]\mu[l]y_2[t-l]\mu[t-l] \right) z^{-t} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l]\mu[l] \left( \sum_{t=0}^{\infty} y_2[t-l]\mu[t-l]z^{-t} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.50})$$

donde ahora podemos aplicar el Lema E.4 sobre corrimiento en  $t$ , en particular, el resultado en (E.32), y reducir la sumatoria eliminando el término  $\mu[l]$ :

$$\mathcal{Z} \{y_1[t] * y_2[t]\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_1[l]\mu[l]z^{-l}Y_2[z] = Y_2[z] \sum_{l=0}^{\infty} y_1[l]z^{-l} = Y_2[z]Y_1[z] \quad (\text{E.51})$$

□□□

**Lema E.8. Producto en el tiempo discreto**

Sean  $y_1[t]$  e  $y_2[t]$  dos secuencias definidas en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuyas transformadas Zeta son  $Y_1[z]$  e  $Y_2[z]$ , respectivamente. Si  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son los radios de convergencia de las transformadas, entonces la transformada del producto entre ellas está dada por:

$$\mathcal{Z} \{y_1[t]y_2[t]\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} Y_1(\xi)Y_2\left(\frac{z}{\xi}\right) \xi^{-1} d\xi = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_2} Y_1\left(\frac{z}{\xi}\right) Y_2(\xi)\xi^{-1} d\xi \quad (\text{E.52})$$

en que la curva cerrada  $\Gamma_1$  está contenida en la región de convergencia de  $Y_1[z]$ , y la curva cerrada  $\Gamma_2$  está contenida en la de  $Y_2[z]$ , y  $|z| > \rho_1\rho_2$ .

**Demostración**

Si reemplazamos el producto de ambas funciones en la definición (E.1), podemos reescribir  $y_1[t]$  como la transformada inversa de  $Y_1[z]$ , e intercambiar el orden entre integral y sumatoria:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{y_1[t]y_2[t]\} &= \sum_{t=0}^{\infty} y_1[t]y_2[t]z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} Y_1(\xi)\xi^{t-1} d\xi \right) y_2[t]z^{-t} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} Y_1(\xi) \left( \sum_{t=0}^{\infty} \xi^{t-1} y_2[t]z^{-t} \right) d\xi \quad (\text{E.53}) \end{aligned}$$

donde ahora podemos aplicar el Lema E.2 sobre escalamiento en  $z$ , para obtener:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{y_1[t]y_2[t]\} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} Y_1(\xi) \left( \sum_{t=0}^{\infty} (\xi^t y_2[t])z^{-t} \right) \xi^{-1} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} Y_1(\xi)Y_2\left(\frac{z}{\xi}\right) \xi^{-1} d\xi \quad (\text{E.54}) \end{aligned}$$

La segunda igualdad en (E.52), se obtiene de manera análoga, reescribiendo  $y_2[t]$  como la transformada inversa de  $Y_2[z]$ .

Mientras que la región de convergencia se determina:

$$\left. \begin{array}{l} |y_1[t]| \leq k_1\rho_1^t \\ |y_2[t]| \leq k_2\rho_2^t \end{array} \right\} \Rightarrow |y_1[t]y_2[t]| \leq k_1k_2(\rho_1\rho_2)^t \quad (\text{E.55})$$

□□□

Al igual que para el caso de funciones de tiempo continuo y su transformada de Laplace (ver Sección §D.2), para secuencias de tiempo discreto existen dos resultados que relacionan el comportamiento asintótico de  $y[t]$  y su transformada Zeta  $Y[z]$ . Estos se conocen como el teorema del Valor Inicial y teorema del Valor Final en tiempo discreto, que a continuación presentamos.

**Teorema E.1. Teorema del Valor Inicial**

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuya transformada Zeta es  $Y[z]$ . Entonces:

$$y[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} Y[z] \quad (\text{E.56})$$



**Demostración**

La ecuación (E.56) se obtiene escribiendo la definición de la transformada Zeta de la secuencia  $y[t]$  por extensión:

$$Y[z] = \sum_{t=0}^{\infty} y[t]z^{-t} = y[0] + \frac{y[1]}{z} + \dots + \frac{y[t]}{z^t} + \dots \quad (\text{E.57})$$

donde es fácil observar que cuando  $z$  tiende a infinito, la serie se reduce sólo al primer término:  $y[0]$ .

□□□

**Teorema E.2. Teorema del Valor Final**

Sea  $y[t]$  una secuencia definida en tiempo discreto  $t \in \mathbb{Z}_0^+$ , cuya transformada Zeta es  $Y[z]$ . Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y[t] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y[z] \quad (\text{E.58})$$

siempre y cuando el límite al lado izquierdo exista.

**Demostración**

Si consideramos la transformada Zeta de la primera diferencia de la secuencia  $y[t]$ , es decir:

$$\mathcal{Z}\{y[t+1] - y[t]\} = \mathcal{Z}\{y[t+1]\} - \mathcal{Z}\{y[t]\} \quad (\text{E.59})$$

podemos aplicar el Lema E.4, en particular la ecuación (E.28), para obtener:

$$\mathcal{Z}\{y[t+1] - y[t]\} = (zY[z] - zy[0]) - Y[z] = (z-1)Y[z] - zy[0] \quad (\text{E.60})$$

Por otro lado, si aplicamos la definición de la transformada (E.1), tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y[t+1] - y[t]\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^t (y[l+1] - y[l])z^{-l} \\ &= -y[0] + (1 - z^{-1})y[1] + \dots + \lim_{t \rightarrow \infty} y[t+1]z^{-t} \end{aligned} \quad (\text{E.61})$$

Finalmente el resultado se obtiene igualando el límite cuando  $z$  tiende a 1 de las dos expresiones antes obtenidas:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( (z-1)Y[z] \right) - y[0] = -y[0] + (1-1)y[1] + \dots + \lim_{t \rightarrow \infty} y[t+1]1^{-t} \quad (\text{E.62})$$

donde, cancelando  $y[0]$  a ambos lados, se obtiene la ecuación (E.58).

□□□

Antes de finalizar nos parece importante recalcar que nuestro interés en el presente apéndice, como estudiamos en el Capítulo 8, se basa en que:

La transformada Zeta es muy útil en el estudio de modelos dinámicos de tiempo discreto, ya que permite convertir las ecuaciones recursivas, que describen un sistema o una señal en el tiempo  $t$ , a ecuaciones algebraicas en la variable  $z$ .

Las propiedades de la transformada Zeta se resumen en la Tabla [E.1 en la página siguiente](#), mientras que la Tabla [E.2 en la página 464](#) muestra algunas funciones comunes y sus respectivas transformadas.

$y[t]$	$Y[z] = \mathcal{Z}\{y[t]\}$	Descripción
$\sum_{i=1}^l a_i y_i[t]$	$\sum_{i=1}^l a_i Y_i[z]$	Linealidad
$\alpha^t y[t] \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$Y\left[\frac{z}{\alpha}\right]$	Escalamiento en $z$
$y^*[t]$	$Y^*[z^*]$	Conjugación
$\sum_{\ell=0}^t y[\ell]$	$\frac{z}{z-1} Y[z]$	Suma acumulada
$y[t-t_0] \quad (t_0 \in \mathbb{N})$	$z^{-t_0} \left( Y[z] + \sum_{\ell=1}^{t_0} y[-\ell] z^\ell \right)$	Retardo en $t$
$y[t+t_0] \quad (t_0 \in \mathbb{N})$	$z^{t_0} \left( Y[z] - \sum_{\ell=0}^{t_0-1} y[\ell] z^{-\ell} \right)$	Adelanto en $t$
$y[t-t_0] \mu[t-t_0]$	$z^{-t_0} Y[z]$	Retardo secuencia causal
$ty[t]$	$-z \frac{dY[z]}{dz}$	Derivada en $z$
$t^2 y[t]$	$z^2 \frac{d^2 Y[z]}{dz^2} + z \frac{dY[z]}{dz}$	Derivada de segundo orden en $z$
$\sum_{l=0}^t y_1[l] y_2[t-l]$	$Y_1[z] Y_2[z]$	Convolución de funciones causales
$y_1[t] y_2[t]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} Y_1[\xi] Y_2\left[\frac{z}{\xi}\right] \xi^{-1} d\xi$	Producto en el tiempo
$y[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} Y[z]$	Teorema del Valor Inicial
$\lim_{t \rightarrow \infty} y[t]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y[z]$	Teorema del Valor Final

Tabla E.1: Propiedades de la transformada Zeta

$y[t] \quad (t \in \mathbb{Z}_0^+)$	$Y[z] = \mathcal{Z}\{y[t]\}$	Región de Convergencia
$\delta[t]$	1	$ z  > 0$
1 ( $= \mu[t]$ )	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
$\mu[t-t_0] \quad (t_0 \in \mathbb{N})$	$\frac{z^{t_0+1}}{z-1}$	$ z  > 1$
$t$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$
$\alpha^t \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z  >  \alpha $
$t\alpha^t \quad (\alpha \in \mathbb{C})$	$\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$ z  >  \alpha $
$e^{j\theta_0 t}$	$\frac{z}{z-e^{j\theta_0}}$	$ z  > 1$
$\cos(\theta_0 t)$	$\frac{z(z-\cos\theta_0)}{z^2-2z\cos\theta_0+1}$	$ z  > 1$
$\text{sen}(\theta_0 t)$	$\frac{z\text{sen}\theta_0}{z^2-2z\cos\theta_0+1}$	$ z  > 1$
$\alpha^t \cos(\theta_0 t)$	$\frac{z(z-\alpha\cos\theta_0)}{z^2-2z\alpha\cos\theta_0+\alpha^2}$	$ z  >  \alpha $
$\alpha^t \text{sen}(\theta_0 t)$	$\frac{z\alpha\text{sen}\theta_0}{z^2-2z\alpha\cos\theta_0+\alpha^2}$	$ z  >  \alpha $
$\cos(\theta_0 t + \phi)$	$\frac{z^2 \cos \phi - z \cos \phi \cos \theta_0 + \text{sen} \phi \text{sen} \theta_0}{z^2 - 2z \cos \theta_0 + 1}$	$ z  > 1$
$\begin{cases} \alpha^t & ; 0 \leq t < N \\ 0 & ; t \geq N \end{cases}$	$\frac{1 - (\alpha z^{-1})^N}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z  > 0$

Tabla E.2: Transformada Zeta de algunas funciones simples

## Apéndice F

# Matrices

Este apéndice resume conceptos y propiedades relacionadas con matrices, como soporte para varios de los capítulos del texto y como material de referencia para tópicos más avanzados. El lector puede encontrar demostraciones y más detalles, por ejemplo, en [5], [20], [21], [43] y [16].

### F.1. Conceptos Básicos

**Definición F.1.** Una **matriz**  $\mathbf{A}$  es un arreglo de  $n \times m$  elementos pertenecientes a un conjunto  $\mathbb{K}$ , dispuestos rectangularmente en  $n$  filas y  $m$  columnas, en que  $n, m \in \mathbb{N}$ . Un elemento de  $\mathbf{A}$  en la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna se denota por  $a_{ij}$ . Es decir:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad ; a_{ij} \in \mathbb{K} \quad (\text{F.1})$$

□□□

El conjunto de matrices en la definición anterior se denota por  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ , o simplemente  $\mathbb{K}^{n \times m}$ . Usualmente el conjunto  $\mathbb{K}$  es un *cuerpo* [28] y, en lo que resta del presente apéndice, supondremos que es el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , o el de los complejos  $\mathbb{C}$ .

Algunos conceptos básicos sobre matrices son los siguientes:

1. Dos matrices son **iguales** si, y sólo si, son iguales elemento a elemento.
2. Una matriz es **cuadrada** si tiene igual número de filas que de columnas.
3. Una matriz formada por sólo una columna se denomina **vector columna**.
4. Una matriz formada por sólo una fila se denomina **vector fila**.

5. Usualmente, denominaremos como **vector de dimensión**  $n$  a un vector columna formado por  $n$  elementos.
6. Una matriz de  $n \times m$  está formada por  $n$  vectores fila y  $m$  vectores columna.
7. La **traza** de una matriz cuadrada  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es la suma de los elementos sobre su diagonal principal, es decir:

$$\text{traza}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{F.2})$$

8. La **traspuesta** de una matriz  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  de  $n \times m$  es la que resulta de intercambiar sus filas con sus columnas, es decir, es la matriz  $\mathbf{A}^T = \{a_{ji}\}$ , de  $m \times n$ .
9. Una matriz (cuadrada)  $\mathbf{A}$  se dice **simétrica** si, y sólo si, es igual a su matriz traspuesta, es decir,  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
10. La matriz **hermitiana** de  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , que denotamos por  $\mathbf{A}^H$ , es aquella que resulta de conjugar los elementos de su matriz traspuesta, es decir:

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^* = \{a_{ji}^*\} \quad (\text{F.3})$$

11. A su vez, una matriz  $\mathbf{A}$  tal que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$  se dice **hermitiana**.
12. Como consecuencia de lo anterior, toda matriz **real** (elementos en  $\mathbb{R}$ ) y **simétrica** es **hermitiana**.
13. Una matriz cuadrada  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  se dice **diagonal** si, y sólo si, todos sus elementos fuera de la diagonal principal de la matriz son cero.
14. Una matriz cuadrada  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  se dice **triangular superior(inferior)** si, y sólo si, todos los elementos bajo(sobre) la diagonal principal son cero.
15. La matriz **identidad** de dimensión  $n$ , que denotamos por  $\mathbf{I}_n$ , es una matriz diagonal de  $n \times n$  cuyos elementos no nulos son iguales a 1, es decir:

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

## F.2. Determinante y rango de una matriz

El **determinante** de una matriz (cuadrada) es un escalar que tiene directa relación con su rango, la existencia de su inversa, y el cálculo de sus autovalores. Su cálculo dada puede definirse por inducción mediante la *expansión de Laplace*.

1. Se define el  $ij$ -ésimo **menor** de una matriz  $\mathbf{A}$  de  $n \times n$ , que denotamos por  $\mathbf{A}_{ij}$  como la matriz de  $(n-1) \times (n-1)$  que resulta de eliminar la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$ .
2. Se define el  $ij$ -ésimo **cofactor** de una matriz  $\mathbf{A}$ , de  $n \times n$ , como el escalar:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (\text{F.5})$$

en que  $\mathbf{A}_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo menor de la matriz  $\mathbf{A}$ .

**Definición F.2.** Dada una matriz cuadrada  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  de  $n \times n$ , su determinante:

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} \quad (\text{F.6})$$

se define recursivamente en términos del determinante de sus menores o desarrollo por cofactores, ya sea a lo largo su  $i$ -ésima fila:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (\text{F.7})$$

o de su  $j$ -ésima columna:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (\text{F.8})$$

Si  $\det \mathbf{A} = 0$  se dice que la matriz es **singular**. □□□

Definiendo el determinante para matrices con un único elemento como  $\det[a_{11}] = a_{11}$ , puede obtenerse el determinante de matrices de dimensiones mayores. Por ejemplo, para matrices de  $3 \times 3$  tenemos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (\text{F.9})$$

**Definición F.3. Rango de una matriz**

Dada una matriz  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$  de  $n \times m$ , definimos:

- El **rango columna(fila)** de  $\mathbf{A}$  es el máximo número de vectores columna(fila) linealmente independientes (ver Apéndice B).
- La matriz  $\mathbf{A}$  es de **rango columna(fila) completo** si su rango columna(fila) es igual a su número de columnas(filas).
- El rango fila de  $\mathbf{A}$  es igual a su rango columna, y se denomina, por tanto, el **rango de la matriz  $\mathbf{A}$**  [44].

□□□

**Ejemplo F.1.** El lector puede verificar que la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{F.10})$$

tiene rango fila y rango columna iguales a 2 y, por tanto, es una matriz de rango 2 (y, por tanto, no es de rango completo).  $\square\square\square$

Una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es de **rango completo** si, y sólo si, es **no singular**, es decir, si  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

### F.3. Inversa de una matriz

**Definición F.4. Producto entre matrices**

Dadas las matrices  $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$  de  $n \times p$  y  $\mathbf{B} = \{b_{kj}\}$  de  $p \times m$ , entonces el producto entre ellas es la matriz  $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$  de  $n \times m$ , tal que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = \langle a_{i*}, b_{*j} \rangle \quad (\text{F.11})$$

donde  $a_{i*}$  es la  $i$ -ésima fila de  $\mathbf{A}$  y  $b_{*j}$  denota la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{B}$ .  $\square\square\square$

Note que el producto matricial está bien definido sólo si el número de columnas de  $\mathbf{A}$  es igual al número de filas de  $\mathbf{B}$ . Es más: el  $ij$ -ésimo elemento de  $\mathbf{C}$  es el producto vectorial entre la  $i$ -ésima fila de  $\mathbf{A}$  y la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{B}$ .

**Lema F.1. Propiedades del producto matricial**

Dadas las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  de dimensiones adecuadas, entonces:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (\text{asociatividad matricial}) \quad (\text{F.12})$$

$$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} \quad (\text{asociatividad escalar}) \quad (\text{F.13})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \quad (\text{distributividad}) \quad (\text{F.14})$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\text{no existe conmutatividad}) \quad (\text{F.15})$$

$$\mathbf{I}_n \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I}_m \quad (\text{en que } \mathbf{A} \text{ es de } n \times m) \quad (\text{F.16})$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} \Rightarrow (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B}) = \det \mathbf{C} \quad (\text{F.17})$$

El lema anterior resume las propiedades del producto matricial, sin embargo, nada se menciona acerca del inverso multiplicativo de una matriz  $\mathbf{A}$ , que definimos a continuación.

**Definición F.5. Inversa de una matriz**

La inversa de una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , que denotamos  $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , es la única matriz que, si existe, satisface:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n \quad (\text{F.18})$$

$\square\square\square$

**Lema F.2. Existencia de la inversa de  $\mathbf{A}$** 

Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es invertible, es decir, su inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  existe, si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- (a)  $\mathbf{A}$  es no singular, es decir,  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .
- (b)  $\text{rango } \mathbf{A} = n$ .
- (c) las filas de  $\mathbf{A}$  son linealmente independientes.
- (d) las columnas de  $\mathbf{A}$  son linealmente independientes.

□□□

**Lema F.3. Cálculo de la inversa**

Dada una matriz no singular  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces su inversa está dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A} \quad (\text{F.19})$$

en que  $\text{adj } \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es la matriz **adjunta** de  $\mathbf{A}$ , definida como la traspuesta de la matriz de sus cofactores, es decir:

$$\text{adj } \mathbf{A} = \{C_{ij}\}^T \quad (\text{F.20})$$

en que el cofactor  $C_{ij}$  se define en (F.5).

**Demostración:**

Usando la definición de la matriz adjunta en (F.20) y la expansión de Laplace en (F.7) y (F.8) el lector puede verificar que:

$$(\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{I} \quad (\text{F.21})$$

□□□

El lector puede verificar las siguientes propiedades:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1} \quad (\text{F.22})$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{F.23})$$

Para el caso de matrices no cuadradas es posible definir inversas por la derecha, por la izquierda e incluso su inversa generalizada (F.110).

**F.3.1. Lema de inversión matricial**

El siguiente resultado es muy útil para el cálculo del determinante y la inversa de matrices de grandes dimensiones, o bien, definidas por bloques.

Consideramos una matriz cuadrada de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p+q) \times (p+q)} \quad (\text{F.24})$$

en que  $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{C}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{C}^{p \times q}$ ,  $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{C}^{q \times p}$ , y  $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{C}^{q \times q}$ .

**Lema F.4. Inversa de una matriz particionada**

Considere la matriz particionada  $\mathbf{A}$  en (F.24) y las matrices auxiliares:

$$\Delta_{11} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21} \quad (\text{F.25})$$

$$\Delta_{22} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \quad (\text{F.26})$$

Entonces, si las matrices  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$ ,  $\Delta_{11}$  y  $\Delta_{22}$  son no singulares, la matriz  $\mathbf{A}$  es no singular y su inversa es:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\Delta_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\Delta_{22}^{-1} \\ -\Delta_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \Delta_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{F.27})$$

o bien:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_{11}^{-1} & -\Delta_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\Delta_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\Delta_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{F.28})$$

Además, dadas submatrices como las que forman la matriz en la ecuación (F.24), entonces tenemos que:

$$\Delta_{11}^{-1} = \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\Delta_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} \quad (\text{F.29})$$

$$\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\Delta_{22}^{-1} = \Delta_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \quad (\text{F.30})$$

Finalmente, el determinante de la matriz (F.24), está dado por:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_{11})\det(\Delta_{22}) = \det(\mathbf{A}_{22})\det(\Delta_{11}) \quad (\text{F.31})$$

**Demostración:**

La matriz  $\mathbf{A}$  puede reescribirse en la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ 0 & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{F.32})$$

donde, si calculamos el determinante en cada caso, obtenemos cada una de las expresiones en (F.31). Además, se debe observar que esto asegura que  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , es decir,  $\mathbf{A}$  es no singular.

Ahora bien, podemos verificar que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \Delta_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\Delta_{22}^{-1} \\ 0 & \Delta_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{F.33})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \quad (\text{F.34})$$

Estas dos ecuaciones se pueden reemplazar en la inversa de la ecuación (F.32), pues usando (F.23):

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \Delta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & 0 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{F.35})$$

con lo que se obtiene (F.27). La ecuación (F.28) se prueba de manera análoga.

Finalmente, las ecuaciones (F.29) y (F.30) se obtienen igualando bloque a bloque la parte superior de las matrices (F.27) y (F.28).

□□□

**Lema F.5. Lema de inversión matricial**

Dadas las matrices  $\mathbf{A}$  de  $m \times n$ ,  $\mathbf{C}$  de  $n \times m$  y la matriz no singular  $\mathbf{B}$  de  $n \times n$ , tenemos que:

$$\mathbf{C}(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} \quad (\text{F.36})$$

$$(\mathbf{I}_m + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}(\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} \quad (\text{F.37})$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \quad (\text{F.38})$$

$$\det(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{I}_n - \mathbf{C}\mathbf{A}) \quad (\text{F.39})$$

**Demostración:**

La ecuación (F.36), es directa de (F.30), haciendo  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{I}_m$ ,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{C}$  y  $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_n$ .

La ecuación (F.37), se obtiene a partir de (F.29), haciendo  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{I}_m$ ,  $\mathbf{A}_{12} = -\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{C}$  y  $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{B}$ .

La ecuación (F.38), también se obtiene a partir de (F.29), pero haciendo  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}_{12} = -\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_m$ .

Finalmente, (F.39) se obtiene a partir de la ecuación (F.31), pero considerando  $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{I}_n$ ,  $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{I}_m$ .

□□□

## F.4. Autovalores y autovectores

Dada una matriz  $\mathbf{A}$  de  $n \times n$ , en diferentes problemas interesa encontrar un vector  $\mathbf{v}$  de dimensión  $n$  y un escalar  $\lambda$ , que sean solución de la ecuación:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad ; \quad \mathbf{v} \neq 0 \quad (\text{F.40})$$

Los escalares  $\{\lambda_i\}$  que satisfacen esta ecuación se denominan *valores propios* o *autovalores*, mientras que los correspondientes vectores  $\{\mathbf{v}_i\}$  se denominan *vectores propios* o *autovectores*.

**Lema F.6. Ecuación característica**

Cada autovalor  $\lambda$  de la matriz  $\mathbf{A}$  en (F.40) satisface la ecuación característica:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{F.41})$$

**Demostración**

La ecuación (F.40) puede reescribirse como:

$$\lambda\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = 0 \quad (\text{F.42})$$

donde el resultado puede probarse por contradicción, pues si la ecuación (F.41) no se cumple, entonces la matriz  $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$  es no singular, y al multiplicar por su inversa al lado izquierdo se tiene:

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{v} = 0 \quad (\text{F.43})$$

lo que contradice la condición  $\mathbf{v} \neq 0$ . □□□

El polinomio  $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$  se denomina *polinomio característico* de  $\mathbf{A}$ , es de orden  $n$  y, de acuerdo al teorema fundamental del Álgebra [28], posee  $n$  raíces complejas. El conjunto de estas raíces se denomina el *espectro* de  $\mathbf{A}$  y se denota por  $\sigma(\mathbf{A})$ . Además, se define el *radio espectral* de  $\mathbf{A}$ , que denotamos por  $\rho(\mathbf{A})$  como el radio del disco más pequeño centrado en el origen del plano complejo  $\mathbb{C}$  que contiene a todos los autovalores, es decir:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\} \quad (\text{F.44})$$

### F.4.1. Diagonalización y formas de Jordan

Para determinar el autovector  $\mathbf{v}_i$  asociado al autovalor  $\lambda_i$  de la matriz  $\mathbf{A}$ , basta reemplazar en la ecuación (F.40) y determinar una de sus (infinitas) soluciones. Cuando los autovalores de  $\mathbf{A}$  son todos diferentes, los autovectores correspondientes resultan linealmente independientes. Sin embargo, si alguno de los autovalores  $\lambda_i$  tiene multiplicidad  $n_i > 1$ , es posible que los autovectores asociados sean linealmente dependientes, es decir, existen dos posibilidades:

- (i)  $\lambda_i$  da origen a  $n_i$  autovectores linealmente independientes, o bien,
- (ii)  $\lambda_i$  da origen a **menos** de  $n_i$  autovectores linealmente independientes.

Para el primer caso, tenemos el siguiente resultado.

#### Lema F.7. Diagonalización

Dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , con autovalores  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y cuyos autovectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  son linealmente independientes. Entonces:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{P} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (\text{F.45})$$

en que:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (\text{F.46})$$

#### Demostración

La matriz  $\mathbf{T}$  es no singular, pues sus columnas son linealmente independientes. Ahora bien, usando la ecuación (F.46), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{T} &= \mathbf{A} [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] = [\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_n] \\ &= [\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \lambda_n\mathbf{v}_n] = \mathbf{T} \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \end{aligned} \quad (\text{F.47})$$

donde, multiplicando por la izquierda  $\mathbf{T}^{-1}$ , se obtiene (F.45). □□□

Para el caso (ii), en que (F.40) da origen a menos de  $n_i$  autovectores linealmente independientes, podemos utilizar la siguiente *cadena de autovectores*:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_{i,0} = 0 \quad (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_{i,1} = \mathbf{v}_{i,0} \quad \dots \quad (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{v}_{i,k-1} = \mathbf{v}_{i,k-2} \quad (\text{F.48})$$

Note que  $\mathbf{v}_{i,0}$  es un autovector de  $\mathbf{A}$ , mientras que  $\mathbf{v}_{i,j}$  para  $j = 1, \dots, k-1$  se denominan *autovectores generalizados*. Con estos vectores se construye una matriz  $\mathbf{T}$ , análoga a (F.46):

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \underbrace{\mathbf{v}_{i,k-1} \quad \mathbf{v}_{i,k-2} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{i,0}}_{\substack{k \text{ autovectores} \\ \text{asociados a } \lambda_i}} \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (\text{F.49})$$

con la cual, en vez de una matriz  $\mathbf{P}$  diagonal como en (F.45), se obtiene una matriz  $\mathbf{J}_\mathbf{A}$  con la **forma de Jordan**:

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{J}_\mathbf{A} \quad (\text{F.50})$$

en que:

$$\mathbf{J}_\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & \mathbf{J}_i & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k} \quad (\text{F.51})$$

Note que el *bloque de Jordan*  $\mathbf{J}_i$  es una matriz triangular y, por lo tanto:

$$\text{traza}(\mathbf{J}_i) = k\lambda_i \quad \det(\mathbf{J}_i) = \lambda_i^k \quad (\text{F.52})$$

**Ejemplo F.2.** Considere la matriz [19, p.247]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbb{R} \quad (\text{F.53})$$

Sus autovalores se obtiene fácilmente de la ecuación característica (F.41):

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (multiplicidad 2)} \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \quad (\text{F.54})$$

**Caso 1:** Si suponemos que  $a = 0$ , entonces, a partir de (F.40), se obtiene:

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 \\ 3\beta_1 \\ \alpha_1 + \beta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.55})$$

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{F.56})$$

La expresión para  $\mathbf{v}_1$  nos dice que existen dos grados de libertad,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , es decir, es posible obtener 2 vectores linealmente independientes:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3\alpha_1 \\ 3\beta_1 \\ \alpha_1 + \beta_1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \mathbf{v}_{1,\alpha} + \beta_1 \mathbf{v}_{1,\beta} \quad (\text{F.57})$$

Con lo que obtenemos la transformación de similitud:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_{1,\alpha} \quad \mathbf{v}_{1,\beta} \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.58})$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \quad (\text{F.59})$$

**Caso 2:** Si suponemos ahora  $a \neq 0$ , entonces, a partir de (F.40), se obtiene:

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_{1,0} \quad (\text{F.60})$$

$$(\lambda_2 \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -a & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.61})$$

El segundo autovector asociado a  $\lambda_1$  se obtiene a partir de (F.48):

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_{1,1} = \mathbf{v}_{1,0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.62})$$

donde se obtiene  $\alpha = 3/a$ ,  $\beta = 3\gamma + 1 - 3/a$  y, por simplicidad, elegimos  $\gamma = 0$ . De esta forma, obtenemos el autovector generalizado  $\mathbf{v}_{1,1} = [3/a, 1 - 3/a, 0]^T$  y la transformación de similitud:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_{1,1} \quad \mathbf{v}_{1,0} \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 3/a & 0 & 0 \\ 1 - 3/a & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{F.63})$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\mathbf{A} \quad (\text{F.64})$$

□□□

La ecuación (F.45) y (F.50) definen relaciones muy particulares entre  $\mathbf{A}$  y las matrices  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{J}_\mathbf{A}$ , respectivamente. Sin embargo, en un contexto más general,

podemos distinguir ciertas relaciones genéricas entre dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} \quad \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ se dicen } \mathbf{similares} \quad (\text{F.65})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^H \mathbf{A} \mathbf{S} \quad \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ se dicen } {}^H \mathbf{congruentes} \quad (\text{F.66})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \quad \mathbf{A} \text{ y } \mathbf{B} \text{ se dicen } {}^T \mathbf{congruentes} \quad (\text{F.67})$$

En los tres casos, la matriz  $\mathbf{S}$  debe ser no singular. La ecuación en (F.65) define una *transformación de similaridad*, mientras que (F.66) y (F.67) definen relaciones de *congruencia* que coinciden si es que  $\mathbf{S}$  es una matriz real.

Características propias de una matriz  $\mathbf{A}$ , tales como sus autovalores, su traza, su determinante y su norma se preservan bajo una transformación de similaridad (F.65).

**Lema F.8.** *La traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores, mientras su determinante es igual al producto de ellos. Es decir, dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , con autovalores  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , entonces:*

$$\text{traza}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{F.68})$$

#### **Demostración**

Se basa en que la traza y el determinante de la matriz diagonal  $\mathbf{P}$  en (F.45) (o la forma de Jordan  $\mathbf{J}_\mathbf{A}$  en (F.50)) son iguales a los de  $\mathbf{A}$ . Ver detalles, por ejemplo, en [20].

□□□

A continuación presentamos algunas propiedades de los autovalores y los autovectores de una matriz, cuya demostración dejamos como ejercicio al lector

#### **Lema F.9. Propiedades de autovalores y autovectores**

[P1] *Si los autovalores de una matriz  $\mathbf{A}$  son  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , entonces los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}^k$ , en que  $k \in \mathbb{N}$ , son  $\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\}$ .*

[P2] *Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}^k$ , en que  $k \in \mathbb{N}$ , tienen los mismos autovectores.*

[P3] *Si la matriz  $\mathbf{A}$  es hermitiana, es decir,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$ , entonces sus autovalores son reales.*

[P4] *Si la matriz  $\mathbf{A}$  es hermitiana, entonces sus autovectores son linealmente independientes y ortogonales, y, en consecuencia,  $\mathbf{A}$  es diagonalizable.*

[P5] *Si la matriz  $\mathbf{A}$  es hermitiana, entonces su **descomposición espectral** está dada por:*

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (\text{F.69})$$

en que  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  son sus autovalores, y sus autovectores  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  se eligen de norma unitaria, es decir,  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ .

□□□

## F.5. Normas de vectores y matrices

En la Sección §B.1 estudiamos la norma vectorial *inducida* por el producto interno dentro de un espacio vectorial. A continuación presentamos otras formas de definir la norma de un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ , que el lector puede verificar que satisfacen la Definición B.6.

**Norma Suma:** o norma  $\ell_1$ , definida como:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + \dots + |v_n| \quad (\text{F.70})$$

**Norma Euclidea:** o norma  $\ell_2$ , definida como:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = (|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2)^{1/2} \quad (\text{F.71})$$

Esta norma representa la distancia entre dos puntos en  $\mathbb{C}^n$ , y coincide con el producto punto usual en  $\mathbb{C}^n$ , es decir,  $\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\mathbf{v}^H \mathbf{v}}$

**Norma  $p$ :** o norma  $\ell_p$ , en que  $p \geq 1$ , definida como:

$$\|\mathbf{v}\|_p = (|v_1|^p + \dots + |v_n|^p)^{1/p} \quad (\text{F.72})$$

**Norma Máx:** o norma  $\ell_\infty$ , definida como:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\} \quad (\text{F.73})$$

Un buen ejercicio para el lector es representar en  $\mathbb{R}^2$  todos los vectores cuya norma, según las diferentes definiciones anteriores, es unitaria.

Para definir la **norma de una matriz** podemos considerar simplemente el isomorfismo entre  $\mathbb{C}^{n \times m}$  y el espacio vectorial  $\mathbb{C}^{nm}$ , es decir, podemos **vectorizar** la matriz y considerar alguna de las normas vectoriales anteriores. Sin embargo, este enfoque impide relacionar la norma con características propias de las matrices, como su producto, su determinante o su espectro. La siguiente definición resulta más adecuada.

### Definición F.6. Norma de una matriz

Una norma matricial es una función  $\|\mathbf{A}\| : \mathbb{C}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad y \quad \|\mathbf{A}\| = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\text{F.74})$$

$$\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{F.75})$$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad (\text{desigualdad triangular}) \quad (\text{F.76})$$

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \quad (\text{propiedad submultiplicativa}) \quad (\text{F.77})$$

□□□

De esta forma, dada una matriz  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , podemos clasificar las normas matriciales más comunes en tres grupos:

**Norma matriciales generalizadas:** son aquellas que no satisfacen necesariamente la propiedad submultiplicativa. Por ejemplo, las normas vectoriales (F.70)–(F.73) aplicadas a matrices *vectorizadas* no necesariamente satisfacen esta propiedad:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{F.78})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{F.79})$$

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^p \right)^{1/p} ; p \geq 1 \quad (\text{F.80})$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} |a_{ij}| \quad (\text{F.81})$$

La norma (F.79) es comúnmente conocida como norma *Fröbenius*, y se puede definir equivalentemente como:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\text{traza}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})} = \|\mathbf{A}\|_F \quad (\text{F.82})$$

**Normas matriciales inducidas:** las que se definen haciendo uso de alguna *norma vectorial*, de varias forma equivalentes:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \max_{\|\mathbf{v}\| \leq 1} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \max_{\|\mathbf{v}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (\text{F.83})$$

**La norma espectral:** es tal vez la más importante y se define como:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \max\{\sqrt{|\lambda|} : \lambda \text{ es un autovalor de } \mathbf{A}^H \mathbf{A}\} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})} = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (\text{F.84})$$

en que  $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$  es el mayor *valor singular* de  $\mathbf{A}$  (Sección F.7). Esta definición es independiente de otras normas matriciales. Sin embargo, coincide con la norma matricial inducida por la norma vectorial euclídeana (F.71):

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2 = \max_{\|\mathbf{v}\|=1} \sqrt{\mathbf{v}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{v}} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})} \quad (\text{F.85})$$

**Definición F.7.** Dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , se define su **número de condicionamiento**:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \begin{cases} \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| & \text{si } \mathbf{A} \text{ es no singular} \\ \infty & \text{si } \mathbf{A} \text{ es singular} \end{cases} \quad (\text{F.86})$$

□□□

Note que, si  $\mathbf{A}$  es no singular:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| \geq \|\mathbf{I}\| \geq 1 \quad (\text{F.87})$$

Cuando  $\kappa(\mathbf{A}) \gg 1$ , la matriz se dice *mal condicionada* y para el cálculo de su inversa se requieren métodos numéricamente robustos [16].

El número de condicionamiento tiene directa relación con la cercanía de una matriz a ser singular.

## F.6. Algunos tipos especiales de matrices

**Definición F.8.** Se define la *matriz exponencial* de  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , mediante la expansión en serie de Taylor:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n \quad (\text{F.88})$$

**Definición F.9.** Se dice que la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es *nilpotente* si existe  $q \in \mathbb{N}$ , talque  $\mathbf{A}^q = \mathbf{0}$ . Si  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ , se dice que  $\mathbf{A}$  es *idempotente*.

**Definición F.10.** La matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se denomina *Toeplitz* si sus elementos sobre cada diagonal son todos iguales:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_{-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-n} & \dots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.89})$$

**Definición F.11.** Se dice que  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es una matriz de *Vandermonde* si tiene la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n (x_i - x_j) \quad (\text{F.90})$$

Este tipo de matrices aparece, por ejemplo, en el cálculo de la transformada de Fourier discreta (Sección §5.5) y en problemas de interpolación polinomial [20, 16].

**Definición F.12. Matriz unitaria**

Una matriz  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , tal que  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_n$  se dice *unitaria*.

Una matriz  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_n$  se dice *real-ortogonal*.

□□□

- Las matrices unitarias poseen interesantes propiedades: sus vectores columna forman un conjunto *ortonormal*, al igual que sus vectores fila. Además, la transformación  $\mathbf{w} = \mathbf{U}\mathbf{v}$  preserva longitudes, es decir,  $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|$ , y se le denomina por tanto **isometría euclídeana**.
- Dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se dicen **unitaria(real-ortogonal) equivalentes**, si existe una matriz unitaria(real-ortogonal)  $\mathbf{U}$  tal que:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{B} \quad (\text{F.91})$$

Note además que las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son similares y  $^H(T)$ -congruentes (ver las ecuaciones (F.65)–(F.67)).

**Teorema F.1. Teorema de Schur de triangularización unitaria**

Dada una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , entonces existe una matriz unitaria  $\mathbf{U}$ , tal que:

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{T} = \{t_{ij}\} \quad (\text{F.92})$$

donde  $\mathbf{T}$  es una matriz triangular superior, cuyos elementos en la diagonal principal son  $t_{ii} = \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

□□□

Este resultado es fundamental pues establece que toda matriz  $\mathbf{A}$  puede transformarse, mediante una matriz unitaria  $\mathbf{U}$ , en una matriz  $\mathbf{T}$  en que sus autovalores se encuentran sobre la diagonal principal. Existe una serie de algoritmos, por ejemplo, en MATLAB, que se basan en este resultado [16].

**Teorema F.2. Teorema de Cayley-Hamilton**

Toda matriz satisface su propia ecuación característica, es decir, si  $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$  es el polinomio característico de una matriz  $\mathbf{A}$  definido en (F.41), entonces:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (\text{F.93})$$

□□□

**Definición F.13. Matriz normal**

Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que  $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^H$  se dice **normal**. Como consecuencia del teorema de Schur F.1 una matriz  $\mathbf{A}$  es normal si, y sólo si, es **unitaria diagonalizable**, es decir, si existe una matriz unitaria  $\mathbf{U}$  talque  $\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U}$  es diagonal.

□□□

Invitamos al lector a demostrar, utilizando de descomposición espectral en el Lema F.9, que toda matriz hermitiana (simétrica, en el caso de matrices reales) es normal y, por tanto unitaria diagonalizable.

### F.6.1. Matrices positivas

Una clase de matrices hermitianas (o real simétricas) que aparece en múltiples aplicaciones son aquellas que se denominan *positivas*.

**Ejemplo F.3.** Si consideramos la expansión en serie de Taylor de una función en dos variables (Sección §A.2) en torno a un punto  $(x_o, y_o)$ :

$$f(x, y) = f(x_o, y_o) + \nabla f|_{(x_o, y_o)} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}^T \mathbf{H}_o(f) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \dots \quad (\text{F.94})$$

en que  $\Delta x = x - x_o$ ,  $\Delta y = y - y_o$ ,  $\nabla f$  es el gradiente y  $\mathbf{H}(f)$  es el hessiano, o matriz de las segundas derivadas, de  $f(x, y)$ :

$$\mathbf{H}_o(f) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right] \bigg|_{(x_o, y_o)} \quad (\text{F.95})$$

De esta forma, la función  $f(x, y)$  posee un mínimo, y es convexa, en el punto  $(x_o, y_o)$  si:

$$\nabla f|_{(x_o, y_o)} = 0 \quad \text{i.e. } (x_o, y_o) \text{ es un punto crítico} \quad (\text{F.96})$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_o(f) \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{i.e. } \mathbf{H}_o(f) \text{ es una matriz positiva} \quad (\text{F.97})$$

□□□

#### Definición F.14. Matriz positiva definida

Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz hermitiana. Si, para todo vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ :

$$\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} > 0 \quad \|\mathbf{v}\| \neq 0 \quad \text{entonces } \mathbf{A} \text{ se dice } \mathbf{definida\ positiva} \quad (\text{F.98})$$

$$\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} \geq 0 \quad \text{entonces } \mathbf{A} \text{ se dice } \mathbf{semidefinida\ positiva} \quad (\text{F.99})$$

Análogamente,  $\mathbf{A}$  se dice (semi)definida negativa si la matriz  $(-\mathbf{A})$  es (semi)definida positiva.

□□□

**Lema F.10.** Una matriz hermitiana  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es definida positiva si y sólo si sus autovalores son positivos. Análogamente, la matriz es semidefinida positiva si y sólo si sus autovalores son no negativos.

#### Demostración

Considere la descomposición espectral en (F.69), en que los autovectores ortogonales  $\mathbf{v}_i$  se eligen de norma unitaria y forman, por tanto, una base ortonormal. Si pre-multiplicamos (F.69) por  $\mathbf{v}_\ell^H$  y post-multiplicamos por  $\mathbf{v}_k$  obtenemos:

$$\mathbf{v}_\ell^H \mathbf{A} \mathbf{v}_k = \begin{cases} \lambda_\ell & ; \ell = k \\ 0 & ; \ell \neq k \end{cases} \quad (\text{F.100})$$

Por otro lado, un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  cualquiera siempre puede expresarse como combinación lineal de los autovectores:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* \mathbf{v}_j^H \mathbf{A} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j = \sum_{\ell=1}^n |\alpha_\ell|^2 \lambda_\ell \quad (\text{F.101})$$

donde se aprecia que  $\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} > 0$  si y sólo si  $\lambda_\ell > 0, \forall \ell$ . Por su parte, si relajamos la condición sobre los autovalores  $\lambda_\ell \geq 0$ , entonces  $\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v} \geq 0$ .

□□□

**Lema F.11.** Una condición suficiente para que una matriz hermitiana  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sea definida positiva, es que sea estrictamente diagonal dominante, es decir, que se cumpla:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \text{y, simultáneamente,} \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \quad (\text{F.102})$$

□□□

**Lema F.12. Raíz cuadrada de una matriz positiva**

Una matriz hermitiana  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es positiva definida si, y sólo si, existe una matriz no singular  $\mathbf{B}$ , tal que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^H \mathbf{B} \quad (\text{F.103})$$

La matriz  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{1/2}$  se denomina la **raíz cuadrada** de  $\mathbf{A}$ . Sin embargo, esta matriz  $\mathbf{B}$  no es la única raíz cuadrada de  $\mathbf{A}$ , pues  $\mathbf{U}\mathbf{B}$  también lo es, para cualquier matriz unitaria  $\mathbf{U}$ .

□□□

## F.7. Valores singulares

Las características y propiedades matriciales en las secciones anteriores, en algunos casos sólo tienen sentido para matrices cuadradas y, más aún, no singulares. En esta sección nos referimos a la descomposición en valores singulares, que permite extender algunos de estos resultados. Dicha descomposición permite *diagonalizar* una matriz de dimensiones arbitrarias.

**Teorema F.3. Descomposición en valores singulares**

Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  una matriz de rango  $k \leq q = \min\{n, m\}$ , entonces:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{W}^H \quad (\text{F.104})$$

en que  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  y  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ , y además:

- $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  son matrices unitarias, es decir,  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I}_n$  y  $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_m$ .

- Suponiendo  $n < m$  ( $n > m$ ), entonces la matriz  $\Sigma$  ( $\Sigma^T$ ) es de la forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{F.105})$$

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_q = 0 \quad (\text{F.106})$$

- Los elementos  $\{\sigma_i\}$  se denominan **valores singulares** de la matriz  $\mathbf{A}$ , y cada  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , en que  $\lambda_i$  es un autovalor de  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ .
- Las columnas de  $\mathbf{V}$  son los autovectores de  $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$ , y las columnas de  $\mathbf{W}$  son los autovectores de  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  (ordenados según los autovalores  $\lambda_i = \sigma_i^2$ ).
- Si  $n \leq m$  y  $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$  no tiene autovalores repetidos, entonces:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}_1 \Sigma \mathbf{W}_1^H = \mathbf{V}_2 \Sigma \mathbf{W}_2^H \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \mathbf{D} \quad (\text{F.107})$$

en que  $\mathbf{D} = \text{diag}\{e^{j\theta_1}, \dots, e^{j\theta_n}\}$  con  $\theta_i \in \mathbb{R}$ .

- Si  $n < m$ , entonces la elección de  $\mathbf{W}$  **no** es única;
- Si la matriz  $\mathbf{A}$  es cuadrada y de rango completo ( $n = m = k$ ), entonces dada  $\mathbf{V}$ , la matriz  $\mathbf{W}$  queda únicamente determinada.
- Si  $n \geq m$ , la unicidad de  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  se puede analizar descomponiendo  $\mathbf{A}^H$  como en (F.104).
- Si  $\mathbf{A}$  es una matriz real, entonces  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  pueden escogerse reales y (F.104) se reduce a  $\mathbf{A} = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{W}^T$ .

Algunas de las aplicaciones de mayor interés de los valores singulares son:

**Normas de matrices:** La norma espectral (F.84) de una matriz  $\mathbf{A}$  corresponde justamente al mayor de sus valores singulares, es decir,  $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1$ .

El lector puede también verificar que la norma Fröbenius en (F.82) satisface la identidad:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left( \sum_{i=1}^q \sigma_i^2 \right)^{1/2} \quad (\text{F.108})$$

**Número de condicionamiento:** Si en (F.86) utilizamos la norma espectral podemos apreciar que el número de condicionamiento de una matriz es igual al cociente entre el mayor y menor valor singular:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sqrt{|\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})|}}{\sqrt{|\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})|}} = \frac{\sigma_1(\mathbf{A})}{\sigma_n(\mathbf{A})} = \frac{\sigma_{\text{máx}}(\mathbf{A})}{\sigma_{\text{mín}}(\mathbf{A})} \quad (\text{F.109})$$

**Inversa generalizada (Moore-Penrose):** dada una matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}^H$ , ésta se define como:

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{W}\mathbf{\Sigma}^\dagger\mathbf{V}^H \quad (\text{F.110})$$

en que  $\mathbf{\Sigma}^\dagger$  es la traspuesta de  $\mathbf{\Sigma}$  en que los valores singulares de  $\mathbf{A}$  se reemplazan por sus recíprocos. Note que si  $\mathbf{A}$  es no singular, entonces  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$ . El lector además puede verificar que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \text{ y } \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} \text{ son hermitianas} \quad (\text{F.111})$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (\text{F.112})$$

$$\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger \quad (\text{F.113})$$

La inversa generalizada puede aplicarse para la estimación por mínimos cuadrados, en el Capítulo 12, pues para resolver el sistema  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , nos interesa encontrar el vector  $\mathbf{x}$  que minimiza  $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ . El lector puede verificar que  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{b}$  resuelve este problema.



# Referencias

- [1] B.D.O. Anderson and John Moore. *Linear Optimal Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [2] B.D.O. Anderson and John Moore. *Optimal filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979.
- [3] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems. Theory and Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 3rd edition, 1997.
- [4] H.W. Bode. *Network analysis and feedback amplifier design*. Van Nostrand, New York, 1945.
- [5] M. Brookes. The matrix reference manual [online], 2005. <http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/intro.html>.
- [6] R. Churchill and J. Brown. *Complex Variable and Applications*. McGraw Hill Book Company, 1984.
- [7] J.W. Cooley and J.W. Tukey. An algorithm for the machine computation of complex Fourier series. *Math. Comput.*, 19:297–301, 1965.
- [8] G. Doetch. *Guide to the applications of Laplace and Z Transform*. D. van Nostand, second edition, 1971.
- [9] R.C. Dorf and R. Bishop. *Modern Control Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 9<sup>th</sup> edition, 1997.
- [10] P. Duhamel and M. Vetterli. Fast Fourier transforms: a tutorial review and a state of the art. *Signal Processing*, 19:259–299, 1990.
- [11] P. Eykhoff. *System Identification*. Wiley, New York, 1974.
- [12] A. Feuer and G.C. Goodwin. *Sampling in digital signal processing and control*. Birkhäuser Boston, Cambridge, Mass., 1996.
- [13] G.F. Franklin and J.D. Powel. *Digital Control of Dynamics Systems*. Addison-Wesley, second edition, 1990.
- [14] F.R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*, volume II. Chelsea Pub., London, UK, 1977.

- [15] C. Gasquet and P. Witomski. *Fourier Analysis and Applications: filtering, numerical computations, wavelets*. Springer, 1998.
- [16] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1983.
- [17] G.C. Goodwin, S.F. Graebe, and M.E. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [18] G.C. Goodwin and R.L. Payne. *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. Academic Press, New York, 1977.
- [19] K. Hoffmann and R. Kunze. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 2nd. edition, 1971.
- [20] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [21] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [22] H.P. Hsu. *Análisis de Fourier*. Fondo Educativo Interamericano S.A., 1973.
- [23] E. Jury. *Sample Data Control Systems*. John Wiley and Sons, 1958.
- [24] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
- [25] J.W. Kitchen. *Calculus of one variable*. Addison Wesley, 1968.
- [26] D.L. Kreider, R.G. Kuller, D.R. Ostberg, and F.W. Perkins. *Introducción al análisis lineal*. Fondo Educativo Interamericano S.A., 1971.
- [27] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [28] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Reading, Mass., 2nd. edition, 1984.
- [29] B.P. Lathi. *Signal Processing and Linear Systems*. Berkeley-Cambridge Press, 1998.
- [30] W.R. LePage. *Complex variables and the Laplace transform for engineers*. McGraw-Hill, 1961.
- [31] L. Ljung. *System Identification. Theory for the User*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2<sup>nd</sup> edition, 1999.
- [32] N. Matsumoto. Simple proof of the routh stability criterion based on order reduction of polynomials and principle of argument. In *Circuits and Systems, 2001. ISCAS 2001. The 2001 IEEE International Symposium on*, May 2001.

- 
- [33] R.H. Middleton and G.C. Goodwin. *Digital Control and Estimation. A Unified Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [34] K. Ogata. *State Space Analysis of Control Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
- [35] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer. *Discrete - Time Signal Processing*. Prentice-Hall International, Inc., 2nd edition, 1999.
- [36] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer. *Discrete - Time Signal Processing*. Prentice-Hall International, Inc., 2nd edition, 1999.
- [37] H.H. Rosenbrock. *State Space and Multivariable Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1970.
- [38] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd. edition, 1986.
- [39] D.G. Schultz and J.L. Melsa. *State Function and Linear Control Systems*. McGraw Hill Book Company, New York, 1967.
- [40] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. John Wiley and Sons, Inc., 1996.
- [41] T. Söderstrom and P. Stoica. *System Identification*. Prentice-Hall International, 1989.
- [42] M.R. Spiegel. *Teoría y problemas de transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, Panamá, 1991.
- [43] G.W. Stewart. *Introduction to matrix computations*. Academic Press, 1973.
- [44] G. Strang. *Linear Algebra and its applications*. Brooks Cole, 4th edition, 2006.
- [45] D.W. Wiberg. *Theory and Problems of State Space and Linear Systems*. McGraw Hill Book Company, New York, 1971.
- [46] Lotfi A. Zadeh and Charles A. Desoer. *Linear System Theory: the state space approach*. McGraw Hill Book Company, New York, 1963.
- [47] K. Zhou, G. Salomon, and E. Wu. Balanced realization and model reduction for unstable systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9:183–198, 1999.



# Índice alfabético

- ADC, *véase* conversor  
 adjunta, 467  
 alcanzabilidad, 289  
   test, 289  
 aliasing, 314, 319  
 amplificador, 85, 252  
   operacional, 308  
 amplitud, 86, 101  
 ancho de banda, 122  
 ángulo  
   de desfase, 92  
   de disparo, 94  
   desfase, 86, 101  
   entre vectores, 370  
 aperiódica  
   señal, 115  
 armónica, 92, 104  
 asíntota, 226, 228  
 autovalor, 39, 275, 469  
   propiedades, 473  
 autovector, 469  
   cadena, 471  
   generalizado, 471  
   propiedades, 473  
  
 base, 369  
   ortogonal, 370  
 bilineal, 208  
 bit, 311  
 bloque, 251  
 Bode, 223, 224  
   aproximación, 226, 231  
   diagrama, 224  
   frecuencias de quiebre, 231  
  
 círculo unitario, 69, 207, 244  
 cancelación, 285, 293, 298  
  
   cuasi-, 181, 216  
 cascada, *véase* conexión  
 Cauchy-Schwartz, 371  
 causalidad, 60, 429  
 Cayley-Hamilton, 477  
 ceros, 157, 179, 214  
   fase no mínima, 177, 212  
   lentos, 181  
   rápidos, 181  
 círculo unitario, 249  
 circunferencia unitaria, 207  
 cofactor, 465  
 combinación lineal, 368  
 condicionamiento, 475  
 condiciones iniciales, 1, 60, 157, 169, 194  
 conexión  
   paralelo, 286  
   realimentación, 287  
   serie o cascada, 286  
 congruencia, 473  
 constante de tiempo, 25  
 constantes indeterminadas, 39, 66  
 contra-respuesta, 167  
 contrarespuesta, 181, 216  
 control, 288  
 controlabilidad, 180, 215, 288  
   forma canónica, 293  
   gramiano, 291  
   tiempo discreto, 291  
   matriz, 289  
   pérdida, 291  
   test, 289  
 controlador, 287  
   forma canónica, 293  
 convergencia

- absoluta, 373
- en norma, 381
- puntual, 372
- uniforme, 373, 421
- conversor
  - análogo-digital(ADC), 278
  - digital-análogo(DAC), 278
- convolución, 52, 77, 393, 407, 429
  - tiempo discreto, 457
- CPU, 311
- cuadrante, 240
- cuantización, 312
- DAC, *véase* conversor
- dB, *véase* decibel
- década, 224
- decibel, 224
- delta de Dirac, 22, 118, 384, 393
  - en frecuencia, 160, 200, 399
- delta de Kronecker, 28, 398
- descomposición canónica, 298
  - alcanzabilidad, 292
  - observabilidad, 297
- descomposición espectral, 473
- desfase, 92
- desigualdad
  - Cauchy–Schwartz, 474
  - triangular, 208
- desigualdad de Cauchy-Schwartz, 371
- desigualdad de Parseval, 374
- desigualdad triangular, 369
- desplazamiento
  - en el tiempo, 386, 401
  - en frecuencia, 387, 401
- detectabilidad, 298
- determinante, 464
- DFT, *véase* transformada de Fourier
  - discreta
- diagonal, 464
- diagonalización, 470
- diagrama
  - de bloques, 251
  - de Bode, 224
  - polar, 237
  - tiempo discreto, 249
- digital, 311
- dimensión, 369
- Dirac, 22
- Dirichlet, 376
- disco unitario, 207
- discontinuidad, 246
- discretización, 61, 278, 351
- distancia, 370
- DSP, *véase* filtro digital
- DTFT, *véase* transformada de Fourier
  - de tiempo discreto
- dualidad, 297
- ecuación
  - característica, 267, 469
  - de recursión, 59
  - diferencial del sistema, 36, 156
- ecuación característica, 39
- ecuación diferencial del sistema, 35
- EDS, 35, *véase* ecuación diferencial del sistema
- ejes logarítmicos, 224
- elimina banda, 133, 147
- energía, 121, 142
- entrada, 1, 158
- entrada incremental, 10
- equilibrio
  - estable, 62
  - inestable, 271
  - punto de, 11
- error, 96
  - cuadrático, 343
  - de predicción, 343
  - estimación, 301
  - modelo, 301
- ERS, 59
  - ecuación característica, 64
  - polinomio característico, 64
  - respuesta homogénea, 63
  - respuesta particular, 65
  - solución homogénea, 63
  - solución particular, 65
- escalón
  - respuesta a, 163, 202
- escalón unitario, 21, 27
- escalamiento, 390
- espacio

- de estado, 259, 260
- de Hilbert, 367, 380
- generado, 368
- vectorial, 367
- espectro, 131, 236, 340, 412
  - de línea, 92
  - en frecuencia, 92
  - continuo, 120
  - de línea, 315
  - matriz, 470
- espectro de líneas, 93, 106
- espiral, 245
- estabilidad, 42, 69, 171, 206, 267, 270, 280, 282
  - asintótica, 42
- estabilizabilidad, 292
- estado, 259
  - alcanzable, 289
  - controlable, 288
  - del sistema, 259
  - observable, 294
  - transformación, 262, 273, 284
  - trayectoria, 260
  - vector, 260
- estado inicial, 3
- estimación
  - a posteriori, 342, 351
  - en tiempo real, 342, 352
  - error, 301
- estimación en línea, 347, 355
- estimador, 301
- Euler, 26, 31
- expansión de Laplace, 464
- exponencial, 24, 29
  - de una matriz, 266, 332, 476
  - imaginaria, 26
- factor de amortiguamiento, 183
- factores canónicos, 224
- fase, 86, 101
- fase mínima, 177, 212
- feedback, *véase* realimentación
- FFT, *véase* transformada de Fourier
  - rápida, *véase* transformada de Fourier rápida
- filtraje, 131
- filtro, 303
  - digital, 147
  - ideal, 153, 320
  - Kalman-Bucy, 304
- filtro ideal, 152
- filtros, 134
  - diseño de, 134
- FOH, *véase* retentor de primer orden
- forma canónica
  - controlable, 293
  - del controlador, 293
  - observable, 298
- forma de Jordan, 471
- Fourier, 85, 115
- Fröbenius, 475, 480
- fracciones parciales, 126, 144, 156, 177, 195, 437, 451
  - polos complejos, 441
  - polos múltiples, 440
  - polos simples, 439
- frecuencia
  - angular, 86, 101
  - de corte, 133, 134, 147
  - de muestreo, 311, 312
  - de Nyquist, 321
  - de quiebre, 231
  - doblaje, 314
  - fundamental, 92, 104
  - natural, 39, 66
- frecuencia natural
  - amortiguada, 183
  - dominante, 43, 70
  - no amortiguada, 183
- función
  - absolutamente integrable, 383
  - absolutamente sumable, 398
  - causal, 429, 455, 457
  - continua, 361
  - convexa, 478
  - de orden exponencial, 419
  - estrictamente propia, 437
  - generalizada, 118
  - periódica, 116
  - racional, 157, 158, 437
  - seccionalmente continua, 368

- función de transferencia, **123**, 143, 156, 157, 194, 274, 285  
 a modelo de estado, 276  
 bipropia, 158, 199, 307  
 ceros, 157, 198  
 con retardo, 158  
 de pulso, 330  
 estable, 177, 212  
 estrictamente propia, 158, 198  
 grado relativo, 158, 177, 198  
 impropia, 158  
 multiplicidad, 157  
 polos, 157, 198  
 propia, 158, 199  
 tiempo discreto, 143, 198, 329
- funcional, 291
- ganancia, 41, 67  
 a continua, 41, 67  
 a modo forzante, 41, 66, 86, 108, 128, 143
- Gauss, 343
- gradiente, 344, 354, 478
- grado relativo, 158, 198, 205
- gramiano  
 controlabilidad, 291  
 tiempo discreto, 291  
 observabilidad, 296  
 sistema inestable, 292
- Heaviside, 21, 36  
 operador, 36
- hermitiana, 464
- Hessiano, 345, 354
- hessiano, 478
- Hilbert, 367, 380
- homogeneidad, 6
- Hurwitz  
 polinomio, 173, 301
- identidad, 464
- identificación, 340
- impulso  
 respuesta a, 158, 163, 202  
 tren, 315
- impulso unitario, 22, 28, 118
- independencia lineal, 91, 368, 465
- integrador, 7
- interconexión, 251
- interpolación, 476
- invariancia, 8
- inversa, 466  
 generalizada, 481
- isometría, 477
- Jordan, 471
- Jury, 209  
 algoritmo, 209
- límite de estabilidad, 172, 207
- Laplace, 155  
 expansión, 464
- lazo de control, 287
- lema  
 inversión matricial, 469
- linealidad  
 en los parámetros, 343, 353
- linealización, 9, 263, 278, 366
- Lotka-Volterra, 305
- LSE, *véase* mínimos cuadrados
- Lyapunov  
 ecuación, 291, 296
- módulo periódico, 150
- mínimo, 478
- MacLaurin, 361
- matriz, 463  
 de Fourier, 107  
 adjunta, 467  
 cofactor, 465  
 condicionamiento, 475  
 cuadrada, 463  
 de controlabilidad, 289  
 de observabilidad, 295  
 de transformación, 273  
 de transición, 266  
 discreta, 279  
 determinante, 464  
 diagonal, 464  
 forma de Jordan, 471  
 hermitiana, 464  
 idempotente, 476

- identidad, 464
  - inversa, 466
  - inversa generalizada, 467
  - menor, 465
  - nilpotente, 476
  - no singular, 466
  - norma, 474
  - norma generalizada, 475
  - normal, 477
  - particionada, 467
    - inversa, 468
  - positiva definida, 345, 354, 478
  - producto, 466
  - raíz cuadrada, 479
  - rango, 465
  - real ortogonal, 476
  - simétrica, 464
  - singular, 465
  - traspuesta, 464
  - traza, 464
  - triangular, 464
  - unitaria, 476
  - vectorizada, 474
- menor, 465
  - mínimos cuadrados, 343
    - recursivo, 346, 355
    - tiempo continuo, 344
    - tiempo discreto, 354
  - modelo, 4, 259, 339
    - error, 301
    - espacio de estado, 259
      - muestreado, 331
    - linealizado, 9
    - pequeña señal, 15
  - modo forzado, 41, 66, 270
  - modo forzante, 39, 66
    - ganancia  $a$ , 41, 66
  - modo natural, 39, 66, 87, 102, 163, 213
    - dominante, 43, 70, 271
  - modulación, 388, 403
  - Moore-Penrose, 481
  - muestreador, 322
  - muestreo, 203, 278, 311, 452
    - impulsivo, 316, 322, 324
    - período de, 333
    - tasa límite, 321
  - multiplicidad, 157
    - polos, 172, 198, 206
  - número de condicionamiento, 475, 480
  - norma, 369
    - $\ell_1$ , 474
    - $\ell_2$ , 474
    - $\ell_p$ , 474
    - $\ell_\infty$ , 474
    - espectral, 475
    - euclidea, 474
    - Fröbenius, 475
    - generalizada, 475
    - inducida, 369, 475
    - máx, 474
    - matriz, 474
    - $p$ , 474
    - suma, 474
    - vector, 474
  - Nyquist, 223
    - frecuencia, 321
    - tasa, 321
  - observabilidad, 180, 215, 294
    - forma canónica, 298
    - gramiano, 296
    - matriz, 295
    - pérdida, 296
    - test, 295
  - observador, 301
    - polinomio, 301
  - octava, 224
  - operación
    - punto de, 9
  - operador, 3
    - adelanto, 60
  - optimización, 340
  - ortogonalidad, 91, 370
  - overshoot, 167
  - Paley-Wiener, 134, 147
  - paralelo
    - conexión, 286
  - Parseval, 100, 107, 121, 142, 395, 408
    - desigualdad, 374
    - identidad, 381

- partición, 467
- pasa altos, 132, 147
- pasa bajos, 132, 147
- pasa banda, 133, 147
- PEM, *véase* error de predicción
- período, 86, 101
  - de muestreo, 312, 333
  - infinito, 115
- plano de fase, 269
- PLC, 278
- polar
  - diagrama, 237
- polinomio característico, 199, 470
- polos, 157, 177, 212, 275, 438
  - dominantes, 179, 213
  - lentos, 179, 213
  - observador, 302
  - rápidos, 179, 213
- predicción
  - error de, 342
- proceso, 1
- producto
  - escalar, *véase* producto interno
  - interno, 369
  - matrices, 466
  - punto, *véase* producto interno
- promedio móvil, 60
- propiedad
  - submultiplicativa, 474
- pulso, 330
- punto crítico, 478
- punto de equilibrio, 271
- punto de equilibrio, 11, 13, 263, 366
- punto de operación, 9, 14
  
- quantum, 311
  
- raíz cuadrada, 479
- radio de convergencia, 201, 449
- radio espectral, 470
- rampa unitaria, 23, 29
- rango, 465
- realimentación, 287
- realizable, 134
- realización mínima, 306
- realización mínima, 276, 299
  
- reconstrucción, 312, 318
  - aproximada, 321
  - ideal, 321
- reconstructibilidad, 294
- regresión, 343, 352
- regresor, 353
- regresores, 350
- resonancia, 90, 104, 228, 271, 283
- respuesta, 2
  - a escalón, 49, 74, 163, 166, 202, 282
  - a impulso, 51, 76, 158, 163, 202
  - estacionaria, 48, 73
  - forzada, 270, 281
  - homogénea, 38, 267
  - inversa, 181, 216
  - no forzada, 280
  - particular, 38
  - transitoria, 48, 73
- respuesta en frecuencia, 87, 88, 102, 108, 122, 131, 143, 162, 201, 223
  - magnitud en [dB], 224
- retardo, 158, 206, 231, 263, 334, 386
  - diagrama de Bode, 231
  - diagrama polar, 244
  - en tiempo discreto, 60
- retentor, 322
  - de orden cero, 322
  - de primer orden, 324
- rise time, 166
- Routh, 209
  - algoritmo, 174
- ruido, 302
  
- salida, 158
- salida incremental, 10
- Schur, 477
- señal, 2, 21
  - causal, 52, 77
  - de prueba, 21
  - de tiempo continuo, 155, 262
  - de tiempo discreto, 27, 262
  - energía de la, 27, 32
  - incremental, 15, 263
  - modelo de estado, 262

- muestreada, 311
  - espectro, 315
  - reconstrucción, 318
- no acotada, 155
- potencia de la, 27, 32
- señales periódicas, 85
- serie, 372
  - MacLaurin, 361
  - Taylor, 361
- serie de Fourier, 85, 86, 91, 116, 367
  - convergencia, 374
  - convergencia en norma, 381
  - convergencia puntual, 377
  - convergencia uniforme, 379
  - cosenoidal, 95
  - discreta, *véase* transformada de Fourier
  - exponencial, 99
  - senoidal, 93
- settling time, 167
- SFD, 149
- Shannon, 321
- simétrica, 464
- similaridad, 262, 273, 284, 290, 473
- singular, 465
- sinusoide, 26, 86, 101
  - amortiguada, 26, 32
  - amplitud, 26
  - aperiódica, 31
  - desfase, 26
  - discreta, 30
  - fórmula de Euler, 26
  - frecuencia, 26
  - frecuencia angular, 26
  - período, 26
- sistema, 1
  - estable, 87, 102, 131, 158
  - inestable, 62
  - alcanzable, 289
  - algebraico, 4, 7
  - autónomo, 262
  - causal, 134, 147
  - completamente controlable, 290
  - completamente observable, 295
  - controlable, 288
  - detectable, 298
  - dinámico, 2, 155, 259
  - discreto, 277
  - dual, 297
  - estabilizable, 292
  - estable, 135, 148, 155
  - híbrido, 312
  - homogéneo, 262
  - identificación, 340
  - inestable, 155
  - interconexión, 251, 286
  - lineal, 108
  - muestreado, 277, 331
  - observable, 294
  - propiedades, 287
  - realizable, 134
  - sistemas discretos
    - estabilidad, 207
  - sistemas lineales, 5
  - sobre-respuesta, 167
  - solución homogénea, 38
  - solución particular, 38, 270
  - SPI, 172
  - spline, 314
  - subespacio
    - controlable, 292
    - observable, 298
  - submultiplicativa, 474
  - sucesión, 372
  - superposición, 6
  - SVD, *véase* valor singular
  - tasa de Nyquist, 321
  - Taylor, 361
  - teorema
    - Cayley-Hamilton, 477
    - Paley-Wiener, 134, 147
    - Parseval, 100, 107, 121, 142, 395, 408
    - Schur, 477
    - Shannon, 321
    - valor final, 164, 203, 432, 459
    - valor inicial, 170, 431, 458
  - TFD, 149
  - TFTD, 149
  - tiempo
    - de asentamiento, 167

- de levantamiento, 166
- Toeplitz, 476
- transferencia de Fourier, 123
- transformación de similaridad, 473
- transformación del estado, 262, 273, 284
- transformada de Fourier, 54, 116, 118, 223, 383
  - de tiempo discreto, 80, 108, 139, 201, 316, 398
  - inversa, 398
  - propiedades, 409
  - tabla, 409
- definición, 118
- discreta, 104, 108, 137
- inversa, 118, 383
- propiedades, 385, 395
- rápida, 108, 383, 412
- tabla, 395
- transformada de Laplace, 54, 223, 419
  - bilateral, 185
  - convergencia uniforme, 421
  - definición, 156, 419
  - inversa, 156, 419
    - tabla, 446
  - propiedades, 422, 434
  - región de convergencia, 156, 420
  - tabla, 434
- transformada Zeta, 80, 223, 449
  - bilateral, 218
  - definición, 193, 449
  - inversa, 449, 455
  - propiedades, 460
  - radio de convergencia, 449
  - región de convergencia, 449
  - tabla, 460
- transiente, *véase* respuesta transitoria
- traspuesta, 464
- traza, 464
  
- undershoot, 167, 181, 216
- unicidad
  - de la solución homogénea, 64
  
- valor
  - característico, *véase* autovalor
  - final, 432, 459
  - inicial, 431, 458
  - singular, 479
- valor propio, *véase* autovalor
- Vandermonde, 476
- variable
  - de estado, 259
- vector
  - ángulo, 370
  - característico, *véase* autovector
  - columna, 463
  - de estado, 260
  - de regresión, 343, 352
  - distancia, 370
  - fila, 463
  - norma, 474
  - ortogonalidad, 370
- vectorizar, 474
- velocidad, 43, 70, 267, 280
  
- Weierstrass, 373
  
- ZOH, *véase* retentor de orden cero